第 1 章 思考题与习题

参考答案

1-1　什么是传感器？它由哪几个部分组成？各部分有什么作用？

解：传感器是能感受被测量（stimulus/measurand）并按照一定规律转换成可用输出信号的器件或装置，通常由敏感元件（sensing element）和转换元件（transducing element）组成。

传感器主要由：由敏感元件和转换元件两部分组成。敏感元件直接感受或响应被测量，转换元件将敏感元件感受或响应的被测量转换成能够用于传输和处理的电信号。只由敏感元件和转换元件两部分组成的传感器的输出信号往往较弱，需要在基本组成部分后面加上一个信号调理电路。

信号调理电路的作用：一是把来自转换元件的信号进行转移和放大，使得信号适合进一步传输和处理；二是对信号进行滤波、调制或解调、数字化处理等，使得信号更容易传输、处理、记录和显示等。

1-2　传感器的共性是什么？

解：所有传感器都有着相同的特点：就是利用物理定律或物质的各种特性，将非电量（流量、压力、温度、加速度等）转换成电量（电压、电流、电容、电荷等）输出。当输出的信号为标准信号（例如电信号 DDZ-III标准：是指 4～20mA 的直流电流信号和 1～5V 的直流电压信号），此时传感器叫作变送器（transmitter）。

1-3　传感器有哪几种分类方式？

解：传感器可以按照输入量（被测量）、输出量（输出信号）、工作原理、基本效应、物理现象、能量变换关系、转换过程是否可逆、是否使用电源、所含技术特征、尺寸大小、存在形式等进行分类。

1-4　改善传感器的技术途径有哪些？

解：差动技术；平均技术；补偿与修正技术；屏蔽、隔离与干扰抑制；稳定性处理；零示法、微差法和闭环技术。

1-5　简述传感器技术的发展趋势。

解：传感器无线化、微型化、集成化、网络化、智能化、虚拟化、安全化。

1-6　什么是检测技术？传感器和检测技术的联系是什么？

解：没有传感器就没有现代科学技术。以传感器为核心的检测系统就像神经和感官一样， 源源不断地向人类提供宏观与微观世界的种种信息，成为人们认识自然、改造自然的有力工具。传感器检测技术作为信息科学的一个重要分支，与计算机技术、自动控制技术和通信技术等构成了信息技术的完整学科。检测技术是多门学科和多种技术的综合应用技术，涉及信息论、数理统计、电子学、光学、精密机械、传感技术、计量测试技术、自动化技术、微电子技术和计算机应用技术等学科知识。

第 2 章 思考题与习题

参考答案

2-1 什么是传感器的静态特性？主要指标有哪些？

解：传感器的静态特性是指被测量的值处于稳定状态时的输出与输入的关系。主要指标：线性度、迟滞、重复性、灵敏度与灵敏度误差、分辨率与阈值、稳定性、温度稳定性、静态误差、多种抗干扰能力等。

2-2 怎样判别阶跃幅值？怎样判别响应时间？

解：阶跃幅值是输入信号为阶跃输入时发生瞬间的幅值变化量，响应时间是系统响应在接近最终稳态值的 2%或 5%误差内所需的时间。

2-3 一组输入输出数据如表 2-1 所示，使用最小二乘法拟合直线并求出非线性误差。

x	100	110	120	130	140	150	160
y	138.50	142.29	146.06	149.82	153.58	157.31	161.04

解：由表可知将测量范围分为了 6 等份，N=7，N 为实际标准测试点，可得到 x^2 和 xy 如下表所示：

x^2	10000	12100	14400	16900	19600	22500	25600
xy	13850	15651.9	17527.2	19476.6	21501.2	23596.5	25766.4

计算对应的 x 和 y 值：

$$\Sigma X=910，\Sigma Y=1048.6，\Sigma X^2=121100，\Sigma XY=137369.8$$

根据最小二乘法公式：

$$b=\frac{\sum x_i{}^2\sum y_i-\sum x_i\sum x_i y_i}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}=100.9664$$

$$k=\frac{n\sum x_i y_i-\sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2}=0.3756$$

$$\Delta L=y-(0.3756x+100.9664)$$

可得：

x	100	110	120	130	140	150	160
y	138.50	142.29	146.06	149.82	153.58	157.31	161.04
ΔL	-0.0264	0.0076	0.0216	0.0256	0.0296	0.0036	-0.0224

