湖南省长沙市望城区第二中学2024-2025学年高一上学期11月期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合$A=\left\{x\mid x^2-x-2=0\right\}$，$B=\left\{x\mid x^2=1\right\}$则$A\cap B=$

A．$\{-1\}$　　B．$\{-1,1\}$　　C．$\{-1,2\}$　　D．$\{2\}$

2．已知集合$A=\left\{x\mid x^2-5x+6\le 0\right\}$，集合$B=\left\{x\mid |2x-1|>3\right\}$，则集合$A\cap B=$

A．$\{x\mid 2\le x\le 3\}$　　B．$\{x\mid 2\le x<3\}$

C．$\{x\mid 2<x\le 3\}$　　D．$\{x\mid -1<x<3\}$

3．设函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x+1,x\le 0\\ 2^x,x>0\end{cases}$，则$f\left(f\left(-2\right)\right)=$（　）

A．-8　　B．-6　　C．6　　D．8

4．已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\ge 1\\ 2^{x-1},x<1\end{cases}$，若$f(2x-2)\ge f\left(x^2-x+2\right)$，则实数$x$的取值范围是

A．$[-2,1]$　　B．$\left[1,+\infty\right)$　　C．R　　D．$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

5．$0.4^{0.5}$，$0.5^{0.4}$，$\log_{0.5}0.4$的大小关系为

A．$0.4^{0.5}<0.5^{0.4}<\log_{0.5}0.4$　　B．$0.5^{0.4}<0.4^{0.5}<\log_{0.5}0.4$

C．$\log_{0.5}0.4<0.4^{0.5}<0.5^{0.4}$　　D．$\log_{0.5}0.4<0.5^{0.4}<0.4^{0.5}$

6．设正实数a，b，c分别满足$a\cdot e^a=b\cdot\ln b=c\cdot\lg c=1$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　）

A．$a>b>c$　　B．$b>c>a$　　C．$c>b>a$　　D．$a>c>b$

7．已知$f(x)$为定义在R上的偶函数，$g(x)=f(x)+x^2$，且当$x\in(-\infty,0]$时，$g(x)$单调递增，则不等式$f(x+1)-f(x+2)>2x+3$的解集为（　）

A．$(\frac{3}{2},+\infty)$　　B．$(-\infty,3)$　　C．$(-\infty,-3)$　　D．$(-\frac{3}{2},+\infty)$

8．设集合$A=\{a\mid\exists x\in R,a^x=\log_a x\,(a>1)\}$，$B=\{y\mid\forall x\ge 0,xy\ge\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})\}$

，下列说法正确的是（　）

A．$A\subseteq B$　　B．$B\subseteq A$　　C．$B\cap A=\varnothing$　　D．$B\cup A\neq\varnothing$

二、多选题

9．下列函数中最小值为4的是（　）

A．$y=x^2+2x+5$　　B．$y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$

C．$y=2^x+2^{2-x}$　　D．$y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$

10．19世纪时期，数学家们处理大部分数学对象都没有完全严格定义，数学家们习惯借助直觉和想象来描述数学对象，德国数学家狄利克雷（Dirichlet）在1829年给出了著名函数：$D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q_C\end{cases}$（其中$Q$为有理数集，$Q_C$为无理数集），后来人们称之为狄利克雷函数，狄利克雷函数的出现表示数学家们对数学的理解发生了深刻的变化，数学的一些“人造”特征开始展现出来，这种思想也标志着数学从研究“算”转变到了研究“概念、性质、结构”．一般地，广义狄利克雷函数可以定义为$f(x)=\begin{cases}a & x\in Q\\ b & x\in Q_C\end{cases}$（其中$a,b\in\mathrm{R}$且$a<b$），则下列说法正确的是（　）

