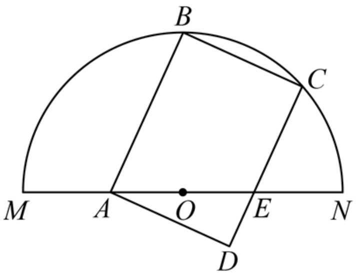
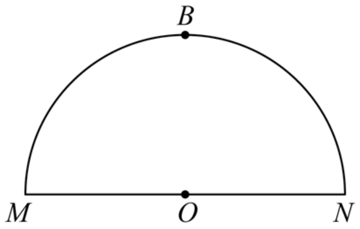
11.数学综合题解答第 25 题

1.（2024·上海奉贤二模 25）如图，已知半圆O的直径为MN，点 A 在半径OM 上，B为$\overset{\frown}{MN}$的中点，点C在$\overset{\frown}{BN}$上，以AB、BC为邻边作矩形$ABCD$，边CD交MN于点E．





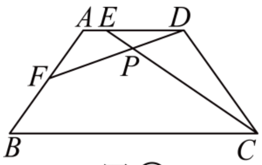
备用图

（1）如果$MN=6$，$AM=2$，求边BC的长；

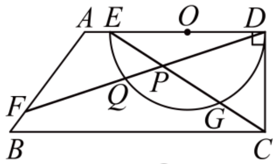
（2）连接CN，当$\triangle CEN$是以CN为腰的等腰三角形时，求$\angle BAN$的度数；

（3）连接DO并延长，交AB于点P，如果$BP=2AP$，求$\dfrac{BC}{AB}$的值．

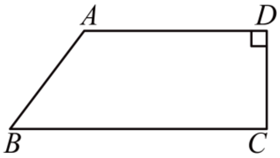
2.（2024·上海虹口二模25）如在梯形$ABCD$中，$AD \parallel BC$，点E在射线DA上，点F在射线AB上，连接CE、DF相交于点P，$\angle EPF=\angle ABC$.



图①



图②



备用图

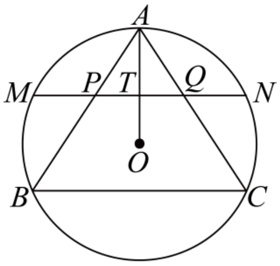
（1）如图①，如果$AB=CD$，点E、F分别在边AD、AB上．求证：$\dfrac{AF}{DE}=\dfrac{DF}{CE}$；

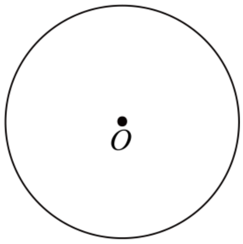
（2）如图②，如果$AD\perp CD$，$AB=5$，$BC=10$，$\cos\angle ABC=\dfrac{3}{5}$. 在射线$DA$的下方，以$DE$为直径作半圆$O$，半圆$O$与$CE$的另一个交点为点$G$．设$DF$与弧$EG$的交点为$Q$.

①当$DE=6$时，求EG和AF的长；

②当点Q为弧EG的中点时，求AF的长．

3.（2024·上海黄浦二模 25）已知：如图，$\triangle ABC$ 是圆 O 的内接三角形，$AB=AC$，$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 的中点分别为 M、N，MN 与 AB、OA、AC 分别交于点 P、T、Q.





备用图

（1）求证：$OA\perp MN$；

（2）当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，求 $\dfrac{AT}{OT}$ 的值；

（3）如果圆心 O 到弦 BC、MN 的距离分别为 7 和 15，求线段 PQ 的长.

4.（2024·上海金山二模 25）如图，已知：等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$AB = DC$，以 A 为圆心，AB 为半径的圆与 BC 相交于点 E，与 CD 相交于点 F，联结 AE、AC、BF，设 AE、AC 分别与 BF 相交于点 G、H，其中 H 是 AC 的中点.

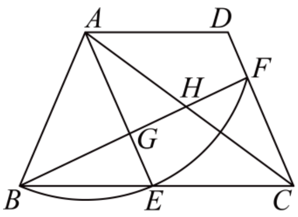


图1

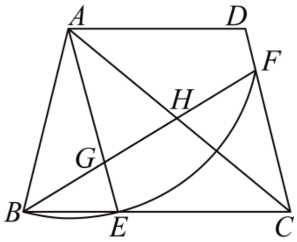


图2

（1）求证：四边形 $AECD$ 为平行四边形；

（2）如图 1，如果 $AE \perp BF$，求 $\frac{AB}{BC}$ 的值；

（3）如图 2，如果 $BG = GH$，求 $\angle ABC$ 的余弦值.

5.（2024·上海静安二模 25）如图 1，$\triangle ABC$ 中，已知 $AB=6, BC=9, \angle B$ 为锐角，$\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$.

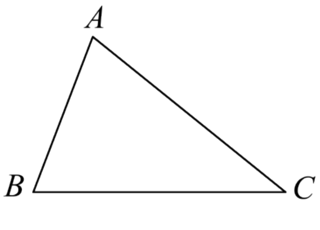


图1

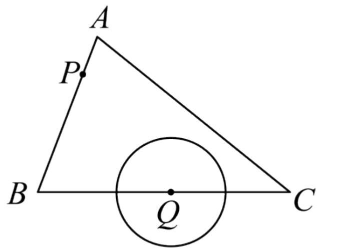


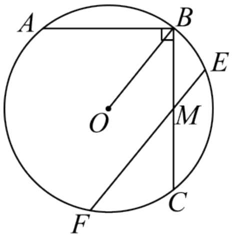
图2

（1）求 $\sin C$ 的值；

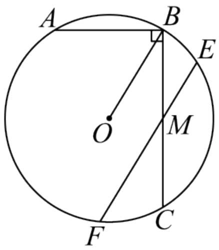
（2）如图 2，点 P 在边 AB 上，点 Q 是边 BC 的中点，$\odot P$ 经过点 A，$\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切，且 $\odot Q$ 的直径不大于 BC，设 $\odot P$ 的半径为 x，$\odot Q$ 的半径为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

（3）在第（2）小题条件下，连接 PQ，如果 $\triangle BPQ$ 是等腰三角形，求 AP 的长.

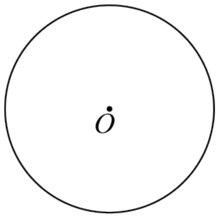
6.（2024·上海闵行二模 25）如图，OB 是 $\odot O$ 的半径，弦 AB 垂直于弦 BC，点 M 是弦 BC 的中点，过点 M 作 OB 的平行线，交 $\odot O$ 于点 E 和点 F.



图(1)



图(2)



(备用图)

（1）如图 1，当 $AB = BC$ 时.

①求 $\angle ABO$ 的度数；

②连接 OE，求证：$\angle OEF = 30°$；

（2）如图 2，连接 OE，当 $AB \le BC$ 时，$\tan\angle OEF = x, \dfrac{AB}{BC} = y$，求 y 关于 x 的函数关系式并直接写出定义域.

