第二章　函数的概念与基本初等函数

2．5　指数与指数函数

内容索引

考试要求

1．通过对有理数指数幂 $a^{\frac{m}{n}}$ $(a>0$，m，n 为正整数，且 $n>1)$、实数指数幂 $a^x(a>0$，$x\in\mathbf{R})$含义的认识，了解指数幂的拓展过程，掌握指数幂的运算性质．

2．通过具体实例，了解指数函数的实际意义，理解指数函数的概念．探索并理解指数函数的单调性与特殊点．

第一部分

必备知识　回顾

课前预习·基础回扣

1．根式

(1)如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根；

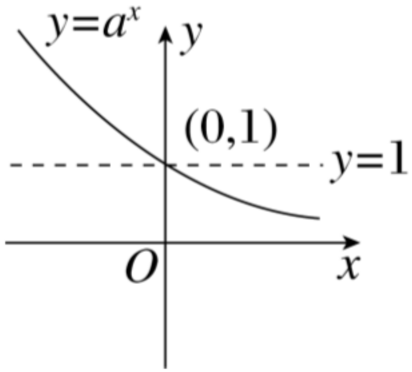
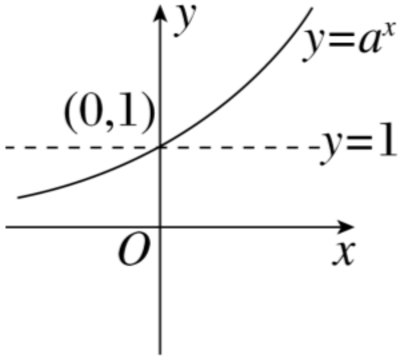
(2)式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做<u>根式</u>，其中 n 叫做根指数，a 叫做被开方数；

(3) $(\sqrt[n]{a})^n=a$. 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, & a\geq 0,\\ -a, & a<0.\end{cases}$

2．有理数指数幂

概念	正分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$	$a>0$，m，$n\in\mathbf{N}^*$，$n>1$
	负分数指数幂：$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	
	0 的正分数指数幂等于 0,0 的负分数指数幂没有意义	
运算性质	$a^r\cdot a^s=a^{r+s}$	$a>0$，$b>0$，r，$s\in\mathbf{Q}$
	$(a^r)^s=a^{rs}$	
	$(ab)^r=a^rb^r$	

3.指数函数的概念、图象与性质

	$y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$	
	$0<a<1$	$a>1$
图象		
图象特征	在 x 轴上方，过定点(0,1)	
	当 x 逐渐增大时，图象逐渐下降	当 x 逐渐增大时，图象逐渐上升

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">$y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">性质</td><td>定义域</td><td colspan="2">**R**</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0，+\infty)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>递减</td><td>递增</td></tr>
<tr><td rowspan="2">函数变化规律</td><td colspan="2">当 $x=0$ 时，$y=1$</td></tr>
<tr><td>当 $x<0$ 时，$y>1$；当 $x>0$ 时，$0<y<1$</td><td>当 $x<0$ 时，$0<y<1$；当 $x>0$ 时，$y>1$</td></tr>
</table>

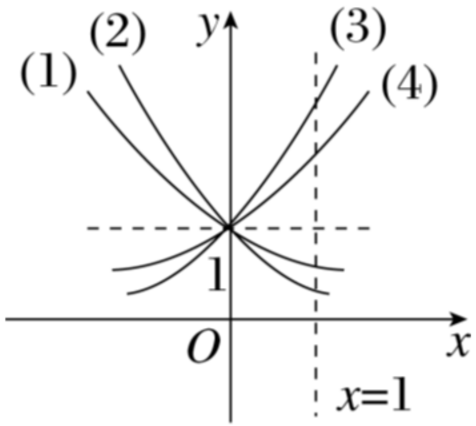
常用结论与知识拓展

1．指数函数图象的画法

画指数函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$的图象，应抓住三个关键点：$(1，a)$，$(0,1)$，$\left(-1，\frac{1}{a}\right)$.