A．$\forall x\in\mathbf{R}$都有$D(f(x))=1$

B．函数$f(x)$和$D(x)$均不存在最小正周期

C．函数$D(f(x))$和$f(D(x))$均为偶函数

D．存在三点A,B,C在$D(x)$图像上，使得$\triangle ABC$为正三角形，且这样的三角形有无数个

11．已知函数$f(x)$对任意$a,b\in\mathrm{R}$，都有$f(2a)+f(2b)=2f(a+b)f(a-b)$，且$f(1)\neq 0$，则函数$f(x)$的图像（　）

A．经过坐标原点

B．与曲线$y=a^x(a>0$且$a\neq 1)$经过相同的定点

C．关于原点对称

D．关于y轴对称

12．已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f\left(x+y\right)\cdot f\left(x-y\right)=f^{2}\left(x\right)-f^{2}\left(y\right),f\left(1\right)=2,f\left(x+1\right)$为偶函数，则（　）

A．$f\left(3\right)=2$

B．$f\left(x\right)$为奇函数

C．$f\left(2\right)=0$

D．$\sum\limits_{k=1}^{2024}f(k)=0$

三、填空题

13．集合$A=\left\{3,2^{a}\right\}$，$B=\left\{a,b\right\}$，若$A\cap B=\{2\}$，则$A\cup B=$______.

14．函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$的定义域均为R，且$y=f\left(3+3x\right)$为偶函数，$y=g\left(x+3\right)+2$为奇函数，对$\forall x\in\mathbf{R}$，均有$f\left(x\right)+g\left(x\right)=x^{2}+1$，则$f\left(7\right)g\left(7\right)=$_____.

15．已知二次函数$y=f(x)$的图像为开口向下的抛物线，且对任意$x\in\mathrm{R}$都有$f(1-x)=f(1+x)$．若向量$\vec{a}=(\sqrt{m},-1)$，$\vec{b}=(\sqrt{m},-2)$，则满足不等式$f(\vec{a}\cdot\vec{b})>f(-1)$的$m$的取值范围为______.

四、解答题

16．画出函数$y=\dfrac{1}{(x+1)^{2}}$的图象.

17．已知函数$f\left(x\right)=|x-1|+|x+2|$.

（1）求不等式$f\left(x\right)\leq 5$的解集；

（2）若不等式$f\left(x\right)\geq x^{2}-ax+1$的解集包含$\left[-1,1\right]$，求实数$a$的取值范围.

18．已知函数$f\left(x\right)=\left|3x-2\right|-kx$.

（1）若$k=1$，求不等式$f\left(x\right)\leq 3\left|x-1\right|$的解集；

（2）设函数$f\left(x\right)$的图象与x轴围成的封闭区域为Ω，证明：当$2<k<3$时，Ω的面积大于$\dfrac{16}{15}$.

19．已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，值域为$(0,+\infty)$，且对任意m，$n\in\mathbf{R}$，都有

$f\left(m+n\right)=f\left(m\right)f\left(n\right)$． $\varphi\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x\right)+1}$.

(1)求 $f\left(0\right)$ 的值，并证明 $\varphi\left(x\right)$ 为奇函数.

(2)若 $x>0$ ， $f\left(x\right)>1$ ，且 $f\left(3\right)=4$ ，证明 $f\left(x\right)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，并解不等式 $\varphi\left(x\right)>\dfrac{15}{17}$.

20．对于函数 $f\left(x\right)\left(x\in D\right)$ ，若存在正常数 T ，使得对任意的 $x\in D$ ，都有 $f\left(x+T\right)\geq f\left(x\right)$ 成立，我们称函数 $f\left(x\right)$ 为"T 同比不减函数".

（1）求证：对任意正常数 T ， $f\left(x\right)=x^2$ 都不是"T 同比不减函数"；

（2）若函数 $f\left(x\right)=kx+\sin x$ 是"$\dfrac{\pi}{2}$ 同比不减函数"，求 k 的取值范围；

（3）是否存在正常数 T ，使得函数 $f\left(x\right)=x+\left|x-1\right|-\left|x+1\right|$ 为"T 同比不减函数"，若存在，求 T 的取值范围；若不存在，请说明理由.

