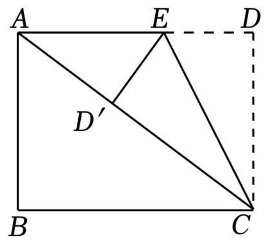
利用勾股定理解决折叠问题

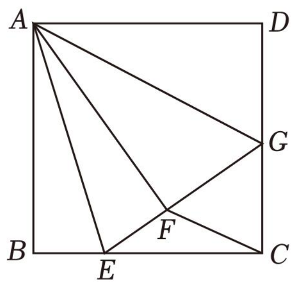
一．选择题（共 2 小题）

1．如图，将长方形纸片 *ABCD* 折叠，使边 *DC* 落在对角线 *AC* 上，折痕为 *CE*，且 *D* 点落在对角线 *D*′ 处，若 *AB*＝3，*AD*＝4，则 *ED* 的长为（　　）



A．$\frac{4}{3}$　　B．3　　C．1　　D．$\frac{3}{2}$

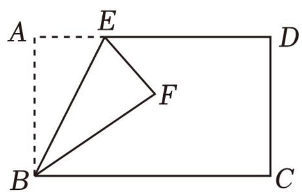
2．如图，在正方形 *ABCD* 中，*AB*＝6，点 *E* 在 *BC* 边上，且 *BE*＝2，将△*ABE* 沿 *AE* 折叠至△*AEF*，延长 *EF* 交 *CD* 于点 *G*，连接 *AG*，*CF*，则△*CEF* 的面积为（　　）



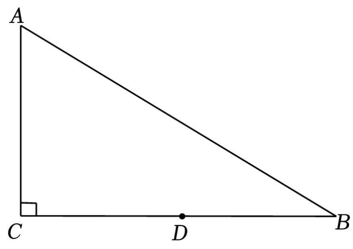
A．2　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{18}{5}$　　D．$2\sqrt{2}$

二．填空题（共 10 小题）

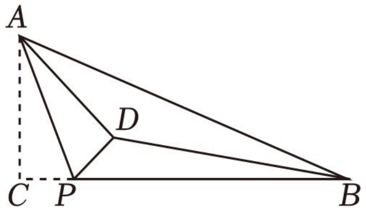
3．如图，在矩形 *ABCD* 中，*AB*＝13，*BC*＝24，点 *E* 是边 *AD* 上的一个动点，将△*ABE* 沿 *BE* 折叠，当点 *A* 的对应点 *F* 落在矩形一边的垂直平分线上时，*AE* 的长为 ________________________.



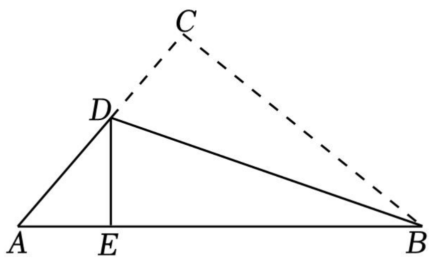
4．如图，在 Rt△ABC 中，∠C＝90°，∠B＝30°，BC＝4，点 D 是 BC 的中点，点 E 是边 AB 上一动点，沿 DE 所在直线把△BDE 翻折到△$B'DE$ 的位置，直线 $B'D$ 交 AB 于点 F，如果△$AB'F$ 为直角三角形，那么 BE 的长为 ______________________.



5．如图，在 Rt△ABC 中，∠ACB＝90°，点 P 为 BC 上一个动点，连接 AP，将△ACP 沿 AP 折叠得到△ADP，点 C 的对应点为 D，连接 BD，若 AC＝5，BC＝12，当△PBD 为直角三角形时，线段 CP 的长为 ______________________.



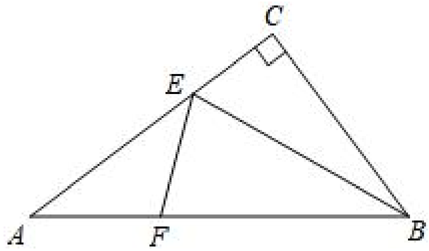
6．如图，在 Rt△ABC 纸片中，∠C＝90°，BC＝8cm，AC＝6cm．沿过点 B 的直线折叠这个三角形，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD，则 CD 的长为 ______________________.