最大非线性误差为：

$$\Delta L_{\max}=0.0296$$

根据最小二乘法公式：

最小二乘法拟合的相对非线性误差：

$$\delta_L=\frac{\Delta L_{\max}}{y_{FS}}\times 100\%=\frac{0.0296}{161.04-138.50}\times 100\%=0.1313\%$$

2-4 什么是传感器的动态特性？主要指标有哪些？

解：传感器的动态特性是指输入量随时间变化时传感器的响应特性。主要指标：时间常数，延迟时间，上升时间，峰值时间，超调量，衰减比。

2-5 一温度传感器（仪表）的微分方程为 8dy/dt+3y=6x，x 为输入的温度（℃）。

①求此温度传感器的时间常数与灵敏度。

②将此传感器从冰水混合物中取出，开始测量 26℃的室温，写出其输出 y 的阶跃响应表达式。

解：①一阶传感器的标准微分方程为：

$$T\frac{dy}{dt}+y=Kx$$

将$8\frac{dy}{dt}+3y=6x$两边同时除以3得，$T=\frac{8}{3}$，$S_n=2$

②$A=26-0=26C^{\circ}$，$\therefore y=52\left(1-e^{\frac{3t}{8}}\right)$

2-6 一温度传感器是一阶传感器，时间常数是 3s，从恒定室温 20℃环境中取出，去测量 100℃的沸水，试求：

①当开始测量 0s 时，温度指示是多少℃？

②列出传感器输出解析式，计算当开始测量 9s 时的温度测量误差是多少？

③若有 2s 响应滞后，开始测量 8s 时的温度指示是多少？

解：①当开始测量 0s 时，温度指示是 20℃。

②$A=100-20=80°C$，$T=3s$，令y对应温度指示值，$\therefore y=20+80\left(1-e^{\frac{t}{3}}\right)$

$\therefore$ 开始测量$9s$时，$y=20+80（1-e-3）=96°C$，测量误差$\Delta=96-100=-4°C$

③ 若有$2s$响应滞后，$t=8-2=6s=2T\therefore y=20+80（1-e^{-2}）=89.2°C$

2-7 试分析计算一阶传感器的阶跃响应的动态误差和稳定时间。

解：令$k=1$，设阶跃信号为单位阶跃信号$A=1$，$y_0=0$，$.\ y=1-e^{\frac{t}{T}}$

$\therefore$ 动态测量误差$\Delta=（1-e^{-\frac{t}{T}}）-1=-e^{-\frac{t}{T}}$，$\therefore\delta=-\frac{e^{-\frac{t}{T}}}{1}\times100\%$

如在$|\delta|\leq a$时视作已进入稳态：则有$\frac{e^{-\frac{t}{T}}}{1}\times100\%=a$，解得$t=t_1$，

$\therefore t\geq t_1$时视作已进入稳定时间。

2-8 用某一阶传感器测量 150Hz 的正弦信号，如要求幅值误差限制在±3%以内，时间常数应取多少？如果用该传感器测量 100Hz 的正弦信号，其幅值误差和相位误差各为多少？

解：①$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$，$\left|\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}-1\right|\leq3\%$，又$\omega=2\pi f=300\pi$

可解得：$0\leq T\leq0.266ms$

②取$T=0.266ms$，$\omega=2\pi f=200\pi$

幅值误差：$\Delta A(\omega)=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}-1}{1}\times100\%=-1.368\%$，$\therefore-1.368\%\leq\Delta A(\omega)\leq0$

相位误差：$\Delta\varphi(\omega)=-\arctan(\omega T)=-9.488°$，$-9.488°\leq\Delta\varphi(\omega)<0$

2-9 在什么条件下，一阶传感器和二阶传感器的输出 $y(t)$再现输入 $x(t)$的波形？

解： 设ω为信号频率，ω_n为传感器的固有频率

对一阶传感器，

$\omega T << 1$时，输出y（t）再现输入x（t）的波形；

对二阶传感器

$\frac{\omega}{\omega_n} << 1$时，输出$y$（$t$）再现输入$x$（$t$）的波形。

第 3 章 思考题与习题

参考答案（部分）

3-3　将 200Ω 电阻应变片贴在弹性试件上，试件截面积 $A=0.4\times10^{-4}\text{m}^2$，弹性模量 $E=2.5\times10^{1}\text{N/m}^2$，若由 5×10^4N 的拉力引起电阻变化为 2Ω，求该电阻应变片的灵敏系数。