2．指数函数的图象与底数大小的比较

如图是指数函数(1)$y=a^x$，(2)$y=b^x$，(3)$y=c^x$，(4)$y=d^x$的图象，底数a，b，c，d与1之间的大小关系为$c>d>1>a>b>0$.在第一象限内，指数函数$y=a^x(a>0$，且$a\neq 1)$的图象越高，底数越大．



基础检测

1．判断下列命题是否正确，正确的在括号内画“√”，错误的画“×”．

(1)$\sqrt[n]{a^n}=(\sqrt[n]{a})^n=a$.(×)

(2)$(-1)^{\frac{2}{4}}=(-1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-1}$.(×)

(3)函数 $y=ax^2+1(a>1)$的值域是$(0，+\infty)$．(×)

(4)若 $a^m<a^n(a>0$，且 $a\neq1)$，则 $m<n$.(×)

(5)函数 $y=a^{-x}$是 **R** 上的增函数.(×)

2．(教材改编题)比较下列各组值的大小：

(1)$3^{0.3}$__<__$3^{0.7}$；

(2)$0.99^{-0.1}$__>__$0.99^{0.1}$.

3．(教材改编题)若函数 $y=(k+2)a^x+2-b(a>0$，且 $a\neq 1)$是指数函数，则 $k=$__-1__，$b=$__2__.

解析： 根据指数函数的定义，得

$\begin{cases} k+2=1, \\ 2-b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=2. \end{cases}$

4．(教材改编题)计算$\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=$__$2\sqrt{2}$__.

解析： $\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})^3}+\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}=1+\sqrt{2}+|1-\sqrt{2}|=2\sqrt{2}$.

5．(多选题)设 $a\in\mathbf{R}$，n，$m\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geq 2$，则下列等式中一定正确的是(AD)

A．$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　B．$(a^n)^m=a^{m+n}$

C．$\sqrt[n]{a^n}=a$　　D．$(\sqrt[n]{a})^n=a$

解析： 由指数幂的运算公式可得 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，$(a^n)^m=a^{mn}$，$(\sqrt[n]{a})^n=a$，所以 A，D 正确，B 错误；对于 C，当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$，当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|$，所以 C 错误，故选 AD.

第二部分

关键能力　提升

课堂探究·考点精讲

【例 1】　(1)化简 $a\cdot\sqrt{-\frac{1}{a}}=$(　B　)

A. $\sqrt{-a}$　　B. $-\sqrt{-a}$

C. $-\sqrt{a}$　　D. $\sqrt{a}$

解析: 因为 $\sqrt{-\frac{1}{a}}$ 有意义，所以 $a<0$，所以 $a=-\sqrt{a^2}$，所以 $a\cdot\sqrt{-\frac{1}{a}}=-\sqrt{a^2}\times\sqrt{-\frac{1}{a}}$ $=-\sqrt{a^2\times\left(-\frac{1}{a}\right)}=-\sqrt{-a}$.

(2)已知 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，求下列各式的值：

①$a+a^{-1}$；②a^2+a^{-2}.

解：①将 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$两边平方，

得 $a+a^{-1}+2=5$，

即 $a+a^{-1}=3$.

②将 $a+a^{-1}=3$ 两边平方，得 $a^2+a^{-2}+2=9$，即 $a^2+a^{-2}=7$.

