

一网打尽外接球、内切球与棱切球问题

目录

[题型 01 正方体、长方体外接球](#)

[题型 02 正四面体外接球](#)

[题型 03 对棱相等的三棱锥外接球](#)

[题型 04 直棱柱外接球](#)

[题型 05 直棱锥外接球](#)

[题型 06 正棱锥与侧棱相等模型](#)

[题型 07 侧棱为外接球直径模型](#)

[题型 08 共斜边拼接模型](#)

[题型 09 垂面模型](#)

[题型 10 二面角模型](#)

[题型 11 坐标法](#)

[题型 12 圆锥圆柱圆台模型](#)

[题型 13 锥体内切球](#)

[题型 14 棱切球](#)

题型 01 正方体、长方体外接球

题目 1 (2023·四川遂宁·高三射洪中学校考阶段练习) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 $AB=2$, $BC=BB_1=4$, 在该长方体内放置一个球, 则最大球的体积为 _____.

【答案】 $\frac{4}{3}\pi$

【解析】 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB=2$, $BC=BB_1=4$, 由长方体的结构特征知, 长方体的内置球直径不超过最短棱长,

于是得球直径小于等于 2, 球半径 r 的最大值为 1, 此时有 $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi$,

所以最大球的体积为 $\frac{4}{3}\pi$.

故答案为: $\frac{4}{3}\pi$

题目 2 (2023·全国·高三专题练习) 正方体的表面积为 96, 则正方体外接球的表面积为 _____

【答案】 48π

【解析】 设正方体的棱长为 a , 因为正方体的表面积为 96, 可得 $6a^2=96$, 解得 $a=4$,

则正方体的对角线长为 $l=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3}$,

设正方体的外接球的半径为 R , 可得 $2R=4\sqrt{3}$, 解得 $R=2\sqrt{3}$,

所以外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi(2\sqrt{3})^2=48\pi$.

故答案为: 48π .

题目 3 (2023·吉林·高三校联考期末) 已知正方体的顶点都在球面上, 若正方体棱长为 $\sqrt{3}$, 则球的表面积为 _____.

【答案】 9π

【解析】 该球为正方体外接球, 其半径 R 与正方体棱长 a 之间的关系为 $2R=\sqrt{3}a$,

由 $a=\sqrt{3}$, 可得 $R=\frac{3}{2}$, 所以球的表面积 $S=4\pi R^2=9\pi$.

答案: 9π

题型 02 正四面体外接球

题目 4 (2023·山东·高三济南一中校联考阶段练习) 在正四面体 $P-ABC$ 中, 以 PB 为直径作球 O , 点 D 在球 O 与 PB 的中垂面相交所得的圆上运动, 当三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最小值为 $\frac{2-\sqrt{2}}{12}$ 时, 该正四面体 $P-ABC$ 外接球的体积为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

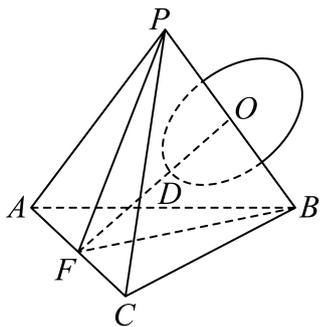
【解析】 设正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 a , 设点 D 到平面 ABC 的距离为 h , 则

$V_{D-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$, 当 h 最小时, V_{D-ABC} 最小.

因为球 O 的半径为 $\frac{1}{2}PB = \frac{1}{2}a$,

如图所示, 当 D 在如图所示的位置时 h 最小. 取 AC 的中点 F , 连接 PF 、 BF ,

则 $PF=BF$, $FO \perp PB$, 所以 $D \in FO$.



因为 $BF = \frac{\sqrt{3}}{2}a, OB = \frac{1}{2}a$,

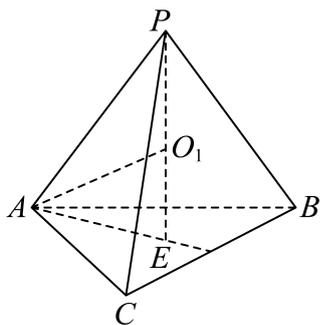
则 $FO = \frac{\sqrt{2}}{2}a, FD = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a, \sin \angle OFB = \frac{OB}{FB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 h 最小值为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a) \sin \angle OFB = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a)$,

所以 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 (\frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{1}{2}a) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{12}$, 解得 $a = \sqrt{2}$.