7.（2024·上海浦东二模 25）已知：$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A、B 两点，线段 O_1O_2 的延长线交 $\odot O_2$ 于点 C，CA、CB 的延长线分别交 $\odot O_1$ 于点 D、E.

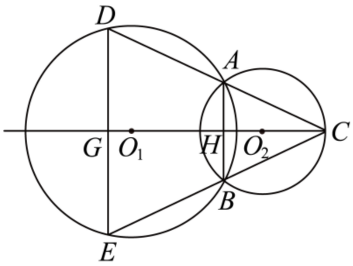


图1

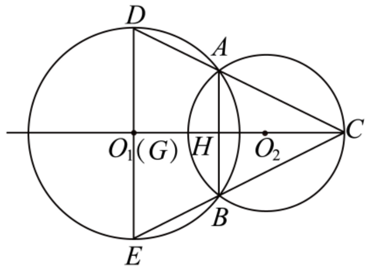


图2

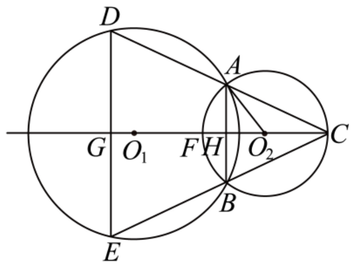


图3

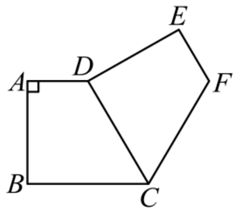
（1）连接 AB、DE，AB、DE 分别与连心线 O_1O_2 相交于点 H、点 G，如图 1，求证：$AB // DE$；

（2）如果 $O_1O_2 = 5$.

①如图 2，当点 G 与 O 重合，$\odot O_1$ 的半径为 4 时，求 $\odot O_2$ 的半径；

②连接 AO_2、BD，BD 与连心线 O_1O_2 相交于点 F，如图 3，当 $BD // AO_2$，且 $\odot O_2$ 的半径为 2 时，求 O_1G 的长.

8.（2024·上海普陀二模 25）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$（$AD < BC$），$\angle A = 90°$，$BC = CD = 6$．将梯形 $ABCD$ 绕点 C 按顺时针方向旋转，使点 B 与点 D 重合，此时点 A、D 的对应点分别是点 E、F．



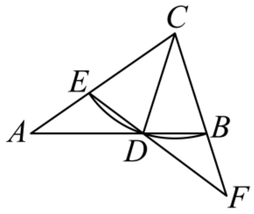
（1）当点 F 正好落在 AD 的延长线上时，求 $\angle BCD$ 的度数；

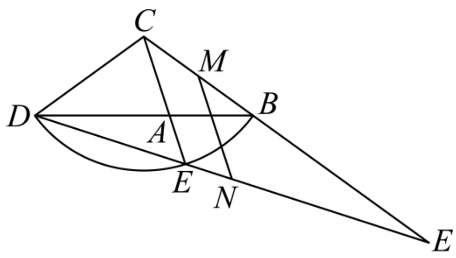
（2）联结 AE，设 $AD = x$，$AE = y$．

①求 y 关于 x 的函数解析式；

②定义：同中心同边数的两个正多边形称为双同正多边形．设 $\angle BCF$ 是一个正多边形的中心角，联结 BD，请说明以线段 BD、AE 为边的正多边形是双同正多边形的理由．当这两个正多边形的面积比是 $4:5$ 时，求双同正多边形的边数．

9.（2024·上海青浦二模 25）在$\triangle ABC$中，$AB=AC=2$，以C为圆心、CB为半径的弧分别与射线BA、射线CA相交于点D、E，直线ED与射线CB相交于点F.





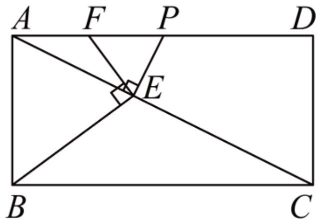
（1）如图，当点D在线段AB上时.

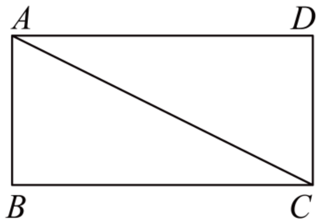
①设$\angle ABC=\alpha$，求$\angle BDF$；（用含α的式子表示）

②当$BF=1$时，求$\cos\angle ABC$的值；

（2）如图，当点D在BA的延长线上时，点M、N分别为BC、DF的中点，连接MN，如果$MN\parallel CE$，求CB的长.

10.（2024·上海松江二模 25）如图，已知矩形 $ABCD$ 中， $AB=1$， $BC=2$，点 P 是边 AD 上一动点，过点 P 作 $PE\perp AC$ ，垂足为点 E ，连接 BE ，过点 E 作 $EF\perp BE$ ，交边 AD 于点 F （点 F 与点 A 不重合）.





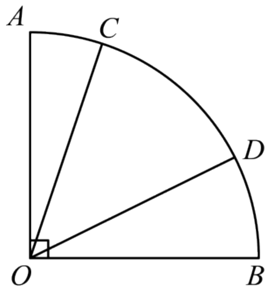
备用图

（1）当 F 是 AP 的中点时，求证： $BA=BE$ ；

（2）当 AP 的长度取不同值时，在！PEF 中是否存在长度保持不变的边？如果存在，请指出并求其长度，如果不存在，请说明理由；

（3）延长 PE 交边 BC 于点 G ，连接 FG ，VEFG 与 $\triangle AEF$ 能否相似，若能相似，求出此时 AP 的长；若不能相似，请说明理由.

11.（2024·上海徐汇二模 25）如图，在扇形OAB中，$OA=OB=6\sqrt{2}$，$\angle AOB=90°$，点C、D是弧AB上的动点（点C在点D的上方，点C不与点A重合，点D不与点B重合），且$\angle COD=45°$.



（1）①请直接写出弧AC、弧CD和弧BD之间的数量关系；

②分别连接AC、CD和BD，试比较$AC+BD$和CD的大小关系，并证明你的结论；

（2）AB分别交OC、OD于点M、N.

①当点C在弧AB上运动过程中，$AN\cdot BM$的值是否变化，若变化请说明理由；若不变，请求$AN\cdot BM$的值；

②当$MN=5$时，求圆心角$\angle DOB$的正切值.