解：$\varepsilon=\dfrac{\Delta L}{L}=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F}{AE}=\dfrac{5\times10^4}{0.4\times2.5\times10^{-4}\times10^{11}}=0.005$，$\dfrac{\Delta R}{R}=K\varepsilon$

$\therefore K=\dfrac{\Delta R}{R\varepsilon}=\dfrac{2}{200\times0.005}=2$

3-4　一个量程为 20kN 的筒式力传感器，其弹性元件为薄壁圆筒，轴向受力，外径 25mm，内径 20mm，在其表面粘贴 8 个电阻应变片，4 个沿轴向粘贴，4 个沿周向（径向）粘贴，电阻应变片的电阻值均为 200Ω，灵敏度为 2.0，泊松比为 0.3，材料弹性模量为 $2.5\times10^{11}\text{N/m}^2$。

①绘出弹性元件贴片位置及全桥电路；

②当桥路的供电电压为 12V 时，计算桥路的输出电压；

③在满量程时，计算传感器各电阻应变片的阻值变化。

解：$A=\pi(25^2-20^2)\times10^{-6}=7.01\times10^{-4}m^2$

$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}=\frac{\sigma}{E}=\frac{F}{AE}=\frac{2\times10^4}{7.01\times2.5\times10^{-4}\times10^{11}}=0.000114$$

$$\Delta U=\frac{U(1+\mu)}{2}K\varepsilon=\frac{12}{2}\times2.0\times(1+0.3)\times0.000114=0.0018\text{V}$$

轴向粘贴各电阻应变片：

$$\Delta R_x=K\varepsilon R=2.0\times0.000114\times200=0.0456\Omega$$

周向（径向）粘贴，电阻应变片：

$$\Delta R_y=-\mu K\varepsilon R=-0.3\times2.0\times0.000114\times200=-0.0137\Omega$$

$$U_o=\frac{U}{2}K(1+\mu)\frac{F}{AE}=\frac{12}{2}\times2.0\times(1+0.3)\times\frac{10\times10^3}{128.23\times10^{-6}\times2.0\times10^{11}}=0.00608V$$

3-5　某测重力的等强度悬臂梁，受到重力（向下的拉力）1×10^5N，力的作用面积为 $A=0.5\times10^{-4}\text{m}^2$，$E=4\times10^{11}\text{N/m}^2$。将金属电阻应变片（灵敏系数 $K=4$）贴装在梁上，连接成电桥电路，电源电压 $U=10$V。问：

①单臂电桥输出电压值（不需要考虑温度影响）是多少？是否存在非线性误差？

②如果应变片贴装为差动半桥输出，输出电压、非线性误差又是多少？

解：$\varepsilon=\dfrac{\Delta L}{L}=\dfrac{\sigma}{E}=\dfrac{F}{AE}=\dfrac{1\times10^5}{0.5\times4\times10^{-4}\times10^{11}}=0.005$

$$\frac{\Delta R}{R}=K\varepsilon=4\times0.005=0.02$$

单臂电桥输出：

$U_o=\dfrac{U}{4}\dfrac{\Delta R}{R}=\dfrac{10}{4}\times0.02=0.05\text{V}$，存在非线性误差，不为 0。

差动半桥输出：

$U_o=\dfrac{U}{2}\dfrac{\Delta R}{R}=\dfrac{10}{2}\times0.02=0.1\text{V}$，非线性误差为 0。

3-6　设电阻应变片 R_1 的灵敏系数 $K=2.0$，未受应变时，$R_1=150\Omega$。当试件受力 F 时，电阻应变片承受平均应变值 $\varepsilon=500\mu\text{m/m}$。

①求电阻应变片的电阻变化量 ΔR_1 和电阻相对变化量 $\Delta R_1/R_1$；

②将电阻应变片 R_1 置于单臂测量电桥，电桥电源电压为直流 3V，求电桥输出电压及其非线性误差；

③如果要减小非线性误差，应采取何种措施？分析其电桥输出电压及非线性误差的大小。

解：$\dfrac{\Delta R_1}{R_1}=K\varepsilon=2.0\times0.5\times10^{-3}=0.001$，$\Delta R_1=\varepsilon R_1=0.001\times150=0.15\Omega$