设正四面体 $P-ABC$ 的外接球的半径为 R , 球心为 O_1 .

如图所示, 正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 $\sqrt{2}$, 过 P 作 $PE \perp$ 平面 ABC 于 E ,



由于 $AB = AC = BC = \sqrt{2}$,

所以 $AE = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

利用勾股定理得 $PE = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\frac{\sqrt{6}}{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\triangle AO_1E$ 中, $(\frac{\sqrt{6}}{3})^2 + (\frac{2\sqrt{3}}{3} - R)^2 = R^2$, 解得 $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以正四面体 $P-ABC$ 的外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3} \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

题目 5 (2023·河北·统考模拟预测) 在正四面体 $P-ABC$ 中, O 为 PB 的中点, 点 D 在以 O 为球心的球上运动, $PB = 2OD$, 且恒有 $PD = BD$, 已知三棱锥 $D-ABC$ 的体积的最大值为 $18\sqrt{2} + 36$, 则正四面体 $P-ABC$ 外接球的体积为 ()

A. $108\sqrt{3}\pi$

B. $124\sqrt{2}\pi$

C. $132\sqrt{2}\pi$

D. $144\sqrt{3}\pi$

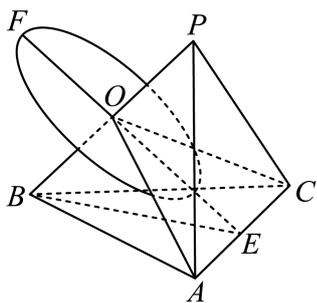
【答案】A

【解析】由题知,

O 为 PB 的中点, 点 D 在以 O 为球心的球上运动, $PB = 2OD$,

所以 D, P, B 都在以 O 为球心的球上,

又因 $PD=BD$, 则 D 在 PB 的中垂面上, 如图,



连接 AO, CO ,

$\because \triangle PAB, \triangle PBC$ 都为正三角形, 且 O 为 PB 的中点,

$\therefore OA \perp PB, OC \perp PB$,

$\because OA \cap OC = O, OA, OC \subset$ 平面 $OAC, PB \not\subset$ 平面 OAC ,

$\therefore PB \perp$ 平面 OAC , 平面 OAC 是 PB 的中垂面, 即 D 在平面 OAC 上,

所以点 D 在平面 OAC 与以 O 为球心, OB 为半径的球的交线上,

即 D 在以 O 为圆心, OB 为半径的平面 OAC 内的圆上,

取 AC 中点 E , 连接 OE, AE , 延长 EO 至点 F , 使 $OF = OB$,

作在平面 OAC 内, 以 O 为圆心, OB 为半径的圆,

则圆 O 上的点 F 到平面 ABC 的距离最远, 故 D 在 F 处,

设 $AB = a$, 则 $BE = \frac{\sqrt{3}}{2}a, OB = \frac{1}{2}a$,

$\because PB \perp$ 平面 $OAC, OE \subset$ 平面 OAC ,

$\therefore PB \perp OE$,

$\therefore OE = \sqrt{BE^2 - OB^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

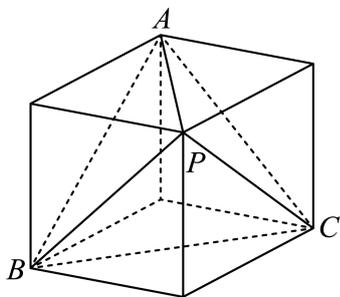
$EF = OF + OE = \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a$,

在 $Rt\triangle OBE$ 中, $\sin \angle OEB = \frac{OB}{BE} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

点 F 到平面 ABC 的距离 $h = EF \cdot \sin \angle OEB = \frac{\sqrt{2}+1}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6}a$,

所以 $V_{D-ABC} = V_{F-ABC} = \frac{1}{3}hS_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{6}a \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 18\sqrt{2} + 36$,

解得 $a = 6\sqrt{2}$,



如图则其外接正方体的边长为 $b = \frac{a}{\sqrt{2}} = 6$,

所以正四面体 $P-ABC$ 外接球即为边长为 6 正方体的外接球,

故外接球半径 $R = \frac{\sqrt{6^2+6^2+6^2}}{2} = 3\sqrt{3}$,

所以外接球体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times 81\sqrt{3} = 108\sqrt{3}\pi$.