12.（2024·上海杨浦二模 25） 已知以AB为直径的半圆O上有一点C，$CD \perp OA$，垂足为点D，点E是半径OC上一点（不与点O、C重合），作$EF \perp OC$交弧BC于点F，连接OF．

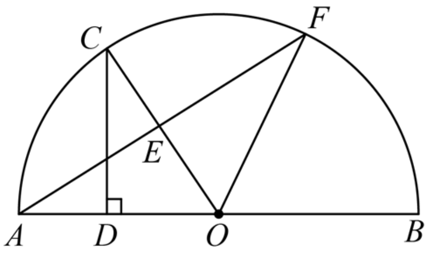


图 1

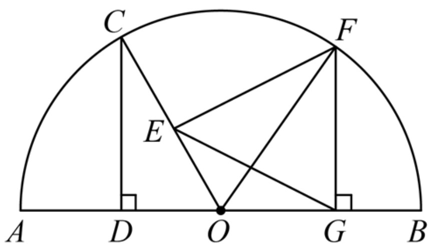


图 2

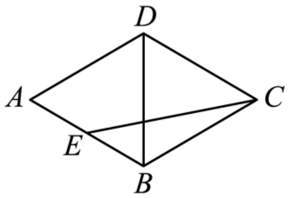
（1）如图1，当FE的延长线经过点A时，求$\dfrac{CD}{AF}$的值；

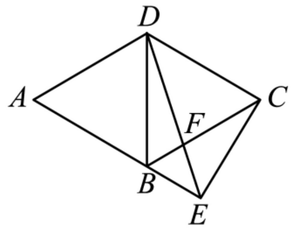
（2）如图2，作$FG \perp AB$，垂足为点G，连接EG．

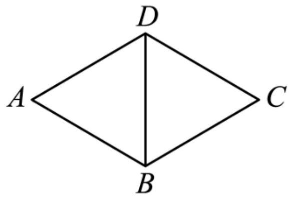
① 试判断EG与CD的大小关系，并证明你的结论；

② 当$\triangle EFG$是等腰三角形，且$\sin\angle COD=\dfrac{4}{5}$，求$\dfrac{OE}{OD}$的值.

13.（2024·上海嘉定二模 25）在菱形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=60^{\circ}$，点 E 在射线 AB 上，连接 CE、BD.







备用图

（1）如图，当点 E 是边 AB 的中点，求 $\angle ECD$ 的正切值；

（2）如图，当点 E 在线段 AB 的延长线上，连接 DE 与边 BC 交于点 F，如果 $AD=6$，$\triangle EFC$ 的面积等于 $3\sqrt{3}$，求 EF 的长；

（3）当点 E 在边 AB 上，CE 与 BD 交于点 H，连接 DE 并延长 DE 与 CB 的延长线交于点 G，如果 $AD=6$，$\triangle BCH$ 与以点 E、G、B 所组成的三角形相似，求 AE 的长.

14.（2024·上海长宁二模 25）（本题满分 14 分，第（1）小题 4 分，第（2）小题 10 分）

已知在$\triangle ABC$中， $CA=CB, AB=6, \cos\angle CAB=\dfrac{3}{5}$，点 O 为边 AB 上一点，以点 O 为圆心，OA 为半径作$\odot O$，交边 AC 于点 D（点 D 不与点 A、C 重合）.

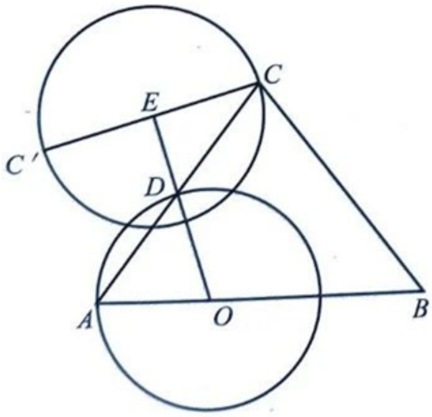
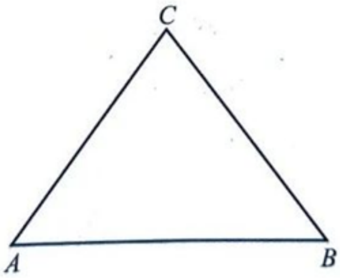
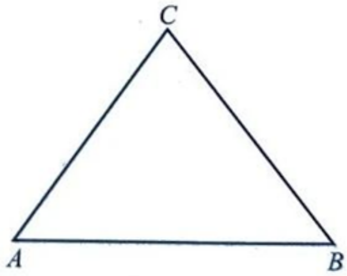


图 1



备用图



备用图

（1）当$AD=4$时，判断点 B 与$\odot O$的位置关系，并说明理由；

（2）过点 C 作$CE\perp OD$，交 OD 延长线于点 E．以点 E 为圆心，EC 为半径作$\odot E$，延长 CE，交$\odot E$于点C'.

①如图 1，如果$\odot O$与$\odot E$的公共弦恰好经过线段 EO 的中点，求 CD 的长；

②联结AC'、OC，如果AC'与$\triangle BOC$的一条边平行，求$\odot E$的半径长.

15.（2024·上海宝山二模 25）已知 AB 是半圆 O 的直径，C 是半圆 O 上不与 A、B 重合的点，将弧 AC 沿直线 AC 翻折，翻折所得的弧交直径 AB 于点 D，E 是点 D 关于直线 AC 的对称点.

（1）如图 12，点 D 恰好落在点 O 处.

① 用尺规作图在图 12 中作出点 E（保留作图痕迹），

联结 AE、CE、CD，求证：四边形 $ADCE$ 是菱形；

② 联结 BE，与 AC、CD 分别交于点 F、G，求 $\dfrac{FG}{BE}$ 的值；

（2）如果 $AB=10$，$OD=1$，求折痕 AC 的长.

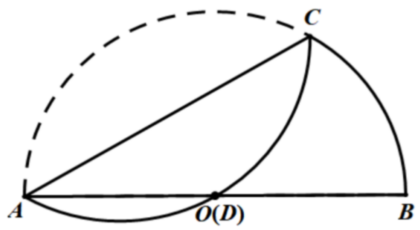
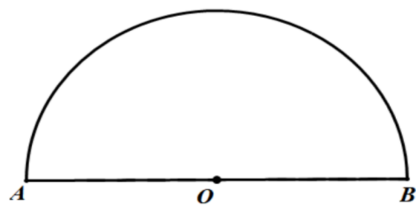


图 12



备用图

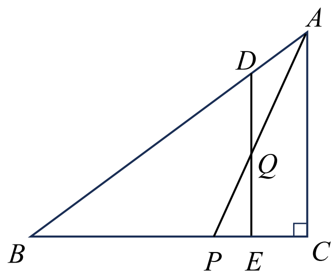
16.（2024·上海宝山二模 25）如图，已知 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=6$，$\sin B=\frac{3}{5}$，点 D 是射线 BA 上一动点（不与 A、B 重合），过点 D 作 $DE \parallel AC$，交射线 BC 于点 E，点 Q 为 DE 中点，联结 AQ 并延长，交射线 BC 于点 P.

（1）如图 1，当点 D 在线段 AB 上时，

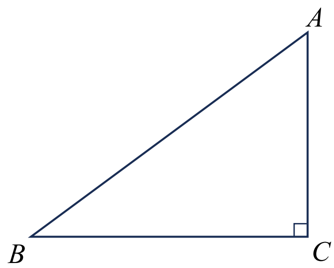
①若 $AD=2$，求 PC 的长；

②当△ADQ 与△ABP 相似时，求 AD 的长.