$U_o=\dfrac{U}{4}\dfrac{\Delta R_1}{R_1}=\dfrac{3}{4}\times0.001=0.00075\text{V}$，$\gamma=\dfrac{\Delta R_1/R_1}{2+\Delta R_1/R_1}=\dfrac{0.001}{2+0.001}=0.0005$

采用差动半桥或差动全桥，电压输出为 0.0015V 或 0.003V，无非线性误差。（为 0）

3-7 电阻式传感器电桥中，负载电阻为无穷大，E=8V，$R_1=R_2=R_3=R_4=120\Omega$。计算分析：

①若 R_1 为应变片，灵敏度 1.5，其余为外接电阻。R_1 贴在弹性试件上，试件横截面积 $A=5\times10^{-5}\text{m}^2$，弹性模量 $E=8\times10^{10}\text{N/m}^2$，若受到 1.2×10^{5}N 拉力的作用，电桥输出电压 Uo 是多少？

②假定此为 4 只规格型号相同且属于同一批次的应变片，用于等强度梁式传感器测力系统中，要求用 2 只电阻应变片来测量被测参数，另 2 只实现温度补偿但不产生应变，画出 4 只应变片在悬臂梁上的粘贴位置及测量电桥。

解：$U_o=\dfrac{U}{4}\dfrac{\Delta R_1}{R_1}=\dfrac{UK}{4}\dfrac{F}{AE}=\dfrac{8}{4}\times1.5\times\dfrac{1.2\times10^5}{5\times8\times10^{-5}\times10^{10}}=0.09\text{V}$

$U_o=\dfrac{U}{2}\dfrac{\Delta R_1}{R_1}=\dfrac{UK}{2}\dfrac{F}{AE}=\dfrac{8}{2}\times1.5\times\dfrac{1.2\times10^5}{5\times8\times10^{-5}\times10^{10}}=0.18\text{V}$

第 4 章 思考题与习题

参考答案（部分）

4-2 一个平板电容式传感器放置在相对介电常数 ε_r=1.2 的气体环境中，结构如图 4-5（a）所示，其中 a=12mm、b=18mm，两极板间距 d=2mm。测量时，一块极板在原始位置上向左平移了 3mm，求该传感器的电容变化量、电容相对变化量和位移灵敏度 K。

解：$\Delta C=\dfrac{\varepsilon A}{d}-\dfrac{\varepsilon A_1}{d}=\dfrac{\varepsilon\left(A-A_1\right)}{d}=\dfrac{\varepsilon\Delta A}{d}=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r b\,\Delta x}{d}$

$$=\frac{1.2\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.018\times 0.003}{0.002}=2.8674\times 10^{-13}\mathrm{F}$$

$$C_0=\frac{\varepsilon A}{d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r ba}{d}=\frac{1.2\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.018\times 0.012}{0.002}=1.14696\times 10^{-12}\mathrm{F}$$

$$\Delta=\frac{\Delta C}{C_0}=\frac{2.8674\times 10^{-13}}{1.14696\times 10^{-12}}=0.25=25\%$$

$$K=\frac{\Delta C}{\Delta d}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r b\,\Delta x}{d}\frac{1}{\Delta x}=\frac{1.2\times 8.85\times 10^{-12}\times 0.018}{0.002}=9.558\times 10^{-11}\,\mathrm{F/m}$$

4-3 有一个直径为 2.5m、高 6m 的铁桶，往桶内连续注水，液面高度应留 10%的余量。分析用电阻应变式传感器和电容式传感器来解决此问题的方法。

解：当未注入液体时的初始电容为：

$$C_0=\frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln(D/d)}$$

注液体后总电容量为：

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0(H-h)}{\ln(D/d)}+\frac{2\pi\varepsilon_1 h}{\ln(D/d)}=\frac{2\pi\varepsilon_0 H}{\ln(D/d)}+\frac{2\pi(\varepsilon_1-\varepsilon_0)h}{\ln(D/d)}=C_0+kh$$