故选: A

题目 6 (2023·山东济南·高三统考期末) 若正四面体的表面积为 $8\sqrt{3}$, 则其外接球的体积为 ()

A. $4\sqrt{3}\pi$

B. 12π

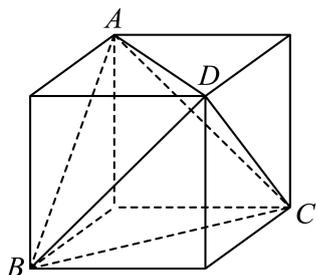
C. $8\sqrt{6}\pi$

D. $32\sqrt{3}\pi$

【答案】A

【解析】 设正四面体的棱长为 a , 由题意可知: $4 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 8\sqrt{3}$, 解得: $a = 2\sqrt{2}$,

所以正四面体的棱长为 $2\sqrt{2}$,



将正四面体补成一个正方体, 则正方体的棱长为 2, 正方体的体对角线长为 $2\sqrt{3}$,

因为正四面体的外接球的直径为正方体的体对角线长, 所以外接球半径 $R = \sqrt{3}$,

则外接球的体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$,

故选: A.

题目 7 (2023·河南·西平县高级中学校联考模拟预测) 一个正四面体的棱长为 2, 则这个正四面体的外接球的体积为 ()

A. $\sqrt{6}\pi$

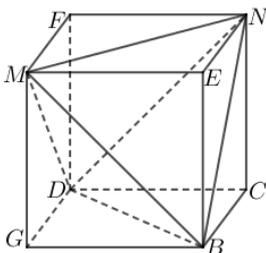
B. 2π

C. 3π

D. $2\sqrt{2}\pi$

【答案】A

【解析】 如图, 四面体 $BDMN$ 是正四面体, 棱长 $BD = 2$, 将其补成正方体 $GBCD - MENF$,



则正方体 $GBCD - MENF$ 的棱长 $GB = \frac{\sqrt{2}}{2}BD = \sqrt{2}$, 此正方体的体对角线长为 $\sqrt{6}$,

正四面体 $BDMN$ 与正方体 $GBCD - MENF$ 有相同的外接球, 则正四面体 $BDMN$ 的外接球半径 $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

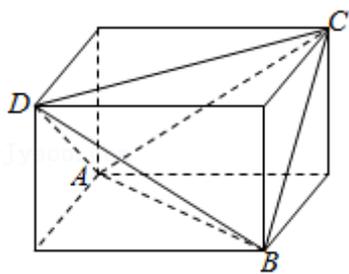
所以正四面体 $BDMN$ 的外接球体积为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$.

故选: A

题型 03 对棱相等的三棱锥外接球

题目 8 (2023·罗湖区月考) 已知在四面体 $ABCD$ 中, $AB=CD=2\sqrt{2}$, $AD=AC=BC=BD=\sqrt{5}$, 则四面体 $ABCD$ 的外接球表面积为 _____.

【解析】解: 如下图所示, 将四面体 $ABCD$ 放在长方体 $AEBF-GCHD$ 内, 在四面体 $ABCD$ 中, $AB=CD=2\sqrt{2}$, $AD=AC=BC=BD=\sqrt{5}$, 设该长方体的长、宽、高分别为 2 、 2 、 1 , 则长方体的体对角线长即为长方体的外接球直径, 设该长方体的外接球半径为 R , 所以, 该四面体的外接球直径为 $2R=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$, 因此, 四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2=\pi\times(2R)^2=9\pi$,



故答案为: 9π .

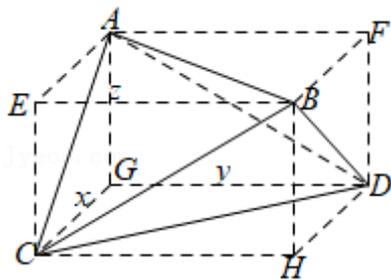
题目 9 (2023·孟津县校级期末) 若四面体 $ABCD$ 中, $AB=CD=BC=AD=\sqrt{5}$, $AC=BD=\sqrt{2}$, 则四面体的外接球的表面积为 _____ 6π _____.

【解析】解: 由题意可采用割补法, 考虑到四面体 $ABCD$ 的四个面为全等的三角形, 所以可在其每个面补上一个以 $\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ 为三边的三角形作为底面, 且以分别 x , y , z 长、两两垂直的侧棱的三棱锥, 从而可得到一个长、宽、高分别为 x , y , z 的长方体, 并且 $x^2+y^2=5$, $x^2+z^2=5$, $y^2+z^2=2$, 则有 $(2R)^2=x^2+y^2+z^2=6$ (R 为球的半径), 所以球的表面积为 $S=4\pi R^2=6\pi$.