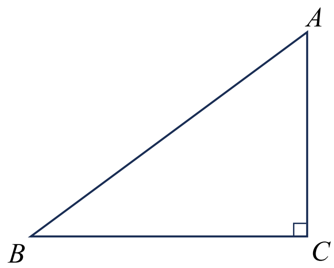
（2）当△ADQ 是以 AD 为腰的等腰三角形时，试判断以点 A 为圆心、AD 为半径的⊙A 与以 C 为圆心、CE 为半径的⊙C 的位置关系，并说明理由.



第 25 题图 1



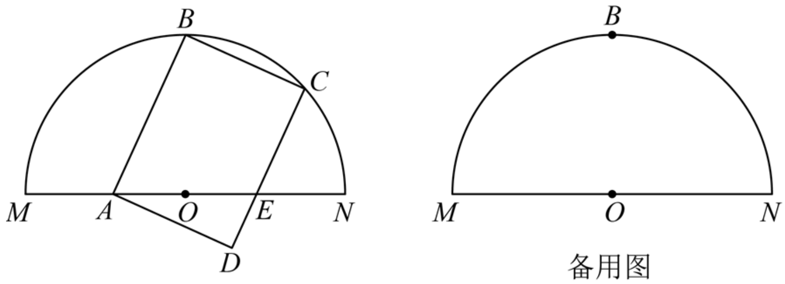
备用图 1



备用图 2

11.数学综合题解答第 25 题

1.（2024·上海奉贤二模 25）如图，已知半圆O的直径为MN，点 A 在半径OM上，B为$\overset{\frown}{MN}$的中点，点C在$\overset{\frown}{BN}$上，以AB、BC为邻边作矩形$ABCD$，边CD交MN于点E.



备用图

（1）如果$MN=6$，$AM=2$，求边BC的长；

（2）连接CN，当$\triangle CEN$是以CN为腰的等腰三角形时，求$\angle BAN$的度数；

（3）连接DO并延长，交AB于点P，如果$BP=2AP$，求$\dfrac{BC}{AB}$的值.

【答案】（1）$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$；　　（2）$\angle BAN=67.5^\circ$；　　（3）$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

【分析】（1）连接OB，过点O作$OH\perp BC$，垂足为H，由圆周角定理可得$\angle MOB=90^\circ$，

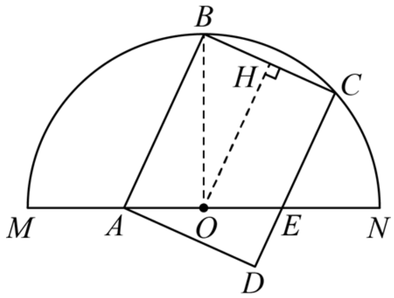
进而可得$AB=\sqrt{10}$，再证明$\angle ABO=\angle BOH$，根据$\sin\angle ABO=\sin\angle BOH$，可得$\dfrac{OA}{AB}=\dfrac{BH}{BO}$，即可求解；

（2）连接OC，设$\angle CON=\alpha$，则$\angle CNO=\angle NCO=\dfrac{180^\circ-\alpha}{2}$，$\angle COH=\dfrac{90^\circ-\alpha}{2}$，求出$\angle OCH=45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$，得到$\angle OCE=45^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$，进而得到$\angle ECN=45^\circ$，$\angle CEN=45^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$，分$CE=CH$和$CN=EN$两种情况解答即可求解；

（3）由$AB\,/\!/\,OH\,/\!/\,CE$可得，$\dfrac{CH}{BH}=\dfrac{OE}{AO}=1$，进而得到$AO=OE$，可证明$\triangle AOP\cong\triangle EOD(\mathrm{ASA})$，得到$PA=DE$，$PD=AE$，设$AO=OE=x$，$AP=ED=y$，则$AB=3y$，$AE=2x$，证明$\triangle AOB\backsim\triangle EDA$，得到$\dfrac{OA}{ED}=\dfrac{AB}{AE}$，即可到$2x^2=3y^2$，由勾股定理$BC=AD=\sqrt{5}y$，即可求解；

【小问 1 详解】

解：连接OB，过点O作$OH\perp BC$，垂足为H，



∵点B是$\overset{\frown}{MN}$中点，

$\therefore\angle MOB=\frac{1}{2}\angle NOM=\frac{1}{2}\times180^{\circ}=90^{\circ}$，

$\because MN=6$，

$\therefore OM=ON=OB=\frac{1}{2}MN=3$，

$\therefore OA=OM-AM=3-2=1$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^{2}+OB^{2}}=\sqrt{1^{2}+3^{2}}=\sqrt{10}$，

∵矩形$ABCD$，

$\therefore AB\perp BC$，

$\because OH\perp BC$，

$\therefore AB\parallel OH$，$BH=\frac{1}{2}BC$，

$\therefore\angle ABO=\angle BOH$，

在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$与$\mathrm{Rt}\triangle BOH$中，$\sin\angle ABO=\sin\angle BOH$，

$\therefore\frac{OA}{AB}=\frac{BH}{BO}$，

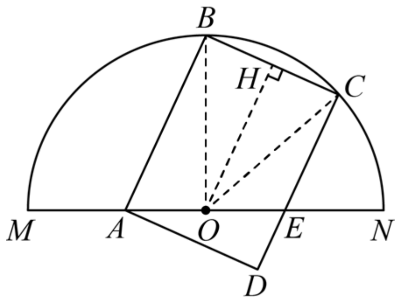
$\therefore\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{BH}{3}$，

解得$BH=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore BC=2\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$；

【小问2详解】

解：连接OC，



设 $\angle CON=\alpha$， 则 $\angle CNO=\angle NCO=\frac{180°-\alpha}{2}$ ， $\angle COH=\frac{90°-\alpha}{2}$，

∴在 $\mathrm{Rt}\triangle OCH$ 中， $\angle OCH=90°-\frac{90°-\alpha}{2}=45°+\frac{\alpha}{2}$，

∴ $\angle OCE=90°-\angle OCH=90°-\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)=45°-\frac{\alpha}{2}$，

∴ $\angle ECN=\angle NCO-\angle OCE=\frac{180°-\alpha}{2}-\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)=45°$，

$\angle CEN=\angle COE+\angle OCE=\alpha+45°-\frac{\alpha}{2}=45°+\frac{\alpha}{2}$，

当 $CE=CN$ 时， $\angle CEN=\angle CNE$，

即 $45°+\frac{\alpha}{2}=\frac{180°-\alpha}{2}$，

解得 $\alpha=45°$，

∴ $\angle CEN=45°+\frac{45°}{2}=67.5°$，

∵ $AB\,//\,CD$，

∴ $\angle BAN=\angle CEN=67.5°$；

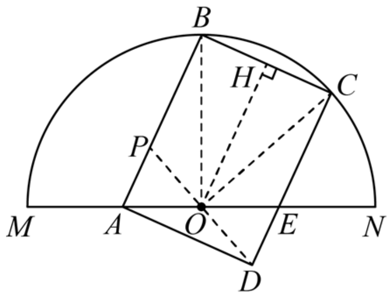
当 $CN=EN$ 时， $\angle CEN=\angle ECN$，

即 $45°+\frac{\alpha}{2}=45°$， 不存在；

∴ $\angle BAN=67.5°$；

【小问 3 详解】

解：如图，



由 $AB \parallel OH \parallel CE$ 可得，$\dfrac{CH}{BH}=\dfrac{OE}{AO}=1$，$\angle PAO=\angle DEO$，$\angle APO=\angle EDO$，

