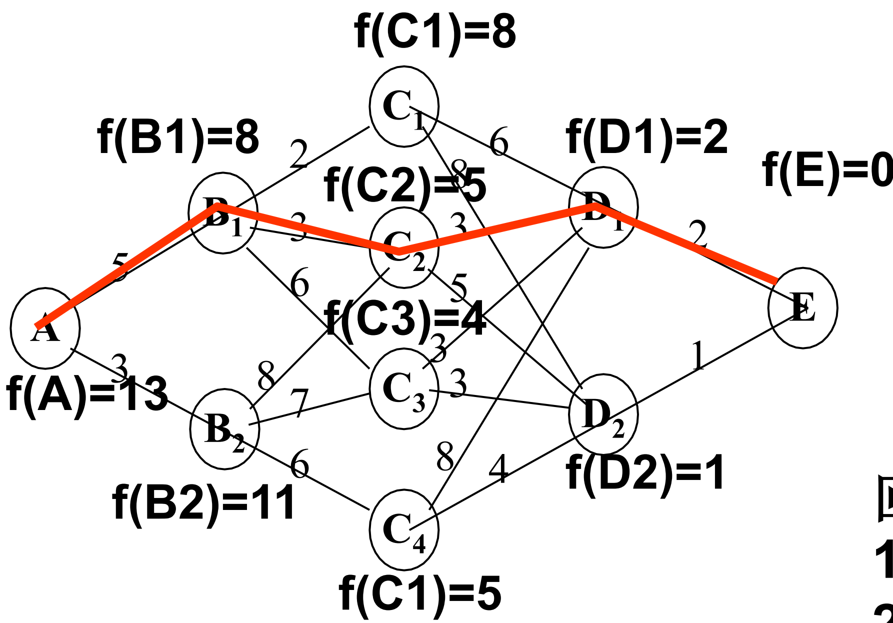
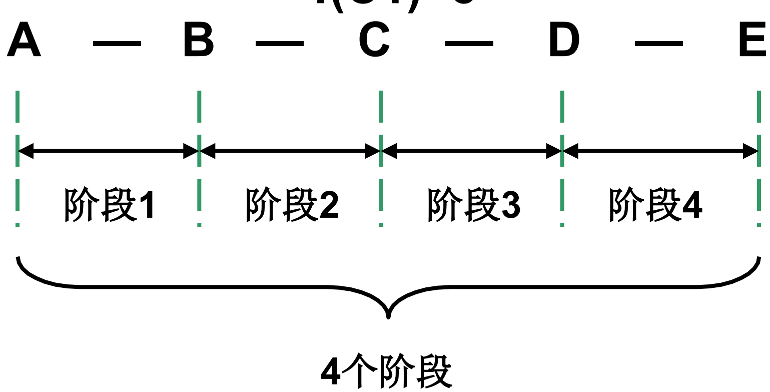
管理运筹学课件第9章-动态规划

[引例] 马车驿站问题





一共有2×3×2×1=12条不同的路线

阶段	起点	终点		
1	A	B1 B2		
2	B1	C1 C2 C3		
	B2	C2 C3 C4		
	C1	D1	C1→D1	2

回顾分析过程:

1.将分析对象划分成4阶段;

2.每阶段始点状态与终点状态有关,而不考虑始终点状态如何形成(无记忆性);