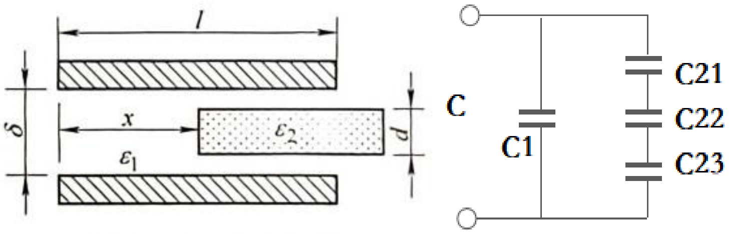
在这种情况下，采用圆筒形电容式传感器，实现测量。

电阻应变片测量，见 54 页（3-64）方案

4-5 如图 4-31 所示，变介电常数型电容式位移传感器的特性方程 $C=f(x)$。设真空的介电常数为 ε_0，图中相对介电常数 $\varepsilon_2>\varepsilon_1$，极板宽度为 W。其他参数如图 4-31 所示。

①推导变介电常数型电容式位移传感器的特性方程 $C=f(x)$；证明被测介质在电容极板间位置产生上下平移，不影响 $C=f(x)$的表达式。

②设 δ=3mm、d=1mm，极板为正方形（边长 50mm），ε_1=1、ε_2=4。在 x=0～60mm 范围内，计算 $C=f(x)$表达式并绘出 C 与 x 之间的特性曲线。



解：如图所示，C21、C22、C23 串联为 C2，然后与 C1 并联。

$C_2=1/\dfrac{1}{C_{21}}+\dfrac{1}{C_{22}}+\dfrac{1}{C_{23}}=1/\dfrac{2}{C_{21}}+\dfrac{1}{C_{22}}$，$C_{21}=C_{23}=\dfrac{\varepsilon_1 S_2}{(\delta-d)/2}$，$C_{22}=\dfrac{\varepsilon_2 S_2}{d}$

$\therefore C=1/\left(\dfrac{\delta-d}{\varepsilon_1 S_2}+\dfrac{d}{\varepsilon_2 S_2}\right)=\dfrac{S_2}{(\delta-d)/\varepsilon_1+d/\varepsilon_2}$，$C=C_1+C_2=\dfrac{wx}{\delta/\varepsilon_1}+\dfrac{w(l-x)}{(\delta-d)/\varepsilon_1+d/\varepsilon_2}$

带入数据即可，或采用例 4-4 计算方法。并采用 MATLAB 绘图。

4-6 某电容测微仪，其传感器的圆形极板半径 r=5mm，工作初始间隙 d=0.4mm，问：

①工作时，如果传感器与工件的间隙变化 Δd=2μm 时，电容变化量是多少？

②如果改进为差动结构，传感器与工件的间隙变化量 Δd=±2μm 时，电容变化量是多少？

解：$C_0=\dfrac{\varepsilon A}{d_0}=\dfrac{8.85\times10^{-12}\times\pi\times0.005^2}{0.0004}=1.73769\times10^{-12}F$

$C_1=\dfrac{\varepsilon A}{d_0-\Delta d}=\dfrac{8.85\times10^{-12}\times\pi\times0.005^2}{0.0004-0.000002}=1.74643\times10^{-12}F$

$C_2=\dfrac{\varepsilon A}{d_0+\Delta d}=\dfrac{8.85\times10^{-12}\times\pi\times0.005^2}{0.0004+0.000002}=1.72905\times10^{-12}F$

$\Delta C=C_1-C_2=1.74643\times10^{-12}-1.72905\times10^{-12}=0.01738\times10^{-12}F$

第 5 章 思考题与习题

参考答案（部分）

4-4 根已知变气隙厚度电感式传感器的铁芯截面积 S=1cm^2，磁路长度 L=16cm，相对磁导率 μ_r=4000，气隙初始厚度 δ_0=0.6cm，$\Delta\delta$==0.1mm，真空磁导率 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$（H/m），线圈匝数 N 为 2000，求单线圈式传感器的灵敏度 $\Delta L/\Delta\delta$。若将其做成差动结构，灵敏度将如何变化？

解：$\Delta L = L_0\dfrac{\Delta\delta}{\delta_0}$ ，$K=\dfrac{\Delta L}{\Delta\delta}=\dfrac{L_0}{\delta_0}$

$$L_0=\frac{N^2\mu_0 A_0}{2\delta_0}=\frac{2000^2\times4\pi\times10^{-7}\times1\times10^{-4}}{1.2\times10^{-2}}=0.0419\,(H)$$

$$K=\frac{L_0}{\delta_0}=\frac{0.0419}{0.6\times10^{-2}}=6.983$$

若将其做成差动结构，$K=6.983\times2=13.967$

4-5 有一只差动电感传感器，如图 5-31 所示。已知电源电压 U=10V，f=600Hz，传感器线圈电阻与电感分别为 R=60Ω，L=40mH，用两只匹配电阻设计成四臂等阻抗电桥以获得最大输出电压灵敏度，试求：