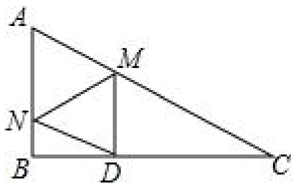
7．在 Rt△ABC 纸片中，∠C＝90°，AC＝6，BC＝8，点 D 在边 BC 上，连接 AD，以 AD 为折痕将△ABD 折叠得到△$AB'D$，AB'与边 BC 交于点 E．若△DEB'为直角三角形，则 BD 的长是 __________.

8．已知 Rt△ABC 中，∠C＝90°，AC＝9，BC＝12，将它的一条直角边沿一锐角角平分线所在直线翻折，使直角顶点落在斜边上，则折叠后不重合部分三角形的面积为 ______________________.

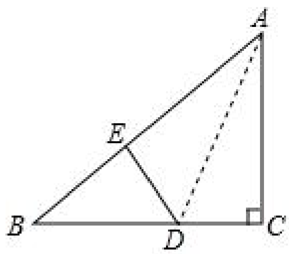
9．如图，折叠直角三角形纸片，$\angle C=90°$，$AC=4$，$AB=5$，点 E 为边 AC 上的动点，点 F 为边 AB 上的动点，则线段 $FE+EB$ 的最小值是 ____________________.



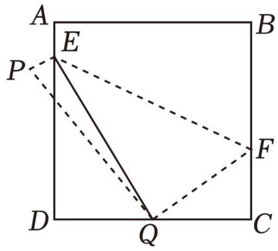
10．直角三角形 ABC 中，$AB=3$，$\angle B=90°$，$\angle C=30°$，折叠三角形使得点 A 与 BC 边上的点 D 重合，折痕分别交 AC、AB 于点 M，N，当△CDM 是直角三角形时，$AM=$____________________.



11．如图，Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=6$，$BC=8$，将△ABC 沿 AD 折叠，使 AC 落在斜边 AB 上且与 AE 重合，则 $CD=$_______.



12．如图，将对角线 BD 长为 $16\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 折叠，使点 B 落在 DC 边的中点 Q 处，点 A 落在 P 处，折痕为 EF．连接 EQ，则 EQ 的长为 ____________________.



三．解答题（共 4 小题）

13．折叠问题是几何变换常见的数学问题，其本质是轴对称图形，而长方形的折叠又往往会与勾股定理相关联．数学活动课上，同学们以“折叠”为主题开展了数学活动：在长方形纸片 $ABCD$ 中，$AB=3$，$BC=16$，点 M 在边 BC 上，$BM=9$．

【活动探究 1】

（1）如图 1，将长方形纸片 $ABCD$ 沿 AM 折叠，点 B 落在点 B'处，MB'与 AD 交于点 E，求线段 AE 的长．

【活动探究 2】

（2）如图 2，在图 1 的基础上将纸片左边部分沿 MN 折叠，使 CM 恰好落在直线 MB'上，点 C，D 的对称点为 C'，D'．

①求折痕 MN 的长；

②连接 AD'，求 AD'的长．

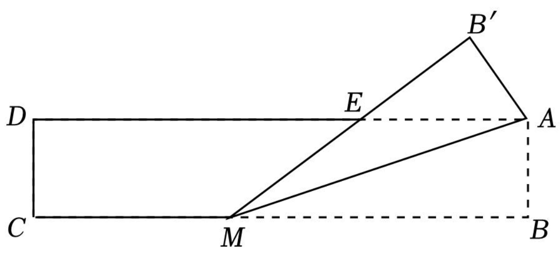


图1

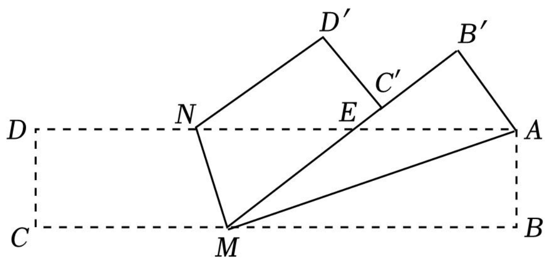
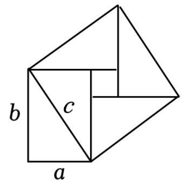