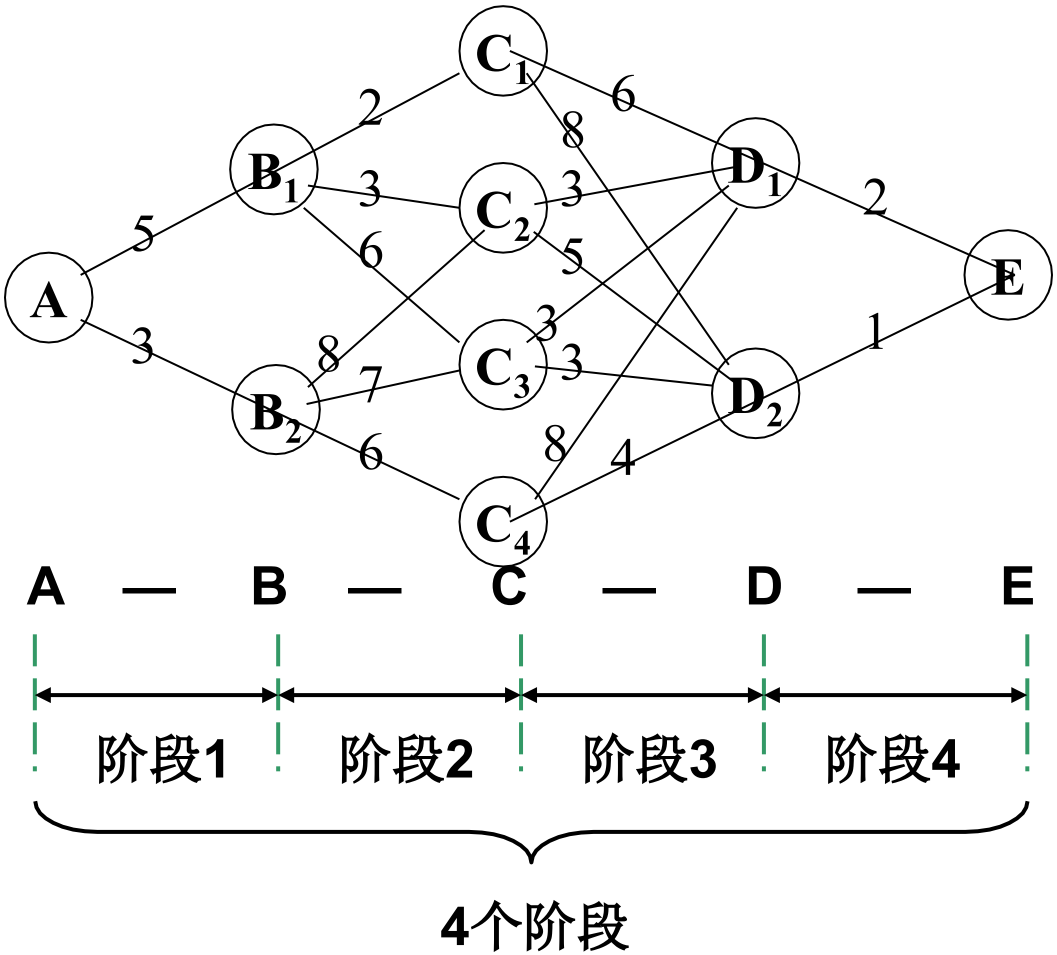
3.每阶段各始点状态为终点状态与始点至终点距离之和的最小值(状态转移)

这种最优化方法称为动态规划, 由美国数学家贝尔曼等人于20世纪50年代创立.

本章主要内容

- 9.1 动态规划的概念和原理
- 9.1.1 动态规划的基本概念
- 9.1.2 动态规划的最优化原理
- 9.2 动态规划的模型和求解
- 9.2.1 动态规划模型的建立
- 9.2.2 动态规划问题的解法
- 9.3 应用举例
- 案例1 资源分配问题
- 案例2 设备负荷问题
- 案例3 生产库存问题
- 案例4 背包问题
- 本章小结

9.1.1 动态规划的基本概念



6.指标函数

用来衡量所实现过程优劣的一种数量指标。其基本方程有加法和乘法两种形式，通常加法形式用的较多，其公式为：

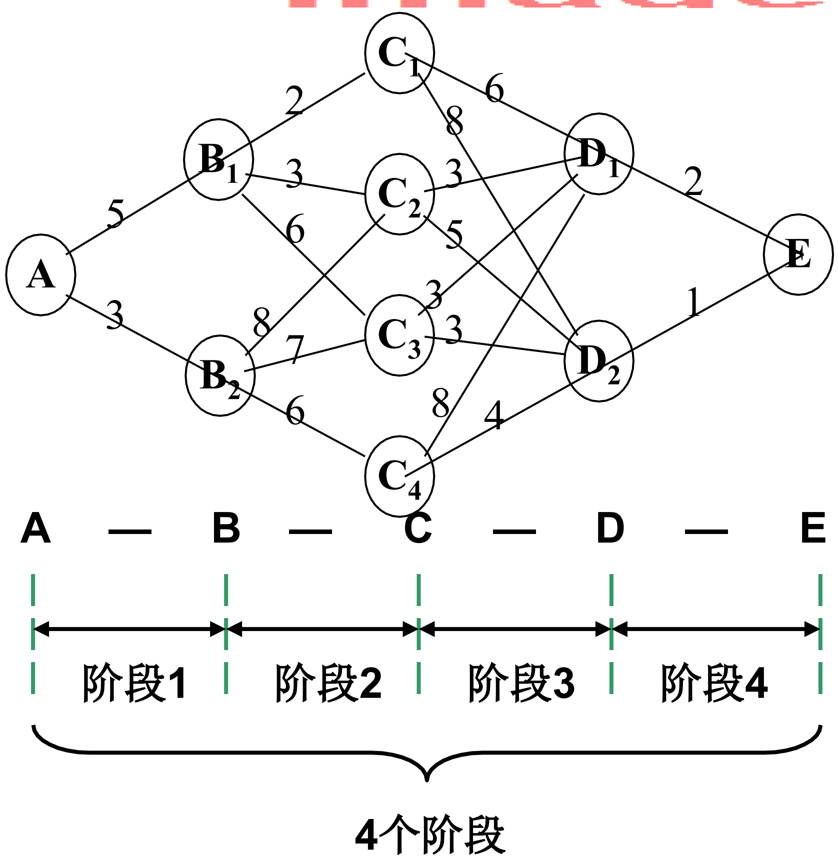
$$V_{k,n}(s_k,x_k,s_{k+1},\dots,s_{n+1})=\sum_{i=1}^{n} v_i(s_i,x_i)$$