故答案为: 6π .

题目 10 (2023·三模拟) 在四面体 $ABCD$ 中, $AC=BD=2$, $AD=BC=\sqrt{5}$, $AB=CD=\sqrt{7}$, 则其外接球的表面积为 _____.

【解析】解: 如下图所示,



将四面体 $ABCD$ 放在长方体 $AEBF-GCHD$ 内, 设该长方体的长、宽、高分别为 x 、 y 、 z , 则长方体的体对角线长即为长方体的外接球直径, 设该长方体的外接球半径为 R ,

$$\text{由勾股定理得 } \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y^2+z^2=5 \\ z^2+x^2=7 \end{cases}$$

上述三个等式全加得 $2(x^2+y^2+z^2)=16$,

所以, 该四面体的外接球直径为 $2R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{2}$,

因此,四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = \pi \times (2R)^2 = 8\pi$,

故答案为: 8π .

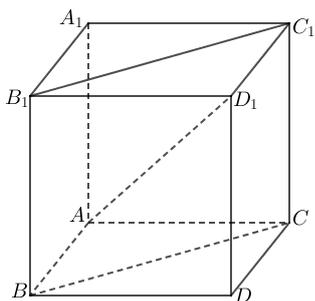
题型 04 直棱柱外接球

题目 11 (2023·陕西西安·高三高新一中校考阶段练习) 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, $AC = AA_1 = 2$, $BC = 2\sqrt{2}$, 则三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球体积等于 ()

- A. $4\sqrt{3}\pi$ B. 12π C. 16π D. 4π

【答案】A

【解析】在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 因 $AB \perp AC$, 即 $\angle BAC = 90^\circ$, 则 $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 2$, 于是得 $AB = AC = AA_1 = 2$, 将其补形成棱长为 2 的正方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$, 如图,



则直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球即为棱长为 2 的正方体 $ABDC-A_1B_1D_1C_1$ 的外接球,

球半径 $R = \frac{1}{2}AD_1 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$, 因此, $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4\sqrt{3}\pi$,

所以三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球体积等于 $4\sqrt{3}\pi$.

故选: A

题目 12 (2023·重庆渝中·高三重庆巴蜀中学校考阶段练习) 已知球 O 为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球, 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1, 高为 3, 则球 O 的表面积是 ()

- A. 4π B. $\frac{31\pi}{3}$ C. $\frac{16\pi}{3}$ D. $\frac{31\pi}{12}$

【答案】B

【解析】设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h , 底面边长为 a . 设球 O 的半径为 R ,

则三棱柱底面三角形的外接圆半径 r 满足: $2r = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{3}}$, 解得: $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

由题知, $a = 1$, $h = 3$

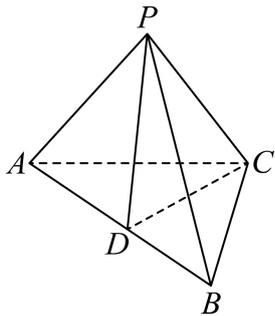
$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}h\right)^2 = \frac{a^2}{3} + \frac{h^2}{4} = \frac{1}{3} + \frac{9}{4} = \frac{31}{12},$$

故球 O 的表面积为 $S = 4\pi R^2 = \frac{31\pi}{3}$,

故选: B.

题型 05 直棱锥外接球

题目 13 (2023·河南·高三安阳一中校联考阶段练习) 如图, 在体积为 $\frac{4}{3}$ 的三棱锥 $P-ABC$ 中, $AC \perp BC$, $AD = BD$, $PD \perp$ 底面 ABC , 则三棱锥 $P-ABC$ 外接球体积的最小值为 ()



A. $\frac{9\pi}{2}$

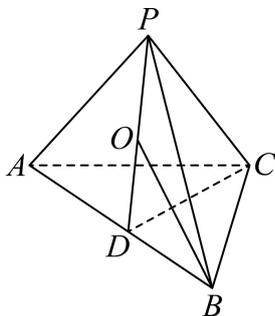
B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{8}$