21．设 n 是不小于 3 的正整数，集合 $S_n=\{(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)\,|\,a_i\in\{0,1\},\ i=1,2,\ldots,\ n\}$ ，对于集合 Sn 中任意两个元素 $A=(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)$， $B=(b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n)$ ．定义

$A\cdot B=\ n-\left(\left|a_1-b_1\right|+\left|a_2-b_2\right|+\cdots+\left|a_n-b_n\right|\right)$. 若 $A\cdot B=0$ ，则称 A，B 互为相反元素，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

(1)若 n=3，A=（0，1，0），B=（1，1，0），试写出 $\overline{A}$ ， $\overline{B}$ ，以及 $A\cdot B$ 的值；

(2)若 A，$B\in S_n$ ，证明： $A\cdot B+\overline{A}\cdot B=n$ ；

(3)设 k 是小于 n 的正奇数，至少含有两个元素的集合 $M\subseteq S_n$ ，且对于集合 M 中任意两个不同的元素 $A=$（a_1，a_2，…，a_n）， $B=(b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n)$ ，都有 $A\cdot B=n-k$ ，试求集合 M 中元素个数的所有可能的取值.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	D	D	A	C	D	D	AC	BCD
题号	11	12								
答案	BD	BCD								

1．A

【分析】分别求出 A 与 B 中方程的解集确定出 A 与 B，找出两集合的交集即可．

【详解】解：由 A 中方程解得：$x=-1$ 或 $x=2$，

即 $A=\{-1,2\}$，

由 B 中方程解得：$x=-1$ 或 $x=1$，

即 $B=\{-1,1\}$，

则 $A\cap B=\{-1\}$．

故选 A．

【点睛】此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2．C

【详解】试题分析：因为 $A=\{x\,|\,x^2-5x+6\le 0\}=[2,3]$，$B=\{x\,|\,|2x-1|>3\}=$

$(2,+\infty)\cup(-\infty,-1)$

所以 $A\cap B=\{x\,|\,2<x\le 3\}$．

考点：交集及其运算

点评：本题以一元不等式及绝对值不等式为载体考查交集运算，关键是准确解出不等式，再利用数轴得出要求交集．

3．D

【解析】直接根据分段函数解析式，代入计算可得；

【详解】解：因为 $f(x)=\begin{cases}-x+1,x\le 0\\ 2^x,x>0\end{cases}$，所以 $f(-2)=-(-2)+1=3$，$f(f(-2))=f(3)=2^3=8$

故选：D

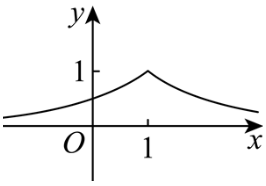
【点睛】本题考查分段函数求函数值，属于基础题．

4．D

【分析】由函数$f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\ge 1\\2^{x-1},x<1\end{cases}$，的表达式即可判断 f（x）是关于 x=1 对称的函数，利用单调性可得 x 的不等式求解即可.

【详解】由题画出函数$f(x)=\begin{cases}2^{1-x},x\ge 1\\2^{x-1},x<1\end{cases}$的图像如图所示，故$\left|2x-2-1\right|\le\left|x^2-x+2-1\right|$，即$\left|2x-3\right|\le\left|x^2-x+1\right|$，解得$x$的取值范围是$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$

故选 D



【点睛】本题考查函数的对称性和单调性，考查绝对值不等式的解法，考查计算能力是基础题

5．A

【分析】由题意利用对数函数的单调性和特殊点，指数函数的单调性，判断 $0.4^{0.5}$，$0.5^{0.4}$，$\log_{0.5}0.4$ 的大小关系.

【详解】∵$\log_{0.5}0.4>\log_{0.5}0.5=1$，$0.5^{0.4}>0.5^{0.5}=\sqrt{\frac{1}{2}}\in$（0，1），$0.4^{0.5}=\sqrt{0.4}=\sqrt{\frac{2}{5}}\in$（0，1），

而$\sqrt{\frac{1}{2}}>\sqrt{\frac{2}{5}}$，

∴$\log_{0.5}0.4>0.5^{0.4}>0.4^{0.5}$，

故选 A.