7.边界条件

起始或终止条件。

Back

5.1.2 动态规划的基本原理



设f(i)表示从点i到终点E的最短距离,d(i,j)表示点i,j之间的距离.

显然$f(E)=0$,为该问题的边界条件.

k=4 原理

$f(D_1)=f(E)+d(D_1,E)=0+2=2$

k=3 $f(D_1)=2$ 决策：D1→E

$f(D_2)=f(E)+d(D_2,E)=0+1=1$

$f(C_3)=\min\left\{f(D_1)+d(C_3,D_1), \ldots\right\}$ E

k= $f(C_4)=\min\left\{f(D_1)+d(C_4,D_1), \ldots\right\}$

$f(C_2)+d(B_1,C_2)$ 1

k=1 $f(A)=13$ 决策：A→B1

13,

D1 $f(A)=\min\left\{f(B_1)+d(A,B_1), \ldots\right\}$ D2

最短路线:A→B1→C2→D1→E

最短路长:13

程。

$f(B_2)=11$ 决策：B2→C3

5.1.2 动态规划的最优化原理

一般情况，k 阶段与 $k+1$ 阶段的递推关系式可写为

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \underset{x_k \in D_k(s_k)}{\text{opt}} \{v_k(s_k, x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\} & k = n, n-1, \cdots, 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1}) = 0 & \end{cases} \quad \text{式 9.1}$$

这种递推关系式 5.1 称为动态规划的基本方程，后一个等式称为边界条件。

现在把动态规划的基本思想总结如下。

(1) 动态规划方法的关键在于正确写出基本的递推关系式和恰当的边界条件。要做到这点，必须先将问题的过程分成几个相互联系的阶段，恰当地选取状态变量和决策变量及定义最优指标函数，从而把一个大问题化为一族同类型的子问题，然后逐个求解。

(2) 在多阶段决策过程中，动态规划方法是既把当前一个阶段和未来各阶段分开，又把当前效益和未来效益结合起来考虑的一种最优化方法。

(3) 在求整个问题的最优策略时，由于初始状态是已知的，而每个阶段的决策都是该阶段状态的函数。故最优策略所经过的各阶段状态便可逐次变换得到，从而确定了最优路线。

9.2.1 动态规划模型的建立

【例 9.1】 设某公司有某种原料，其数量为 a，用于生产 n 种产品。若分配数量 x_i 用于生产第 i 种产品，其收益为 $g_i(x_i)$，问应如何分配，才能使生产 n 种产品的总收入最大？

解 把生产第k种产品看成是第k阶段，划分为n个阶段.

设 s_k表示第k阶段初资源可用量（状态变量）

x_k表示分配给第k阶段资源的数量（决策变量），显然有：

$D_k(s_k)=\{x_k \mid 0\le x_k \le s_k\}$ 允许决策集合

$s_{k+1}=s_k-x_k$ （状态转移方程） $s_1=a$ （边界条件）

指标函数： $V_{k,n}=\sum_{i=k}^{n} g_i(x_i)$

若$fk(sk)$表示数量为sk资源分配给第k种产品时，从第k阶段到第n阶段总收益，则有：

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}\{g_k(x_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)\}, k<n \\ f_n(s_n)=\max\limits_{x_n\le s_n}\{g_n(x_n)\} \end{cases}$$