图2

14．为了突出勾股定理的价值，教科书上设计了大量的验证活动，其中用“面积法”探究勾股定理的例子不胜枚举．受“面积法”启发，小明认为，利用赵爽弦图的一部分就可以证明勾股定理．



赵爽弦图

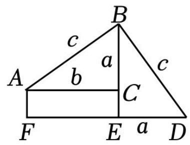


图1

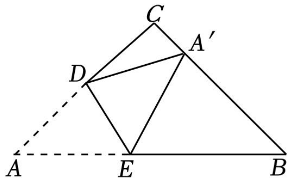


图2

（1）请把下面的证明过程补充完整；已知：将两个全等的直角三角形按图 1 所示拼在一起，其中$\angle ACB=\angle BED=90^\circ$，$AB=BD=c$，$AC=BE=b$，$BC=ED=a$，求证：$a^2+b^2=c^2$．

证明：连接 AD，过点 A 作 $AF\perp ED$ 交 DE 的延长线于点 F，则 $AF=b-a$．

（2）应用：如图 2，已知等腰直角三角形纸片 ABC，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC$，$AB=\sqrt{2}+1$．点 D，E 分别在边 AC，AB 上，将$\triangle ABC$ 沿 DE 所在直线折叠，使点 A 的对应点 A'正好落在边 BC 上．若$\triangle A'BE$ 为直角三角形，请直接写出 AE 的长．

15．观察与发现．

（1）取一张正方形纸片，先折叠成两个全等的矩形得到折痕 EF，然后展开，再把△CBH 沿 BH 折叠，使 C 点落在折痕 EF 上（图 1），则∠CBH＝__________．

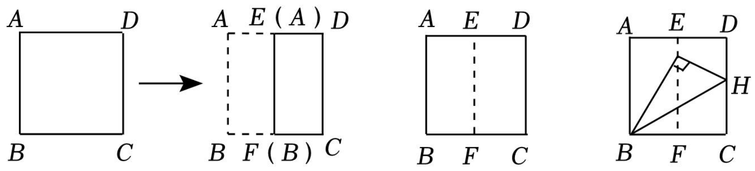
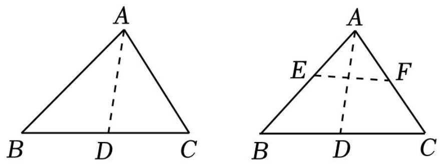


图1



图①　图②

图2

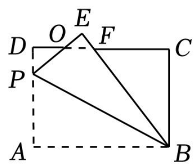


图3

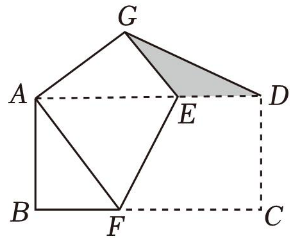
（2）小明将三角形纸片 ABC（AB＞AC）沿过点 A 的直线折叠，使得 AC 落在 AB 边上，折痕为 AD，展开纸片（如图 2﹣①）；再次折叠该三角形纸片，使点 A 和点 D 重合，折痕为 EF，展平纸片后得到△AEF（如图 2﹣②）．小明认为△AEF 是等腰三角形，你同意吗？请说明理由．

（3）如图 3，在长方形 $ABCD$ 中，AB＝6，BC＝4，P 为 AD 上一点，将△ABP 沿 BP 翻折至△EBP，PE 与 CD 相交于点 O，且 OE＝OD，求 AP 的长．