【点睛】本题考查利用指数函数、对数函数、幂函数的单调性比较大小，考查逻辑推理的核心素养.

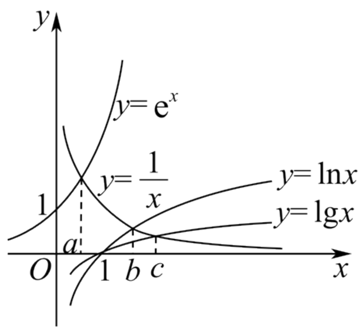
6．C

【分析】分别作出函数$y=\mathrm{e}^x$，$y=\ln x$，$y=\lg x$图像，根据三个图像分别与函数$y=\frac{1}{x}$图像交点情况比较大小.

【详解】由$a\cdot\mathrm{e}^a=b\cdot\ln b=c\cdot\lg c=1$，

得$\frac{1}{a}=\mathrm{e}^a$，$\frac{1}{b}=\ln b$，$\frac{1}{c}=\ln c$，

分别作函数 $y=\mathrm{e}^x$， $y=\ln x$， $y=\lg x$ 图像，如图所示，



它们与函数 $y=\frac{1}{x}$ 图像交点的横坐标分别为 a， b， c，

有图像可得 $a<b<c$，

故选：C.

7．D

【分析】先根据函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性证得函数 $g\left(x\right)$ 为偶函数，然后构造函数利用函数的单调性解得不等式.

【详解】由题意，函数 $f(x)$ 为定义在R上的偶函数，且 $g(x)=f(x)+x^2$，

则 $g\left(-x\right)=f\left(-x\right)+(-x)^2=f\left(x\right)+x^2=g\left(x\right)$，

所以函数 $g\left(x\right)$ 为偶函数，其图象关于 y 轴对称，

当 $x\in(-\infty,0]$ 时， $g(x)$ 单调递增，所以当 $x\in(0,+\infty)$ 是函数 $g\left(x\right)$ 单调递减，

又由 $g(x+1)=f(x+1)+(x+1)^2=f\left(x+1\right)+x^2+2x+1$

$g(x+2)=f(x+2)+(x+2)^2=f\left(x+2\right)+x^2+4x+4$，

所以不等式 $f(x+1)-f(x+2)>2x+3$ 等价与 $g\left(x+1\right)>g\left(x+2\right)$，

所以 $|x+1|<|x+2|$，平方得 $x^2+2x+1<x^2+4x+4$，解得 $x>-\frac{3}{2}$

即不等式 $f(x+1)-f(x+2)>2x+3$ 的解集为 $(-\frac{3}{2},+\infty)$.

故选：D.

【点睛】本题主要考查函数的奇偶性及单调性的综合，意在考查学生的数形结合思想及数学运算的学科素养，属中档题.

8．D

【分析】利用因为$y=a^x$与$y=\log_a x$互为反函数，所以，互相关于$y=x$对称，得到$a^x\le x$，进而得出集合A的范围；对于集合B，化简得$y\ge\frac{\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x}$，设$g(x)=\frac{\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x}$，进而利用导数求出$g(x)$的最值，得出集合$B$的范围，即可求解

【详解】对于集合$A=\left\{a\left|\exists x\in R,a^x=\log_a x(a\rangle 1)\right.\right\}$，因为$y=a^x$与$y=\log_a x$互为反函数，所以，互相关于$y=x$对称，而$\exists x\in R,a^x=\log_a x$，所以，只需要$a^x\le x$即可，因为$a>1$，所以，$x\ln a\le\ln x$，得$\ln a\le\frac{\ln x}{x}$，设$\boldsymbol{f(x)=\frac{\ln x}{x}}$，得$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以，

$x\in(0,e)$，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；$x\in(e,+\infty)$，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以，