策问题，并利用动态规划的递推关系来求解。

9.2.1 动态规划模型的建立

一般的，给一个实际问题建立动态规划模型时，必须做到下面五点。

(1) 将问题的过程划分成适当的阶段。

(2) 正确选择状态变量 s_k，使它既能描述过程的演变，又满足无后效性。

(3) 确定决策变量 x_k 及每阶段的允许决策集合 $D_k(s_k)$。

(4) 正确写出状态转移方程即 $s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)$。

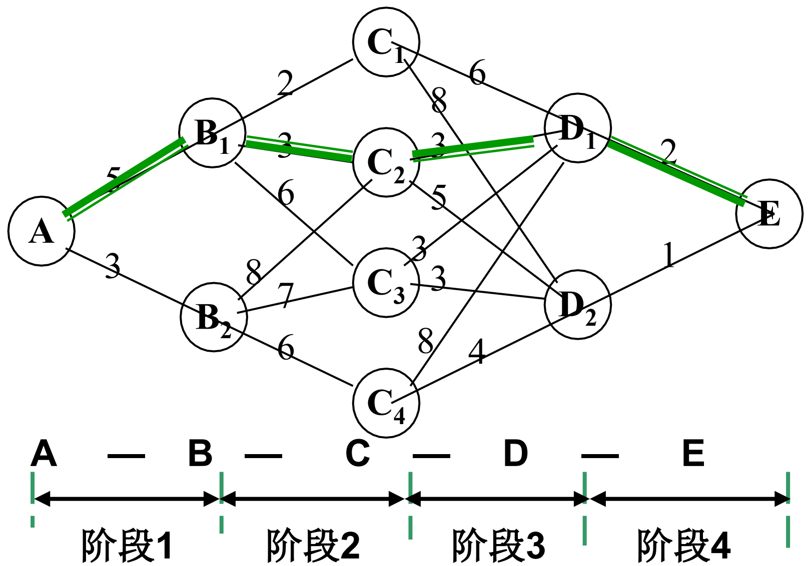
(5) 正确写出指标函数 $V_{k,n}$ 的关系。

指标函数通常有两种形式：加法形式和乘法形式。

$$V_{k,n}=\sum_{i=k}^{n}g_i(x_i) \qquad V_{k,n}=\prod_{i=k}^{n}g_i(x_i)$$

9.2.2 动态规划问题的解法:逆序法

最优值函数f(k):从k阶段到E的最短距离；阶段指标函数,即该阶段选择不同路线的距离。从后向前推。



$S_1=\{A\}$

$S_2=\{B_1,B_2\}$

$S_3=\{C_1,C_2,C_3,C_4$

$\}$

$S_4=\{D_1,D_2\}$

$S_5=\{E\}$

$f_5(E)=0$

$$f_4(D_1)=\min\{d(D_1,E)+f_5(E)\}=2+0=2$$

同理 $f_4(D_1)=2, f_4(D_2)=1$

$$f_3(C_1)=\min\begin{Bmatrix} d(C_1,D_1)+f_4(D_1) \\ d(C_1,D_1)+f_4(D_1) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 6+2 \\ 8+1 \end{Bmatrix}=8$$

同理

$f_3(C_2)=5, f_3(C_3)=4, f_3(c_4)=5$

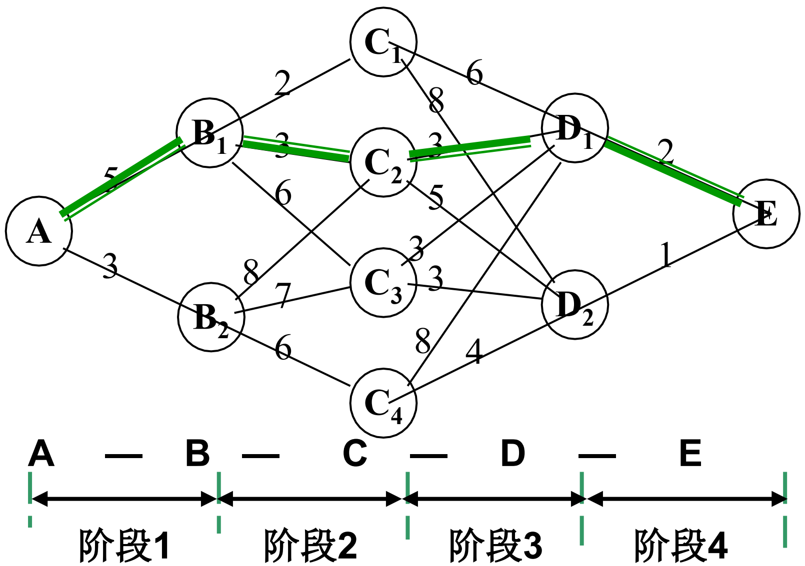
$$f_2(B_1)=\min\begin{Bmatrix} d(B_1,C_1)+f_3(C_1) \\ d(B_1,C_2)+f_3(C_2) \\ d(B_1,C_3)+f_3(C_3) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 2+8 \\ 3+5 \\ 6+4 \end{Bmatrix}=8$$