规律总结

1．根式的化简问题要注意指数幂中当指数为负数时，可把底数变为其倒数，从而指数化为正数．

2．指数幂运算的一般原则

(1)有括号的先算括号里的，无括号的先算指数运算．

(2)先乘除后加减，负指数幂化成正指数幂的倒数．

(3)底数是负数，先确定符号；底数是小数，先化成分数；底数是带分数的，先化成假分数．

(4)若是根式，应化为分数指数幂，尽可能用幂的形式表示，运用指数幂的运算性质来解答．

【对点训练 1】 (1)(2022·重庆一中模拟)已知 $x<0$，$y>0$，化简$\sqrt[4]{9x^8y^4}$得(B)

A．$-\sqrt{3}x^2y$　　B．$\sqrt{3}x^2y$

C．$-3x^2y$　　D．$3x^2y$

解析： 由题意得$\sqrt[4]{9x^8y^4}=9^{\frac{1}{4}}(x^8)^{\frac{1}{4}}(y^4)^{\frac{1}{4}}=\sqrt{3}x^2|y|=\sqrt{3}x^2y$.

(2)计算：$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{(4ab^{-1})^{3}}}{0.1^{-1}\cdot(a^{3}\cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}}}=$ $\underline{\frac{8}{5}}$ $(a>0，b>0)$.

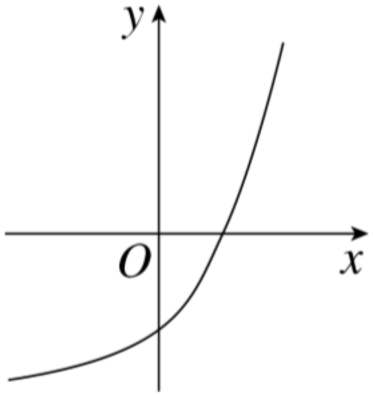
解析： 原式$=\frac{2\cdot 4^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}{10a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{3}{2}}}=\frac{8}{5}$.

【例 2】　(1)(多选题)若函数 $y=a^x+b-1(a>0$，且 $a\neq1)$的图象经过第一、三、四象限，则下列选项中正确的有(AD)

A．$a>1$　　　　B．$0<a<1$

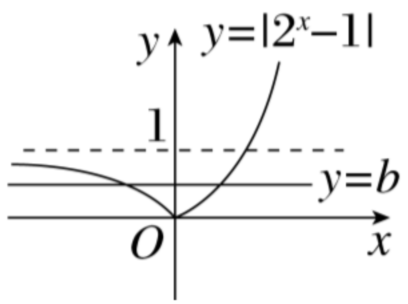
C．$b>0$　　　　D．$b<0$

解析：因为函数 $y=a^x+b-1(a>0$，且 $a\neq1)$的图象经过第一、三、四象限，所以其大致图象如图所示．由图象可知函数为增函数，所以 $a>1$，当 $x=0$ 时，$y=1+b-1=b<0$，故选 AD．



(2)若函数 $y=|2^x-1|$ 的图象与直线 $y=b$ 有两个公共点，则 b 的取值范围为__(0,1)__.

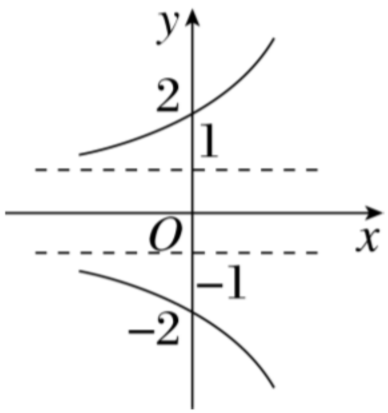
解析：作出曲线 $y=|2^x-1|$ 的图象与直线 $y=b$ 如图所示．由图象可得 b 的取值范围是 $(0,1)$．



【一题多变】 (1)(变条件，变设问)将本例(2)改为若函数 $y=|2^x-1|$在$(-\infty, k]$上单调递减，则 k 的取值范围为<u>$(-\infty, 0]$</u>.

解析： 因为函数 $y=|2^x-1|$的单调递减区间为$(-\infty, 0]$，所以 $k\leqslant 0$，即 k 的取值范围为$(-\infty, 0]$.

(2)(变条件)将本例(2)改为若曲线$|y|=2^x+1$与直线$y=b$没有公共点，则b的取值范围为____$[-1,1]$____.