①匹配电阻的值为多少时才能使输出电压灵敏度达到最大？

②当$\Delta Z=20\Omega$时，分别接成单臂和差动电桥后的输出电压值。

解：①$|Z|=(r^2+W^2L^2)^{\frac{1}{2}}$，将$r=60$，$W=2\pi\times600$，$L=40\times10^{-3}$

代入计算得：$R=162.29(\Omega)$，要使灵敏度最大，需构成等臂电桥，

则：匹配电阻$R_3=R_4=|Z|$为162.29Ω

②单臂：$U_o=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{\Delta Z}{Z}\times E=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{20}{162.29}\times10=0.308\text{V}$

差动：$U_o=0.308\times2=0.616\text{V}$

4-6 变气隙型电感式传感器如图 5-32 所示，铁芯截面为边长 5mm 的正方形，气隙厚度δ为 0.6mm，衔铁最大位移$\Delta\delta$=±0.03mm，激励线圈匝数为 3000，若忽略漏磁及铁损，空气磁导率$\mu_0=4\pi\times10^{-7}(H/m)$。求：

①线圈的电感值；

②线圈电感的最大变化量。

解：①$L_0=\dfrac{N^2\mu_0A_0}{2\delta_0}=\dfrac{3000^2\times4\pi\times10^{-7}\times25\times10^{-6}}{2\times0.6\times10^{-3}}=0.2353\,(H)$

②$L_+=\dfrac{N^2\mu_0A_0}{2\delta_1}=\dfrac{3000^2\times4\pi\times10^{-7}\times25\times10^{-6}}{2\times0.63\times10^{-3}}=0.2241\,(H)$

$$L_-=\frac{N^2\mu_0A_0}{2\delta_2}=\frac{3000^2\times4\pi\times10^{-7}\times25\times10^{-6}}{2\times0.57\times10^{-3}}=0.2477\,(H)$$

$.\ \Delta L_{\max}=L_--L_+=0.2477-0.2241=0.0236\,(H)$

4-7 某液位需要检测波动状况，采用电感式传感器进行测量，如图 5-33 所示，液面浮球与传感器铁芯连接。液位处于理想位置时，铁芯位于中间位置；液面上升带动铁芯上移， 液面下降带动铁芯下移，铁芯位置变化引起的电感量变化与液面变化近似成正比。假如液 面相对理想位置的变化为 x，则 $\Delta L=kx$，试计算液位为理想位置及液位上升下降时的传感器输出值。注：对于差动式结构，$\Delta Z_1=\Delta Z_2$，$\Delta L_1=\Delta L_2$，$\Delta L=\Delta L_1+\Delta L_2$

解：$U_o=\frac{Z_2}{Z_1+Z_2}U-\frac{U}{2}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}\times\frac{U}{2}$

①液面为理想位置，铁芯处于中间位置$Z_1=Z_2$，则$U_0=0$

②液面上升，铁芯上移，$Z_1=Z_0+\Delta Z_1$，$Z_2=Z_0-\Delta Z_2$

· $\Delta Z_1=\Delta Z_2$，$\Delta L_1=\Delta L_2$，$\Delta L=\Delta L_1+\Delta L_2$

. $U_0=\frac{-U}{2}\times\frac{\Delta Z_1}{Z_0}=\frac{-U}{2}\times\frac{\Delta L_1}{L_0}=-\frac{U\Delta L}{4L_0}$

$=-\frac{kxU}{4L_0}$

③液面下降，铁芯下移，$Z_1=Z_0-\Delta Z_1$，$Z_2=Z_0+\Delta Z_2$

∵ $\Delta Z_1=\Delta Z_2$，$\Delta L_1=\Delta L_2$，$\Delta L=\Delta L_1+\Delta L_2$

∴ $U_0=\frac{U}{2}\times\frac{\Delta Z_1}{Z_0}=\frac{U}{2}\times\frac{\Delta L_1}{L_0}=\frac{U\Delta L}{4L_0}$

$=\frac{kxU}{4L_0}$