$\therefore AO=OE$，

$\therefore \triangle AOP \cong \triangle EOD(\mathrm{AAS})$，

$\therefore PA=DE$，$PD=AE$，

设 $AO=OE=x$，$AP=ED=y$，由题意得 $AB=3y$，$AE=2x$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$\therefore \angle BAD=\angle ADE=90^\circ$，

$\therefore \angle BOA=\angle ADE=90^\circ$，$\angle BAO+\angle DAE=90^\circ$，$\angle AED+\angle DAE=90^\circ$，

$\therefore \angle BAO=\angle AED$，

$\therefore \triangle AOB \backsim \triangle EDA$，

$\therefore \dfrac{OA}{ED}=\dfrac{AB}{AE}$，

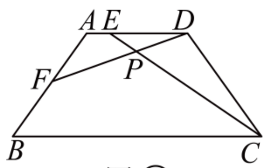
即 $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3y}{2x}$，

$\therefore 2x^2=3y^2$，

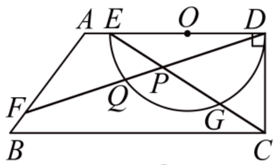
$\therefore BC=AD=\sqrt{AE^2-DE^2}=\sqrt{(2x)^2-y^2}=\sqrt{6y^2-y^2}=\sqrt{5}y$，

$\therefore \dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}y}{3y}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

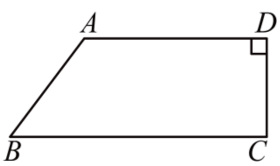
2.（2024·上海虹口二模 25）如在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，点 E 在射线 DA 上，点 F 在射线 AB 上，连接 CE、DF 相交于点 P，$\angle EPF=\angle ABC$.



图①



图②



备用图

（1）如图①，如果 $AB=CD$，点 E、F 分别在边 AD、AB 上．求证：$\dfrac{AF}{DE}=\dfrac{DF}{CE}$；

（2）如图②，如果 $AD\perp CD$，$AB=5$，$BC=10$，$\cos\angle ABC=\dfrac{3}{5}$．在射线 DA 的下方，以 DE 为直径作半圆 O，半圆 O 与 CE 的另一个交点为点 G．设 DF 与弧 EG 的交点为 Q．

①当 $DE=6$ 时，求 EG 和 AF 的长；

②当点 Q 为弧 EG 的中点时，求 AF 的长．

【答案】（1）见解析　　（2）①$EG=\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$；$AF=\dfrac{21}{5}$；②15

【分析】（1）根据等腰梯形的性质可得 $\angle B=\angle DCB=\angle DCE+\angle BCE$，$\angle A=\angle EDC$，$\angle DEC=\angle BCE$，根据三角形的外角性质得出 $\angle FPE=\angle CED+\angle EDP$，进而可得 $\angle ADF=\angle DCE$，即可证明 $\triangle ADF\backsim\triangle DCE$，根据相似三角形的性质，即可求解；

（2）①同（1）证明 $\triangle ADF\backsim\triangle PDE$，如图所示，过点 A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，连接 DG，得出 $\cos\angle DEC=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，$\sin\angle DEC=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$，解直角三角形，分别求得 EG，EP，进而根据相似三角形的性质求得 AF 的长；

②根据题意画出图形，根据垂径定理得出 $OQ\perp EQ$，根据题意可设 $\angle EPF=\angle ABC=\alpha$，$\angle ODQ=\angle OQD=\beta$，则 $\alpha+\beta=90^\circ$，得出 $\tan\alpha=\dfrac{4}{3},\tan\beta=\dfrac{3}{4}$，设 $FR=12a$，则 $AR=9a$，则 $AF=15a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DFR$ 中，得出 $DR=16a$，根据 $AD=DR-AR=16a-9a=7a$ 得出 $a=1$，即可求解．

【小问 1 详解】

证明：∵梯形 $ABCD$ 中，$AD\,/\!/\,BC$，$AB=CD$，

∴ $\angle B=\angle DCB=\angle DCE+\angle BCE$，$\angle A=\angle EDC$，$\angle DEC=\angle BCE$，

又∵ $\angle FPE=\angle CED+\angle EDP$，$\angle EPF=\angle ABC$

∴ $\angle ADF=\angle DCE$

∴ $\triangle ADF\backsim\triangle DCE$，

∴ $\dfrac{AF}{DE}=\dfrac{DF}{CE}$；

【小问 2 详解】

解：∵ $\angle EPF=\angle ABC$，$\angle DPC=\angle EPF$

$\because \angle FPC+\angle DPC=180^\circ$，则 $\angle FPC+\angle B=180^\circ$

$\therefore \angle ECB+\angle PFB=180^\circ$

$\therefore \angle ECB=\angle AFD$

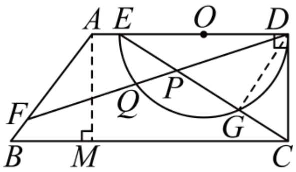
$\because AD \parallel BC$

$\therefore \angle ECB=\angle DEC$

又$\because \angle EDP=\angle FDA$

$\therefore \triangle ADF \backsim \triangle PDE$，

如图所示，过点A 作 $AM\perp BC$ 于点 M，连接 DG，



图②

$\because AB=5$，$\cos\angle ABC=\dfrac{3}{5}$

$\therefore BM=3$，则 $AM=4$，$\sin\angle ABC=\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{4}{5}$，

$\because AD \parallel BC, AD\perp CD$

$\therefore CD=AM=4$

$\because BC=10$

$\therefore AD=MC=BC-BM=10-3=7$

又$\because DE=6$

$\therefore AE=1$，

在 $\text{Rt}\triangle EDC$ 中，$ED=6, CD=4$

$\therefore EC=\sqrt{ED^2+CD^2}=\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$

$\therefore \cos\angle DEC=\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{6}{2\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，$\sin\angle DEC=\dfrac{DC}{EC}=\dfrac{4}{2\sqrt{13}}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\because ED$ 为直径

$\therefore \angle DGE=90^\circ$

$\therefore EG=ED\times\cos\angle DEC=6\times\dfrac{3\sqrt{13}}{13}=\dfrac{18\sqrt{13}}{13}$，

$$DG=ED\sin\angle DEC=6\times\frac{2\sqrt{13}}{13}=\frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore PD=\frac{DG}{\sin\angle DPG}=\frac{DG}{\sin\angle ABC}=\frac{\frac{12\sqrt{13}}{13}}{\frac{4}{5}}=\frac{15\sqrt{13}}{13},$$

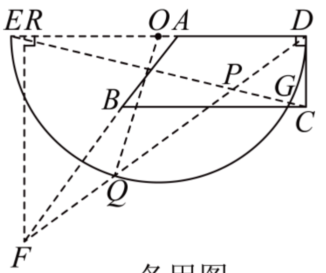
$PG=PD\cos\angle DPG=\frac{3}{5}\times\frac{15\sqrt{13}}{13}=\frac{9\sqrt{13}}{13}$，则 $EP=EG-PG=\frac{9\sqrt{13}}{13}$，