解析：作出曲线$|y|=2^x+1$的图象，如图所示，要使该曲线与直线$y=b$没有公共点，只需$-1\leqslant b\leqslant 1$.

规律总结

有关指数函数图象问题的解题思路

(1)已知函数解析式判断其图象，一般是取特殊点，判断选项中的图象是否过这些点，若不满足则排除.

(2)对于有关指数型函数的图象问题，一般是从最基本的指数函数的图象入手，通过平移、伸缩、对称变换而得到. 特别地，当底数 a 与 1 的大小关系不确定时应注意分类讨论.

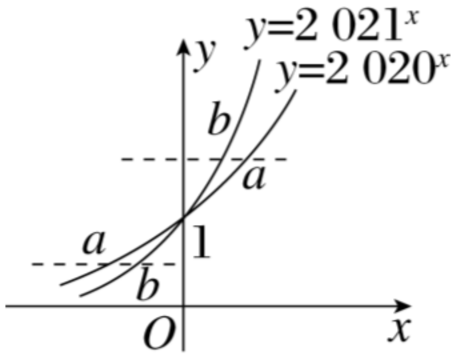
(3)有关指数型方程、不等式问题的求解，往往是利用相应的指数型函数图象，数形结合求解.

(4)根据指数函数图象判断底数大小的问题，可以通过直线 $x=1$ 与图象的交点进行判断.

【对点训练 2】　(1)已知实数 a，b 满足等式 $2\ 020^a=2\ 021^b$，下列五个关系式：①$0<b<a$；②$a<b<0$；③$0<a<b$；④$b<a<0$；⑤$a=b=0$.其中不可能成立的关系式有(　B　)

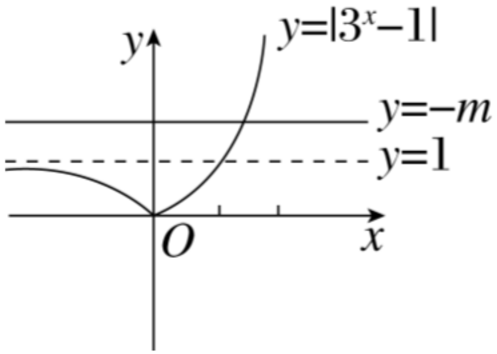
A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

解析：如图，观察易知 a，b 的关系式①$0<b<a$；②$a<b<0$；⑤$a=b=0$ 可能成立；③$0<a<b$，④$b<a<0$ 不可能成立.



(2)如果函数 $y=|3^x-1|+m$ 的图象不经过第二象限，则实数 m 的取值范围是 $\underline{(-\infty，-1]}$.

解析：在同一平面直角坐标系中画出 $y=|3^x-1|$与 $y=-m$ 的图象，如图所示．由函数 $y=|3^x-1|+m$ 的图象不经过第二象限，则 $y=|3^x-1|$与 $y=-m$ 在第二象限没有交点，由图象知 $-m\geq1$，即 $m\leq-1$.



考点3　指数函数的性质及应用

命题角度 1　比较指数式的大小

【例 3】　(2020·全国Ⅱ卷)若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，则(　A　)

A．$\ln(y-x+1)>0$

B．$\ln(y-x+1)<0$

C．$\ln|x-y|>0$

D．$\ln|x-y|<0$

解析： 由 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$，得 $2^x-3^{-x}<2^y-3^{-y}$，即 $2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x<2^y-\left(\frac{1}{3}\right)^y$. 设 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$，则 $f(x)<f(y)$．因为函数 $y=2^x$ 在 **R** 上为增函数，$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上为增函数，所以 $f(x)=2^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 **R** 上为增函数，则由 $f(x)<f(y)$，得 $x<y$，所以 $y-x>0$，所以 $y-x+1>1$，所以 $\ln(y-x+1)>0$，故选 A.

规律总结

利用指数函数的函数性质比较大小，最重要的是“同底”原则，利用单调性比较大小，比较大小还可以借助中间量，常用 0,1.