D. $\frac{7\pi}{24}$

【答案】A

【解析】如图所示，



由题意 $\triangle ABC$ 是直角三角形， AB 的中点为 D ，连结 PD ，很明显球心在 PD 上，

设球心为 O ， $PD = h$ ， $AC = x$ ， $BC = y$ ， $OC = R$ ，则 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}xyh = \frac{4}{3}$ ，解得 $h = \frac{8}{xy}$ ，

在 $Rt\triangle OCD$ 中， $OC^2 = CD^2 + OD^2$ ， $CD = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2}$ ，则 $R^2 = \frac{x^2 + y^2}{4} + (h - R)^2$ ，

解得 $R = \frac{x^2 + y^2}{8h} + \frac{h}{2} = \frac{(x^2 + y^2)xy}{64} + \frac{4}{xy} \geq \frac{2x^2y^2}{64} + \frac{4}{xy}$ ，当且仅当 $x = y$ 时等号成立，

即 $R \geq \frac{x^4}{32} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^4}{32} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^2} \geq 3 \times \sqrt[3]{\frac{x^4}{32} \cdot \frac{2}{x^2} \cdot \frac{2}{x^2}} = 3 \times \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{3}{2}$ ，当且仅当 $\frac{x^4}{32} = \frac{2}{x^2}$ ，即 $x = 2$ 时等号成立，

即 R 的最小值是在 $x = y = h = 2$ 时取得 $\frac{3}{2}$ ，经检验正确，

即满足题意时三棱锥的高为 2， $R = \frac{3}{2}$ ，故外接球体积的最小值为： $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{9}{2}\pi$ ，

故选：A.

题目 14 (2023·广东广州·高三广州市第十七中学校考阶段练习) 在三棱锥 $A-BCD$ 中， $AD \perp$ 平面 BCD ，

$\angle ABD + \angle CBD = \frac{\pi}{2}$ ， $BD = BC = 1$ ，则已知三棱锥 $A-BCD$ 外接球表面积的最小值为 ()

A. $\frac{2\sqrt{5}+1}{4}\pi$

B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}\pi$

C. $\frac{2\sqrt{5}-1}{4}\pi$

D. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\pi$

【答案】B

【解析】如图，设 $\angle ABD = \alpha$ ， $\angle CBD = \beta$ ， K 为 $\triangle BCD$ 的外心， O 为三棱锥 $A-BCD$ 外接球的球心，则 $OK \perp$ 平面 BCD ，又 $AD \perp$ 平面 BCD ，所以 $OK \parallel AD$ ， $KD \subset$ 平面 BCD ，则 $OK \perp DK$ ，四边形 $OKDA$ 是直角梯形，

设 $OK = h$ ， $DK = r$ ， $OD = R$ ，

由 $AD \perp$ 平面 BCD , $BD \subset$ 平面 BCD , 得 $AD \perp BD$,

$$\text{则 } AD = \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, CD = 2 \sin \frac{\beta}{2}, 2r = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \beta}, \text{ 即 } r = \frac{1}{2 \cos \frac{\beta}{2}},$$

$$\text{又 } \begin{cases} h^2 + r^2 = R^2 \\ (AD - h)^2 + r^2 = R^2 \end{cases}, \text{ 则 } h = \frac{1}{2} AD, R^2 = r^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\beta}{2}} + \frac{1}{4 \tan^2 \beta} = \frac{1}{2(1 + \cos \beta)} + \frac{\cos^2 \beta}{4(1 - \cos^2 \beta)}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{3 - 2 \cos \beta}{4(1 - \cos^2 \beta)},$$

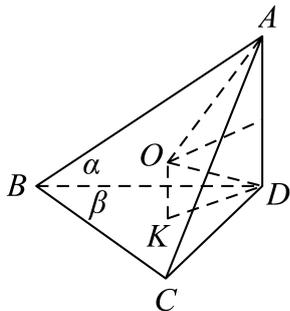
$$\text{令 } t = 3 - 2 \cos \beta, \text{ 则 } \cos \beta = \frac{3 - t}{2}, t \in (1, 3),$$

$$R^2 = -\frac{1}{4} - \frac{t}{t^2 - 6t + 5} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{t + \frac{5}{t} - 6} \geq -\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{t \cdot \frac{5}{t}} - 6} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} + 1}{8}, \text{ 当且仅当 } t$$

$$= \frac{5}{t}, \text{ 即 } t = \sqrt{5} \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{所以三棱锥 } A - BCD \text{ 外接球表面积 } S = 4\pi R^2 \geq 4\pi \times \frac{\sqrt{5} + 1}{8} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\pi,$$

故选: B.