$\because \triangle ADF\backsim\triangle PDE$

$\therefore \frac{AF}{PE}=\frac{AD}{PD}$

$$\therefore AF=\frac{AD\cdot PE}{PD}=\frac{7\times\frac{9\sqrt{13}}{13}}{\frac{15\sqrt{13}}{13}}=\frac{21}{5}$$

②过点 F 作 $FR\perp AD$ 于点 R，



备用图

$\because \overset{\frown}{EQ}=\overset{\frown}{GQ}$

$\therefore OQ\perp EQ$

$\because OQ=OD$

$\therefore \angle ODQ=\angle OQD$

设 $\angle EPF=\angle ABC=\alpha$， $\angle ODQ=\angle OQD=\beta$，则 $\alpha+\beta=90^\circ$

$\because \cos\angle DPG=\text{os}\,\angle EPF=\cos\angle ABC=\frac{3}{5}$，则 $\frac{PG}{PD}=\frac{3}{5}$

设 $PG=3k,PD=5k$，则 $GD=4k$

$\therefore \tan\alpha=\frac{4}{3},\tan\beta=\frac{3}{4}$

$\because AD\parallel BC$

$\therefore \angle RAF = \alpha$

设 $FR = 12a$，则 $AR = 9a$，

$\therefore AF = 15a$，

在 Rt$\triangle DFR$ 中，$\tan \beta = \dfrac{RF}{DR} = \dfrac{3}{4}$

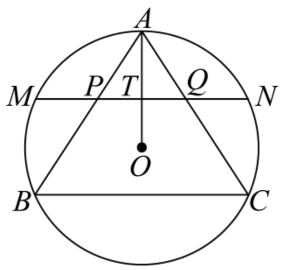
$\therefore DR = 16a$

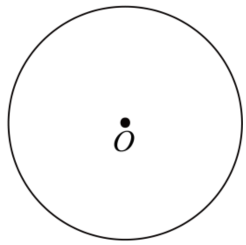
又$\because AD = DR - AR = 16a - 9a = 7a = 7$

$\therefore a = 1$

$\therefore AF = 15$

3.（2024·上海黄浦二模 25）已知：如图，$\triangle ABC$ 是圆 O 的内接三角形，$AB = AC$，$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 的中点分别为 M、N，MN 与 AB、OA、AC 分别交于点 P、T、Q.





备用图

（1）求证：$OA \perp MN$；

（2）当 $\triangle ABC$ 是等边三角形时，求 $\dfrac{AT}{OT}$ 的值；

（3）如果圆心 O 到弦 BC、MN 的距离分别为 7 和 15，求线段 PQ 的长.

【答案】（1）见详解　　（2）1　　（3）15 或 $\dfrac{30}{11}\sqrt{11}$

【分析】（1）连接 OM, ON，由题意得 $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$，则点 A 在 MN 的中垂线上，结合圆的性质得点 O 在 MN 的中垂线上，则 OA 垂直平分 MN 即可；

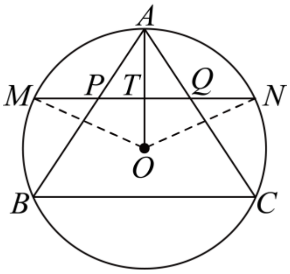
（2）连接 OC, ON, AN，由圆周角定理得 $\angle AOC = 120°$，证得 $\triangle AON$ 是等边三角形，则有 $OA \perp MN$，可得 $AT = OT$ 即可；

（3）连接 OM 交 AB 于点 G，延长 AO 交 BC 于点 H，由（1）得 $OA \perp MN$，同理 $BA \perp MO$，且 $AG = \dfrac{1}{2}AB$，结合 $\cos\angle AOG = \dfrac{OG}{AO} = \dfrac{OT}{OM}$，设圆 O 的半径为 r，利用 $\cos\angle BAH = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AG}{AO}$ 和 $AG^2 = r^2 - 15^2$，整理得到 $2\left(r^2 - 15^2\right) = AH \cdot r$

，进一部分分当 MN 与 BC 位于元 O 得两侧和当 MN 与 BC 位于元 O 得同侧求解即可．

【小问 1 详解】

证明：连接 OM,ON，如图，



由题意得 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{AN}$，则点 A 在 MN 的中垂线上，

∵ $OM=ON$，

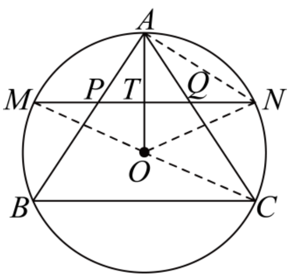
∴点 O 在 MN 的中垂线上，

则 OA 垂直平分 MN，

那么， $OA\perp MN$；

【小问 2 详解】

连接 OC,ON,AN，如图，



∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，

∴ $\angle ABC=60^\circ$，

∴ $\angle AOC=120^\circ$，

∵ $OA=OC=ON$， 点 N 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点，

∴ $\angle AON=60^\circ$，

∴ $\triangle AON$ 是等边三角形，

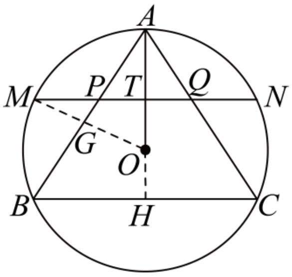
∵ $OA\perp MN$，

∴ $AT=OT$，

∴ $\dfrac{AT}{OT}=1$；

【小问 3 详解】

连接 OM 交 AB 于点 G，延长 AO 交 BC 于点 H，如图，



由（1）得 $OA\perp MN$，同理 $BA\perp MO$，且 $AG=\frac{1}{2}AB$，

$\because \cos\angle AOG=\frac{OG}{AO}=\frac{OT}{OM}$，$OA=OM$，

$\therefore OG=OT=15$，

设圆 O 的半径为 r，

$\because \cos\angle BAH=\frac{AH}{AB}=\frac{AG}{AO}$，$AG^2=AO^2-OG^2=r^2-15^2$，

$\therefore 2AG^2=AH\cdot AO$，即 $2\left(r^2-15^2\right)=AH\cdot r$，

当 MN 与 BC 位于元 O 得两侧时，则 $AH=r+7$，

$2\left(r^2-15^2\right)=(r+7)\cdot r$，解得 $r=25$，$r=-18$（舍去），

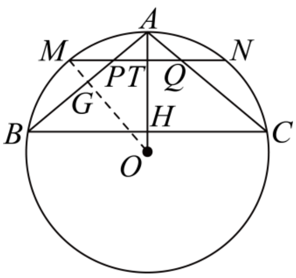
则 $AH=32$，$AT=AO-OT=25-15=10$，$BH=\sqrt{r^2-OH^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$，