16．如图，把一张长方形纸片 $ABCD$ 折叠起来，使其对角顶点 A 与 C 重合，D 与 G 重合．若长方形的长 BC 为 8，宽 AB 为 4，求：

（1）AF 的长；

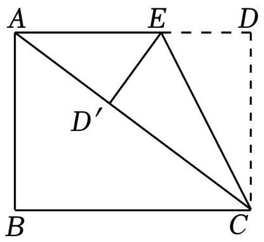
（2）求阴影部分三角形 GED 的面积．



利用勾股定理解决折叠问题

一．选择题（共 2 小题）

1．如图，将长方形纸片 $ABCD$ 折叠，使边 DC 落在对角线 AC 上，折痕为 CE，且 D 点落在对角线 D' 处，若 $AB=3$，$AD=4$，则 ED 的长为（　　）



A．$\frac{4}{3}$　　B．3　　C．1　　D．$\frac{3}{2}$

【分析】首先利用勾股定理计算出 AC 的长，再根据折叠可得△DEC≌△$D'EC$，设 $ED=x$，则 $D'E=x$，$AD'=AC-CD'=2$，$AE=4-x$，再根据勾股定理可得方程 $2^2+x^2=(4-x)^2$，再解方程即可．

【解答】解：∵$AB=3$，$AD=4$，

∴$DC=3$，$BC=4$

∴$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$，

根据折叠可得：△DEC≌△$D'EC$，

∴$D'C=DC=3$，$DE=D'E$，

设 $ED=x$，则 $D'E=x$，$AD'=AC-CD'=2$，$AE=4-x$，

在 Rt△AED' 中：$(AD')^2+(ED')^2=AE^2$，

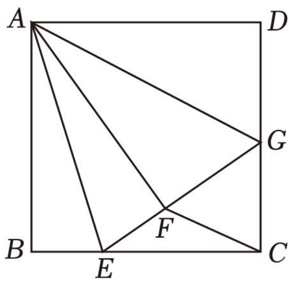
$2^2+x^2=(4-x)^2$，

解得：$x=\frac{3}{2}$．

故选：D．

【点评】此题主要考查了图形的翻着变换，以及勾股定理的应用，关键是掌握折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．

2．如图，在正方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，点 E 在 BC 边上，且 $BE=2$，将△ABE 沿 AE 折叠至△AEF，延长 EF 交 CD 于点 G，连接 AG，CF，则△CEF 的面积为（　　）



A．2　　B．$\frac{12}{5}$　　C．$\frac{18}{5}$　　D．$2\sqrt{2}$

【分析】根据正方形的性质得到 $AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$，根据折叠的性质得到 $BE=EF=2$，$AB=AF$，$\angle AFE=\angle B=90°$，根据全等三角形的性质得到 $DG=FG$，设 $DG=FG=x$，根据勾股定理和三角形的面积公式即可得到结论．