同理 $f_2(B_2)=11$

$$f_1(A)=\min\begin{Bmatrix} d(A,B_1)+f_2(B_1) \\ d(A,B_2)+f_2(B_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 5+8 \\ 3+11 \end{Bmatrix}=13$$

9.2.2 动态规划问题的解法:顺序法

最优值函数f(k):从A到k阶段的最短距离；阶段指标函数,即该阶段选择不同路线的距离。从前向后推。



$S_0=\{A\}$

$S_1=\{B_1,B_2\}$

$S_2=\{C_1,C_2,C_3,C_4$

$\}$

$S_3=\{D_1,D_2\}$

$S_4=\{E\}$

最优值函数:

$f_0(A)=0$

$$f_1(B_1)=\min\{d(B_1,A)+f_0(A)\}=5+0=5$$

$f_1(B_1)=5, f_2(B_2)=3$

$$f_2(C_1)=\min\{d(B_1,C_1)+f_1(B_1)\}=\min\{2+5\}=7$$

$f_2(C_1)=7, f_3(C_2)=8, f_3(C_3)=10, f_3(c_4$

$)=9$

$$f_3(D_1)=\min\begin{Bmatrix} d(C_1,D_1)+f_2(C_1) \\ d(C_2,D_1)+f_2(C_2) \\ d(C_3,D_1)+f_2(C_3) \\ d(C_4,D_1)+f_2(C_4) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 6+7 \\ 3+8 \\ 3+10 \\ 8+9 \end{Bmatrix}=11$$

$f_3(D_1)=11, f_4(D_2)=13$

$$f_4(E)=\min\begin{Bmatrix} d(D_1,E)+f_3(D_1) \\ d(D_2,E)+f_3(D_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 2+11 \\ 1+13 \end{Bmatrix}=13$$

Back

案例1 资源分配问题

5台设备分配给3个工厂，盈利表如下，如何分配可使获利最大?

台数 / 工厂	0	1	2	3	4	5
甲	0	4	8	11	11	11
乙	0	5	9	11	12	12
丙	0	3	7	9	11	12

分析 3个工厂看成3个阶段.

阶段变量 $k(k=1,2,3)$；

状态变量 s_k表示为分配给第k个工厂至第n个工厂的设备台数；

决策变量x_k 表示分配给第k个工厂的设备台数；

则有$s_{k+1}=s_k-x_k$;

$P_k(x_k)$表示为xk 台设备分配到第k个工厂所得赢利值；

$f_k(s_k)$表示为 台设备分配给第k个工厂至第n个工厂所得到的最大赢利值。

则有:

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0\le x_k \le s_k} [P_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)] & k = 3,2,1 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

	0	1	2	3	4	5
甲	0	4	8	11	11	11
乙	0	5	9	11	12	12
丙	0	3	7	9	11	12

$$s_{k+1} = s_k - x_k$$

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} [P_k(x_k) + f_{k+1}(s_k - x_k)] & k = 3,2,1 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

Back

k=3

s_3 \ x_3	$P_3(x_3)$: 0	1	2	3	4	5	$f_3(s_3)$	x_3^*
0	0						0	0
1		3					3	1
2			7				7	2
3				9			9	3
4					11		11	4
5						12	12	5

k=2

s_2 \ x_2	$P_2(x_2)+f_3(s_2-x_2)$: 0	1	2	3	4	5	$f_2(s_2)$	x_2^*
0	0						0	0
1	0+3	5+0					5	1
2	0+7	5+3	9+0				9	2
3	0+9	5+7	9+3	11+0			12	1, 2
4	0+11	5+9	9+7	11+3	12+0		16	2
5	0+12	5+11	9+9	11+7	12+3	12+0	18	2，3

k=1

s_1 \ x_1	$P_1(x_1)+f_2(s_1-x_1)$: 0	1	2	3	4	5	$f_1(s_1)$	x_1^*
5	0+18	4+16	8+12	11+9	11+5	11+0	20	1, 2, 3

方案一:1, 2, 2　方案二:2, 1, 2　方案三:2, 2, 1　方案四:3, 2, 0