$\because \tan\angle PAT=\frac{PT}{AT}=\frac{BH}{AH}$，

$\therefore PT=\frac{BH}{AH}\cdot AT=\frac{24}{32}\times 10=\frac{15}{2}$，

则 $PQ=2PT=15$；

当 MN 与 BC 位于元 O 得同侧时，如图，



则 $AH=r-7$，

$2\left(r^2-15^2\right)=(r-7)\cdot r$，解得 $r=18$，$r=-25$（舍去），

则 $AH=11$，$AT=AO-OT=18-15=3$，$BH=\sqrt{r^2-OH^2}=\sqrt{18^2-7^2}=5\sqrt{11}$，

$\because \tan\angle PAT=\dfrac{PT}{AT}=\dfrac{BH}{AH}$，

$\therefore PT=\dfrac{BH}{AH}\cdot AT=\dfrac{5\sqrt{11}}{11}\times 3=\dfrac{15}{11}\sqrt{11}$，

则 $PQ=2PT=\dfrac{30}{11}\sqrt{11}$；

故线段 PQ 的长为 15 或 $\dfrac{30}{11}\sqrt{11}$．

4.（2024·上海金山二模 25）如图，已知：等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$AB=DC$，以 A 为圆心，AB 为半径的圆与 BC 相交于点 E，与 CD 相交于点 F，联结 AE、AC、BF，设 AE、AC 分别与 BF 相交于点 G、H，其中 H 是 AC 的中点．

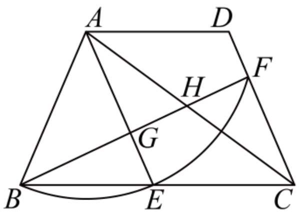


图1

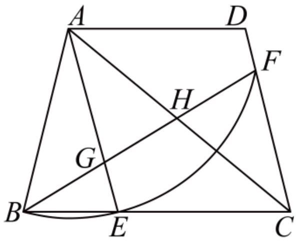


图2

（1）求证：四边形 $AECD$ 为平行四边形；

（2）如图 1，如果 $AE\perp BF$，求 $\dfrac{AB}{BC}$ 的值；

（3）如图 2，如果 $BG=GH$，求 $\angle ABC$ 的余弦值．

【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　（3）$\cos\angle ABC=\dfrac{\sqrt{30}}{24}$

【分析】（1）由题意知，$AB=AE$，则 $\angle ABE=\angle AEB$，$AE=DC$，由等腰梯形 $ABCD$，可得 $\angle AEB=\angle BCD$，则 $AE\parallel DC$，进而结论得证；

（2）由垂径定理得 $BG=GF$，证明 $\triangle BEG\backsim\triangle BCF$，则 $\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{EG}{CF}=\dfrac{BG}{BF}=\dfrac{1}{2}$，设 $GE=a$，则 $CF=2a$，证明 $\triangle AHG\cong\triangle CHF(\mathrm{AAS})$，则 $AG=CF=2a$，$AB=AE=3a$，由勾股定理得，$BG=\sqrt{5}a$，$BE=\sqrt{6}a$，则 $BC=2\sqrt{6}a$，根据 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{3a}{2\sqrt{6}a}$，求解作答即可；

（3）由（2）可知，$\triangle AHG\cong\triangle CHF(\mathrm{AAS})$，则 $GH=HF$，$AG=CF$，

$BG=GH=HF$，由（2）可知，$\triangle BEG\backsim\triangle BCF$，则 $\frac{EG}{CF}=\frac{BE}{BC}=\frac{BG}{BF}=\frac{1}{3}$，$\frac{EG}{AG}=\frac{1}{3}$，如图，作 $AI\perp BC$，垂足为点 I，连接 AF，则 $BI=IF$，设 $AB=x$，$BI=a$，则 $AG=\frac{3}{4}x$，$IC=5a$，证明 $\triangle ABG\cong\triangle AFH(\text{SAS})$，可得 $AG=AH=\frac{3}{4}x$，$AC=2AH=\frac{3}{2}x$，由勾股定理得 $AI^2=AB^2-BI^2=x^2-a^2$，$AI^2=AC^2-CI^2=\frac{9}{4}x^2-25a^2$，即 $x^2-a^2=\frac{9}{4}x^2-25a^2$，可得 $\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{30}}{24}$，根据 $\cos\angle ABC=\frac{a}{x}$，求解作答即可.

【小问 1 详解】

证明：由题意知，$AB=AE$，

$\therefore\angle ABE=\angle AEB$，

$\because AB=DC$，

$\therefore AE=DC$，

$\because$等腰梯形 $ABCD$，

$\therefore\angle ABC=\angle BCD$，

$\therefore\angle AEB=\angle BCD$，

$\therefore AE\parallel DC$，

$\therefore$四边形 $AECD$ 为平行四边形.

【小问 2 详解】

解：$\because AE\perp BF$，

$\therefore BG=GF$，

$\because AE\parallel DC$，

$\therefore\triangle BEG\backsim\triangle BCF$，

$\therefore\frac{BE}{BC}=\frac{EG}{CF}=\frac{BG}{BF}=\frac{1}{2}$，

设 $GE=a$，则 $CF=2a$，

$\because AE\parallel DC$，

$\therefore\angle AGH=\angle CFH$，

又$\because\angle AHG=\angle CHF$，$AH=CH$，

$\therefore\triangle AHG\cong\triangle CHF(\text{AAS})$，

∴ $AG=CF=2a$，

∴ $AB=AE=3a$，

由勾股定理得，$BG=\sqrt{AB^2-AG^2}=\sqrt{5}a$，

∴ $BE=\sqrt{BG^2-GE^2}=\sqrt{6}a$，

∴ $BC=2\sqrt{6}a$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{3a}{2\sqrt{6}a}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{\sqrt{6}}{4}$；

【小问 3 详解】

解：由（2）可知，$\triangle AHG\cong\triangle CHF(\mathrm{AAS})$，

∴ $GH=HF$，$AG=CF$，

∵ $BG=GH$，

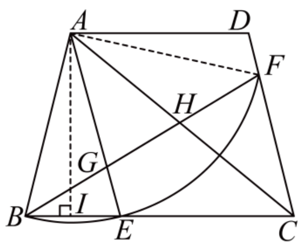
∴ $BG=GH=HF$，

由（2）可知，$\triangle BEG\backsim\triangle BCF$，

∴ $\frac{EG}{CF}=\frac{BE}{BC}=\frac{BG}{BF}=\frac{1}{3}$，

∴ $\frac{EG}{AG}=\frac{1}{3}$，

如图，作 $AI\perp BC$，垂足为点 I，连接 AF，



∵ $AB=AF$，

∴ $BI=IF$，

设 $AB=x$，$BI=a$，则 $AG=\frac{3}{4}x$，$IC=5a$，

∵ $AB=AF$

∴ $\angle ABG=\angle AFH$，

$\because AB = AF$，$\angle ABG = \angle AFH$，$BG = HF$，

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle AFH(\text{SAS})$，

$\therefore AG = AH = \frac{3}{4}x$，

$\therefore AC = 2AH = \frac{3}{2}x$，

由勾股定理得 $AI^2 = AB^2 - BI^2 = x^2 - a^2$，$AI^2 = AC^2 - CI^2 = \frac{9}{4}x^2 - 25a^2$，