题目 15 (2023·浙江温州·统考模拟预测) 在三棱锥 $A - BCD$ 中, $AD \perp$ 平面 BCD , $\angle ABD + \angle CBD = \frac{\pi}{2}$,

$BD = BC = 2$, 则三棱锥 $A - BCD$ 外接球表面积的最小值为 ()

- A. $(2\sqrt{5} - 2)\pi$ B. $(2\sqrt{5} - 1)\pi$ C. $(2\sqrt{5} + 1)\pi$ D. $(2\sqrt{5} + 2)\pi$

【答案】D

【解析】 设 $\angle CBD = \alpha$, 在等腰 $\triangle BCD$ 中, $CD = 2 \cdot BC \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \sin \frac{\alpha}{2}$, 设 $\triangle BCD$ 的外心是 M , 外接圆半径

$$\text{是 } r, \text{ 则 } 2r = \frac{CD}{\sin \alpha} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \therefore r = \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

设外接球球心是 O , 则 $OM \perp$ 平面 BCD , $DM \subset$ 平面 BCD , 则 $OM \perp DM$, 同理 $AD \perp BD$, $AD \perp DM$, 又 $AD \perp$ 平面 BCD , 所以 $AD \parallel OM$, $OMDA$ 是直角梯形,

设 $OM = h$, 外接球半径为 R , 即 $OD = OA = R$,

$$\text{则 } \begin{cases} r^2 + h^2 = R^2 \\ r^2 + (AD - h)^2 = R^2 \end{cases}, \text{ 所以 } AD = 2h,$$

在直角 $\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BAD = \alpha$,

$$\tan \alpha = \frac{2}{AD}, AD = \frac{2}{\tan \alpha}, \therefore h = \frac{1}{\tan \alpha},$$

$$R^2 = \frac{1}{\tan^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{2}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \frac{2}{1 + \cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 2 - 2 \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = -1 +$$

$$\frac{2(\frac{3}{2} - \cos\alpha)}{1 - \cos^2\alpha},$$

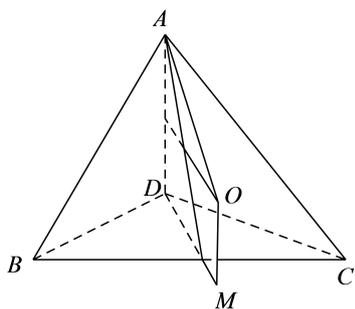
令 $\frac{3}{2} - \cos\alpha = t$, 则 $t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$,

$$R^2 = -1 + \frac{2t}{1 - (\frac{3}{2} - t)^2} = -1 + \frac{2t}{-t^2 + 3t - \frac{5}{4}} = -1 + \frac{2}{3 - (t + \frac{5}{4t})} \geq -1 + \frac{2}{3 - 2\sqrt{t \cdot \frac{5}{4t}}} = -1 + \frac{2}{3 - \sqrt{5}} =$$

$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, 当且仅当 $t = \frac{5}{4t}$, $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时等号成立,

所以 $4\pi R^2$ 的最小值是 $4\pi \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = (2 + 2\sqrt{5})\pi$.

故选: D.



题目 16 (2023·河南开封·高三河南省杞县高中校联考开学考试) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $PA = 6, AB = 8$, 则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的表面积之比为 ()

A. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

B. $\frac{41}{4}$

C. 3

D. $\frac{11}{2}$

【答案】B

【解析】 设四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的半径分别为 R, r .

因为 $V_{\text{四棱锥 } P-ABCD} = \frac{1}{3} \times 8^2 \times 6 = 128$,

四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积 $S = 8^2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times 2 + \frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times 2 = 192$,

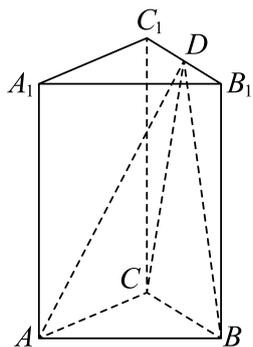
所以 $r = \frac{3V_{\text{四棱锥 } P-ABCD}}{S} = 2$,

因为 PA, AB, AD 两两垂直, 四棱锥可补形为长方体, 所以 $R = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{41}$,

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球与内切球的表面积之比为 $\frac{4\pi R^2}{4\pi r^2} = \frac{41}{4}$.

故选: B.