【解答】解：∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$，

∵将$\triangle ABE$ 沿 AE 折叠至$\triangle AEF$，

∴$BE=EF=2$，$AB=AF$，$\angle AFE=\angle B=90°$，

∴$\angle AFG=\angle D=90°$，

在 Rt$\triangle AFG$ 与 Rt$\triangle ADG$ 中，

$\begin{cases}AF=AD\\AG=AG\end{cases}$，

∴Rt$\triangle AFG$≌Rt$\triangle ADG$（HL），

∴$DG=FG$，

设 $DG=FG=x$，

∵$BE=2$，

∴$CE=6-2=4$，$EG=2+x$，

在 Rt$\triangle CEG$ 中，由勾股定理得：

$(x+2)^2=(6-x)^2+4^2$，

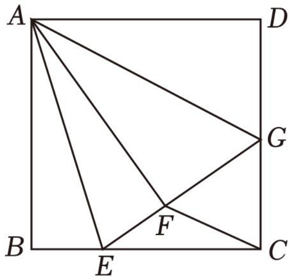
解得 $x=3$，

∴$S_{\triangle CEG}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$，

∵$EF:FG=2:3$，

$\therefore S_{\triangle EFC}=\frac{2}{5}\times 6=\frac{12}{5}$，

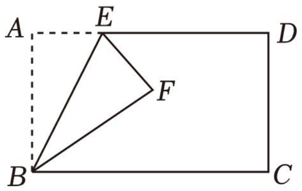
故选：B．



【点评】本题主要考查了正方形的性质，翻折的性质，全等三角形的判定与性质，以及勾股定理，运用勾股定理列方程求出 $BE=2$ 是解题的关键．

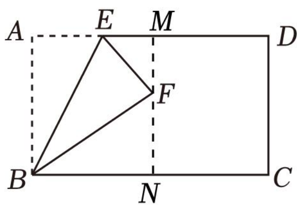
二．填空题（共 10 小题）

3．如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=13$，$BC=24$，点 E 是边 AD 上的一个动点，将△ABE 沿 BE 折叠，当点 A 的对应点 F 落在矩形一边的垂直平分线上时，AE 的长为 $\underline{\frac{26}{3}\text{或}\frac{13\sqrt{3}}{3}}$．



【分析】分两种情况，利用翻折的性质和勾股定理列方程可解得答案．

【解答】解：当 F 在 AD，BC 的垂直平分线上时，设 AD，BC 的垂直平分线交 AD 于 M，交 BC 于 N，如图：



∵矩形 $ABCD$，$AB=13$，$BC=24$，

$\therefore AM=BN=\frac{1}{2}\times 24=12$，$MN=AB=13$，

∵将△ABE 沿 BE 折叠，

$\therefore AE=EF$，$BF=AB=13$，

在 Rt△BFN 中，$FN=\sqrt{BF^2-BN^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$，

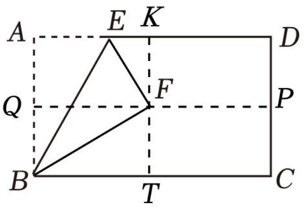
$\therefore FM=MN-FN=13-5=8$，

$\because FM^2+EM^2=EF^2$，

$\therefore 8^2+(12-AE)^2=AE^2$，

解得 $AE=\frac{26}{3}$；

当 F 在 AB，CD 的垂直平分线上时，设 AB，CD 的垂直平分线交 AB 于 Q，交 CD 于 P，过 F 作 $KT\perp AD$ 于 K，交 BC 于 T，如图：



$\because$ 矩形 $ABCD$，$AB=13$，$BC=24$，

$\therefore AQ=BQ=FT=\frac{1}{2}\times 13=\frac{13}{2}=KF$，

$\because$ 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠，

$\therefore AE=EF$，$BF=AB=13$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BFT$ 中，$BT=\sqrt{BF^2-FT^2}=\sqrt{13^2-(\frac{13}{2})^2}=\frac{13\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore AK=BT=\frac{13\sqrt{3}}{2}$，

$\because KF^2+EK^2=EF^2$，

$\therefore (\frac{13}{2})^2+(\frac{13\sqrt{3}}{2}-AE)^2=AE^2$，

解得 $AE=\frac{13\sqrt{3}}{3}$；

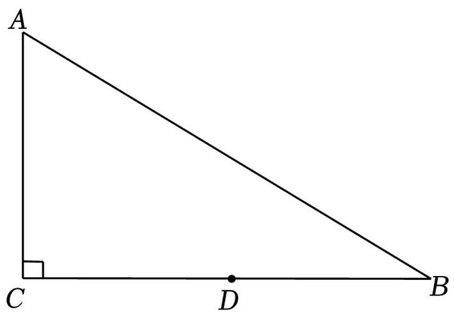
综上所述，AE 的长为 $\frac{26}{3}$ 或 $\frac{13\sqrt{3}}{3}$；

故答案为：$\frac{26}{3}$ 或 $\frac{13\sqrt{3}}{3}$．

【点评】本题考查矩形中的翻折问题，涉及垂直平分线，勾股定理等知识，解题的关键是掌握翻折的性

质和用勾股定理列方程．

4．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\angle B=30°$，$BC=4$，点 D 是 BC 的中点，点 E 是边 AB 上一动点，沿 DE 所在直线把△BDE 翻折到△$B'DE$ 的位置，直线 $B'D$ 交 AB 于点 F，如果△$AB'F$ 为直角三角形，那么 BE 的长为 $\underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\text{ 或 }\dfrac{4\sqrt{3}}{5}}$．