$\therefore x^2 - a^2 = \frac{9}{4}x^2 - 25a^2$，

$\therefore \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{30}}{24}$，

$\therefore \cos\angle ABC = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{30}}{24}$，

$\therefore \cos\angle ABC = \frac{\sqrt{30}}{24}$．

5.（2024·上海静安二模 25）如图 1，$\triangle ABC$ 中，已知 $AB = 6, BC = 9, \angle B$ 为锐角，$\cos\angle ABC = \frac{1}{3}$．

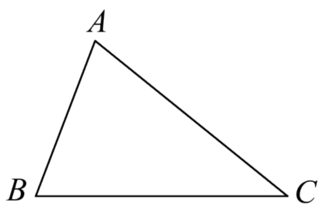


图1

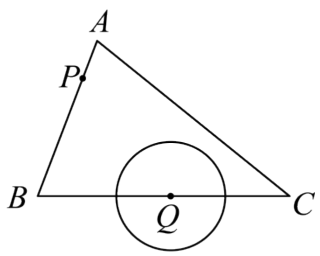


图2

（1）求 $\sin C$ 的值；

（2）如图 2，点 P 在边 AB 上，点 Q 是边 BC 的中点，$\odot P$ 经过点 A，$\odot P$ 与 $\odot Q$ 外切，且 $\odot Q$ 的直径不大于 BC，设 $\odot P$ 的半径为 x，$\odot Q$ 的半径为 y，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域；

（3）在第（2）小题条件下，连接 PQ，如果 $\triangle BPQ$ 是等腰三角形，求 AP 的长．

【答案】（1）$\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　（2）$y = \sqrt{x^2 - 9x + \frac{153}{4}} - x, \left(1 \le x < \frac{17}{4}\right)$

（3）AP 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3

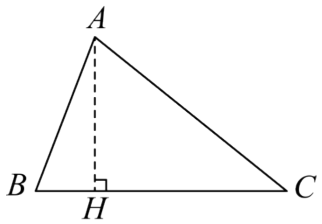
【分析】（1）构建直角三角形，根据$\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$，得出$BH=2$，根据勾股定理，得出$AH=4\sqrt{2}$，然后$\mathrm{Rt}\triangle ACH$，$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=9$，再运用正弦的定义列式计算，即可作答.

（2）设$\odot P$的半径为x，$\odot Q$的半径为y，作图，根据已有的条件得出$BP=6-x$，$BQ=\frac{1}{2}BC=\frac{9}{2}$，$BG=\frac{1}{3}(6-x)$，结合勾股定理，得出$PG=2\sqrt{2}(6-x)$，$GQ=\frac{5}{2}+\frac{1}{3}x$，在$\mathrm{Rt}\triangle PGQ$中，$PQ=\sqrt{PG^2+GQ^2}$，代入数值进行计算，即可作答.

（3）因为$\triangle BPQ$是等腰三角形，所以进行分类讨论，分为$BQ=BP$，$BQ=PQ$以及$BP=PQ$，结合等腰三角形的性质以及线段的和差运算，列式作答即可.

【小问 1 详解】

解：过点A作$AH\perp BC$



$\because AB=6,\angle B$为锐角，$\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$.

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ABH$，$\cos\angle ABC=\frac{BH}{AB}=\frac{1}{3}$

解得$BH=2$

$\therefore AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$

$\because BC=9$

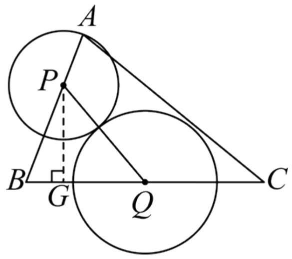
$\therefore HC=BC-BH=9-2=7$

$\therefore$在$\mathrm{Rt}\triangle ACH$，$AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=\sqrt{32+49}=9$

$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ACH$，$\sin C=\frac{AH}{AC}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$；

【小问 2 详解】

解：如图：



∵$\odot P$与$\odot Q$外切，设$\odot P$的半径为x， $\odot Q$的半径为y

∴ $PQ=x+y$

∵ $AB=6$,

∴ $BP=6-x$,

∵ $BC=9$， 点Q是边BC的中点

∴ $BQ=\frac{1}{2}BC=\frac{9}{2}$

过点P作$PG\perp BC$于点G

∵ $\cos\angle ABC=\frac{1}{3}$

∴ $BG=\frac{1}{3}(6-x)$,

则

$PG=\sqrt{BP^2-BG^2}=\sqrt{9BG^2-BG^2}=2\sqrt{2}BG=2\sqrt{2}(6-x)$, $GQ=\frac{9}{2}-\frac{1}{3}(6-x)=\frac{5}{2}+\frac{1}{3}x$

在$\mathrm{Rt}\triangle PGQ$中， $PQ=\sqrt{PG^2+GQ^2}$

则 $x+y=\sqrt{\frac{8}{9}(6-x)^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{3}x\right)^2}=\sqrt{x^2-9x+\frac{153}{4}}$

∴ $y=\sqrt{x^2-9x+\frac{153}{4}}-x$

当$y=\frac{9}{2}$时， 则$\frac{9}{2}=\sqrt{x^2-9x+\frac{153}{4}}-x$， 得出$x=1$；

当$y=0$时， 则$0=\sqrt{x^2-9x+\frac{153}{4}}-x$， 得出$x=\frac{17}{4}$；

∵ $y>0$

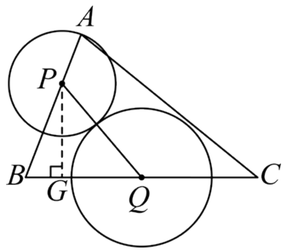
$\therefore x<\frac{17}{4}$

则 $y=\sqrt{x^2-9x+\frac{153}{4}}-x,\left(1\le x<\frac{17}{4}\right)$

【小问 3 详解】

解：$\because$ $\triangle BPQ$ 是等腰三角形，

$\therefore$ 当 $BQ=BP$ 时，$6-x=\frac{9}{2}$，$AP=x=\frac{3}{2}$



$\therefore$ 当 $BQ=PQ$ 时，$\angle BPQ=\angle B=\angle A,$，

则 $PQ\parallel AC$，

$\because$ 点 Q 是边 BC 的中点，

$\therefore$ 点 P 是边 AB 的中点，

$\therefore AP=\frac{1}{2}AB=3$，

$\therefore$ 当 $BP=PQ$ 时，$PG\perp BG$，

此时 $BQ=2BG$

$\therefore \frac{2}{3}(6-x)=\frac{9}{2}$

解出 $x=-\frac{3}{4}<0$（舍去）

综上：$\triangle BPQ$ 是等腰三角形，AP 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3

6.（2024·上海闵行二模 25）如图，OB 是 $\odot O$ 的半径，弦 AB 垂直于弦 BC，点 M 是弦 BC 的中点，过点 M 作 OB 的平行线，交 $\odot O$ 于点 E 和点 F.