题目 17 (2023·浙江丽水·高三统考期末) 如图, 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , $AA_1 = 2, AC = BC = 1, \angle ACB = 90^\circ$, D 在上底面 $A_1B_1C_1$ (包括边界) 上运动, 则三棱锥 $D-ABC$ 的外接球体积的最大值为 ()



A. $\frac{\sqrt{6}}{2}\pi$

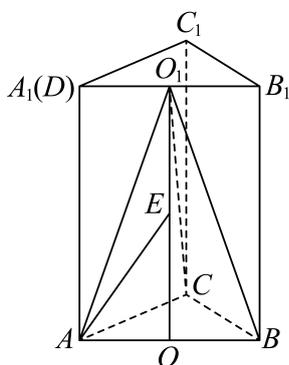
B. $\sqrt{3}\pi$

C. $\sqrt{6}\pi$

D. $\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

【答案】C

【解析】



如图,取 AB 中点为 O , A_1B_1 中点为 O_1 ,连接 OO_1 ,取 OO_1 的中点为 E ,连接 AE .

因为 $\triangle ACB$ 为直角三角形,所以 $\triangle ACB$ 外接圆的圆心即为 O .

同理, $\triangle A_1C_1B_1$ 外接圆的圆心即为 O_1 .

所以,当 D 位于 $\triangle A_1B_1C_1$ 顶点时(不妨假设点 D 与点 A_1 重合),三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的球心恰好与三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心重合,即三棱锥 $D-ABC$ 的外接球的半径等于三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径,此时体积有最大值.

因为 O, O_1 分别为 AB, A_1B_1 的中点,

根据三棱柱的性质可知, $AO \parallel A_1O_1$, 且 $AO = A_1O_1$,

所以,四边形 AOO_1A_1 是平行四边形,

所以 $OO_1 \parallel AA_1$, 且 $OO_1 = AA_1 = 2$, $OE = \frac{1}{2}OO_1 = 1$.

根据三棱柱的性质可知 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ,

所以 $OO_1 \perp$ 平面 ABC .

又 O, O_1 分别为 $\triangle ACB$ 以及 $\triangle A_1C_1B_1$ 外接圆的圆心,

所以,线段 OO_1 的中点 E 即为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心,

所以,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的半径即等于 AE .

又 $AC = BC = 1$, 所以 $AB = \sqrt{2}$, $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

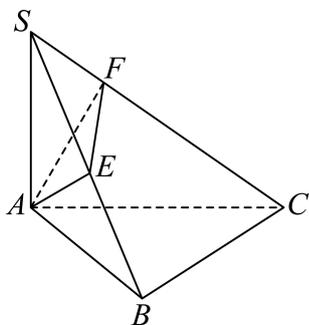
因为 $OO_1 \perp$ 平面 ABC , $OA \subset$ 平面 ABC , 所以 $OO_1 \perp OA$, 即 $OE \perp OA$,

所以, $AE = \sqrt{OA^2 + OE^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

所以,三棱锥 $D-ABC$ 的外接球体积的最大值为 $\frac{4}{3}\pi \cdot (AE)^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \sqrt{6}\pi$.

故选: C.

题目 18 (2023·河北邯郸·统考三模) 三棱锥 $S-ABC$ 中, $SA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp BC$, $SA = AB = BC$. 过点 A 分别作 $AE \perp SB$, $AF \perp SC$ 交 SB 、 SC 于点 E 、 F , 记三棱锥 $S-FAE$ 的外接球表面积为 S_1 , 三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积为 S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} =$ ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】取 SA 的中点 O_1 , SC 的中点 O_2 , 连 O_1E , O_1F , O_2A , O_2B , 因为 $SA \perp$ 平面 ABC , $AB, BC, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $SA \perp AB$, $SA \perp BC$, $SA \perp AC$, 因为 $AB \perp BC$, $SA \cap AB = A$, $SA, AB \subset$ 平面 SAB , 所以 $BC \perp$ 平面 SAB , 因为 $SB \subset$ 平面 SAB , 所以 $BC \perp SB$,

在直角三角形 SAC 中, O_2 是斜边 SC 的中点, 所以 $O_2A = O_2S = O_2C$, 在直角三角形 SBC 中, O_2 是斜边 SC 的中点, 所以 $O_2B = O_2S = O_2C$, 所以 O_2 是三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心, SC 为该球的直径.