【分析】根据题意分两种情况讨论①当$\angle AFB'=90°$时，②当$\angle AB'F=90°$时，分别求解即可．

【解答】解：①如图 1，当$\angle AFB'=90°$时，

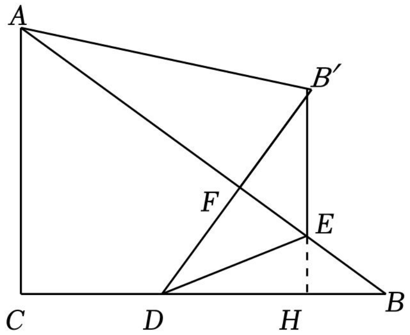


图1

在 Rt△ABC 中，$\angle B=30°$，$BC=4$，

设 $AC=m$，则 $AB=2m$，

$AB^2=BC^2+AC^2$，

解得：$m=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

则 $AB=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$，

∵D 是 BC 的中点，

∴$BD=CD=\dfrac{1}{2}BC=2$，

∵$\angle AFB'=\angle BFD=90°$，$\angle ACB=90°$，

$\frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot DF \times 2$,

解得：$DF=1$，

∵$\angle B=30°$，

∴ $BF=\sqrt{3}$,

过 E 作 $EH\perp BD$ 于 H，

∵由折叠知：$S_{\triangle DB'E}=S_{\triangle DBE}$，

∴ $\frac{1}{2}B'D \times EF = \frac{1}{2}BD \times EH$,

解得：$EF=EH$，

∵$\angle B=\angle B'=30°$，

$\frac{BE}{EH}=\frac{\sqrt{3}-EH}{EH}=2$,

解得： $EH=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

∴ $BE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$;

②如图 2 中，当$\angle AB'F=90°$时，连接 AD，作 $EH\perp AB'$ 交 AB' 的延长线于 H，

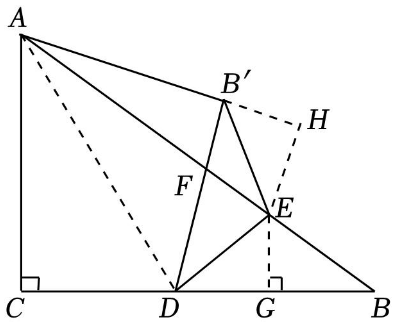


图2

∵$AD=AD$，$CD=DB=DB'$，

∴$\mathrm{Rt}\triangle ADC\cong\mathrm{Rt}\triangle ADB'$（$HL$），

∴ $AC=AB'=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

∵DE 所在直线把$\triangle BDE$ 翻折到$\triangle B'DE$ 的位置，

∴$\angle B=\angle DB'E$，

∵$AB'\perp DB'$，$EH\perp AH$，

∴$DB'\parallel EH$，

∴$\angle DB'E=\angle B'EH$，

∴$\angle B=\angle B'EH$，

∴$\angle B=\angle B'EH$，

设 $BE=x$，则 $B'H=\frac{1}{2}x$，$EH=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，

在 Rt△AEH 中，$AH^2+EH^2=AE^2$，

∴ $(\frac{1}{2}x+\frac{4\sqrt{3}}{3})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2=(\frac{8\sqrt{3}}{3}-x)^2$

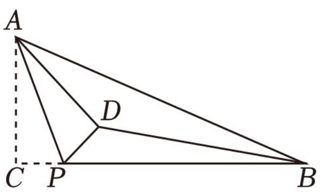
解得：$x=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