$f(x)_{Max}=f(e)=\frac{1}{e}$，得到$1<a\le e^{\frac{1}{e}}$，所以，$A=\left(1,e^{\frac{1}{e}}\right]$；

对于集合$B=\{y\mid\forall x\ge 0,xy\ge\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})\}$，化简得$y\ge\frac{\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x}$，设

$g(x)=\frac{\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x}$，$g'(x)=\frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+1}}-\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x^2}$，因为$x^2>0$，

可设$h(x)=\frac{\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2+1}}-\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x^2}$，$h'(x)=\frac{-2\sqrt{2}x^2}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{2x^2+1}}<0$，

$\therefore h(x)$单调递减，又$h(0)=0$，所以，当$x>0$时，$h'(x)<0$，$h(x)<0$，$\therefore g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，利用洛必达法则，

$x\to 0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2+1})'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}+\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}}{1}=\sqrt{2}$，

所以，$y=g(x)\ge\sqrt{2}$，所以，$B=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$；

由于$A=(1,\frac{1}{e})$，$B=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$，所以，D正确

故选：D

9．AC

【分析】根据二次函数的性质，结合基本不等式、特例法逐一判断即可.

【详解】A：$y=x^2+2x+5=(x+1)^2+4$，当$x=-1$时，函数有最小值4，所以本选项符合题意；

B：当$y=|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}$的最小值是4时，有$|\sin x|+\frac{4}{|\sin x|}=4$，解得$|\sin x|=2$，

而$\left|\sin x\right|\le 1$，所以方程$\left|\sin x\right|+\frac{4}{\left|\sin x\right|}=4$无实数解，所以本选项不符合题意，

C：$2^{x}+2^{2-x}\ge 2\sqrt{2^{x}\cdot 2^{2-x}}=2\sqrt{2^{2}}=4$，当且仅当$2^{x}=2^{2-x}$时取等号，即当且仅当$x=1$时取等号，所以本选项符合题意；

D：当$0<x<1$时，$y=\ln x+\frac{4}{\ln x}<0$，显然4不可能是函数的最小值，所以不符合题意，

故选：AC

10．BCD

【分析】根据狄利克雷函数与广义狄利克雷函数的定义，结合函数值、周期性、奇偶性等逐项判断即可得答案.

【详解】对于A，由于$f\left(x\right)=\begin{cases}a & x\in Q\\ b & x\in Q_{C}\end{cases}$（其中$a,b\in \mathrm{R}$且$a<b$），当$a,b$为无理数时，

$D\left(f\left(x\right)\right)=D\left(a\right)=0$，故A不正确；

对于B，设T为非零的有理数，若x是有理数，则$x+T$也是有理数；若x是无理数，则$x+T$也是无理数，根据函数的表达式，任取一个不为零的有理数T，所以$f(x+T)=f(x)$对$x\in \mathrm{R}$恒成立，$D(x+T)=D(x)$对$x\in \mathrm{R}$恒成立，即数$f\left(x\right)$和$D\left(x\right)$均为周期函数，但不存在最小正周期，故B正确；

对于C，$x\in \mathrm{R}$，则$D\left(f\left(-x\right)\right)=D\left(f\left(x\right)\right)$，所以为偶函数，又$f\left(D\left(-x\right)\right)=f\left(D\left(x\right)\right)$，所以$f\left(D\left(x\right)\right)$为偶函数，故C正确；

对于D，取$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，$B\left(0,1\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$，则$\vee ABC$为等边三角形，将这个三角形左右平形移动，即只需要三角形的高为1，边长为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$的三角形均可以，所以这样的三角形有无数个，故D正确.

故选：BCD.

11．BD

【分析】根据题意令$a=b=\frac{1}{2}$，得到$f\left(0\right)=1$，即可对A、B、C项判断，令$a=\frac{x}{2},b=-\frac{x}{2}$，得到$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，可对D项判断.

【详解】对于A、B、C项：