则 $BE=\frac{4\sqrt{3}}{5}$，

故答案为：$\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{4\sqrt{3}}{5}$．

【点评】本题考查了翻折变换（折叠问题），全等三角形的判定与性质，含 30 度角的直角三角形，勾股定理，解题的关键是学会用分类讨论的思想解决问题．

5．如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，点 P 为 BC 上一个动点，连接 AP，将△ACP 沿 AP 折叠得到△ADP，点 C 的对应点为 D，连接 BD，若 $AC=5$，$BC=12$，当△PBD 为直角三角形时，线段 CP 的长为 $\frac{10}{3}$或 5 ．



【分析】分两种情况讨论：$\angle PDB=90°$ 时，利用勾股定理求得 $AB=13$，进而得到 $BD=18$；设 $CP=DP=x$，在直角三角形 BPD 中，利用勾股定理得到 $(12-x)^2=x^2+8^2$，求得 $CP=\frac{10}{3}$；$\angle DPB=90°$

时，求得 $PC=5$．

【解答】解：如图①，$\angle PDB=90°$，由折叠可知$\angle ADP=\angle C=90°$，

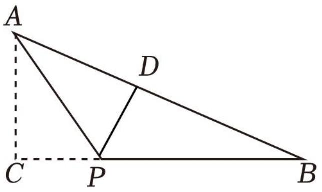


图1

$\therefore \angle ADB=\angle PDB+\angle ADP=180°$，

$\therefore A$，B，D 在同一直线上，即点 D 在直线 AB 上．

由折叠可知 $AD=AC=5$，

设 $CP=DP=x$，

$\therefore BP=BC-CP=12-x$．

在直角三角形 ABC 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=13$，

$\therefore BD=8$，

在直角三角形 BPD 中，$BP^2=PD^2+BD^2$，

$\therefore (12-x)^2=x^2+8^2$，

解得 $x=\frac{10}{3}$，

$\therefore CP=\frac{10}{3}$，

如图②，$\angle DPB=90°$，由折叠可知$\angle APC=\angle DPA=90°\times\frac{1}{2}=45°$，

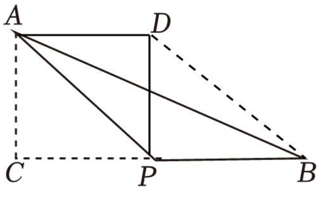


图2

$\because \angle C=90°$，

$\therefore \angle CAP=90°-\angle APC=45°=\angle APC$，

$\therefore AC=PC$，

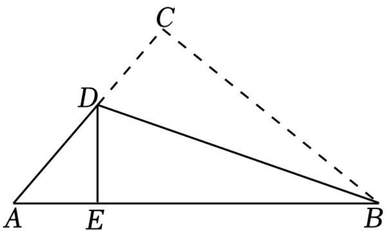
∵$AC=5$，

∴$PC=5$．

故答案为：CP 的值为 $\frac{10}{3}$ 或 5．

【点评】本题考查了翻折变换（折叠问题），勾股定理，解答本题的关键要熟练掌握折叠的性质：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等．

6．如图，在 Rt△ABC 纸片中，$\angle C=90^\circ$，$BC=8cm$，$AC=6cm$．沿过点 B 的直线折叠这个三角形，使点 C 落在 AB 边上的点 E 处，折痕为 BD，则 CD 的长为 $\underline{\frac{8}{3}cm}$．



【分析】利用勾股定理，在直角三角形 ACB 中求 $AB=10$，然后证明在直角三角形 ADE 中利用勾股定理即可解决．

【解答】解：∵$\angle C=90^\circ$，$BC=8cm$，$AC=6cm$，

∴$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=10\ cm$，

由折叠可得：$CD=DE$，$\angle AED=\angle C=90^\circ$，$BE=CB=8cm$，

∴$AE=AB-BE=2\ cm$，

设 $CD=x\ cm$，

则 $DE=x\ cm$，

∴$AD=AC-CD=(6-x)\ cm$，

∴在直角三角形 ADE 中，

由勾股定理可得：$AD^2=AE^2+DE^2$，

∴$(6-x)^2=4+x^2$，

解得：$x=\frac{8}{3}$，

故答案为：$\frac{8}{3}\ cm$．