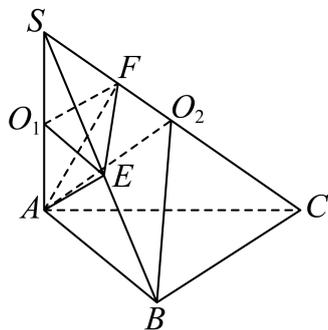
因为 $AE \perp SB$, O_1 是斜边 SA 的中点, 所以 $O_1E = O_1A = O_1S$, 因为 $AF \perp SC$, O_1 是斜边 SA 的中点, 所以 $O_1F = O_1A = O_1S$, 所以 O_1 是三棱锥 $S-FAE$ 的外接球的球心, SA 为该球的直径.

设 $SA = AB = BC = a$, 则 $SC = \sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} = \sqrt{3}a$,

则 $S_1 = 4\pi \cdot \left(\frac{SA}{2}\right)^2 = a^2\pi$, $S_2 = 4\pi \cdot \left(\frac{SC}{2}\right)^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 = 3a^2\pi$,

所以 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a^2\pi}{3a^2\pi} = \frac{1}{3}$.

故选: B.



题型 06 正棱锥与侧棱相等模型

题目 19 (2023·云南保山·高三统考期末) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱与底面所成的角为 60° , 高为 $4\sqrt{3}$, 则该三棱锥外接球的表面积为 _____.

【答案】 $\frac{256\pi}{3}$

【解析】设顶点 P 在底面 ABC 的投影为 G (G 为等边 $\triangle ABC$ 的中心), 则该三棱锥外接球的球心 O 在 PG 上, 连接 GA, OA ,

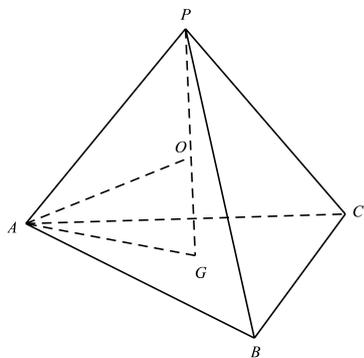
因为 $PG \perp$ 底面 ABC , 则侧棱与底面所成的角为 $\angle PAG = 60^\circ$, 可得 $GA = \frac{PG}{\tan 60^\circ} = 4$,

设棱锥外接球的半径为 R ,

因为 $OA^2 = OG^2 + GA^2$, 即 $R^2 = (4\sqrt{3} - R)^2 + 4^2$, 解得 $R = \frac{8\sqrt{3}}{3}$,

所以外接球的表面积为 $S_{表} = 4\pi R^2 = \frac{256\pi}{3}$.

故答案为: $\frac{256\pi}{3}$.

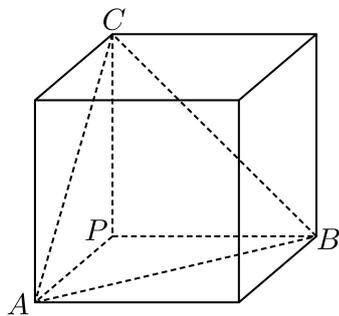


题目 20 (2023·广东佛山·高三佛山市南海区第一中学校考阶段练习) 已知正三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA=1$, $AB=\sqrt{2}$, 该三棱锥的外接球体积为 _____.

【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

【解析】 在正三棱锥 $P-ABC$ 中 $\triangle ABC$ 为等边三角形, 顶点 P 在底面的射影为底面的重心, 所以 $PA=PB=PC$,

又 $PA=1$, $AB=\sqrt{2}$, 所以 $PA^2+PB^2=AB^2$, 所以 $PA \perp PB$, 同理可得 $PA \perp PC$ 、 $PC \perp PB$, 即 PA, PB, PC 两两垂直, 将该三棱锥补成一个正方体, 该三棱锥的外接球就是正方体的外接球,



正方体的体对角线就是外接球的直径, 易得三棱锥的外接球半径 $R = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以三棱锥的外接球体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

题目 21 (2023·上海闵行·高三上海市文来中学校考期中) 已知正四棱锥的各顶点都在同一个球面上, 球的体积为 36π , 则该正四棱锥的体积最大值为 _____.

【答案】 $\frac{64}{21}\frac{1}{3}$

【解析】 因为球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$, 所以球的半径为 $R=3$,

如图, 设正四棱锥的底面边长 $AB=2a$, 高 $PO=h$, 外接球的球心为 M , 根据正四棱锥的几何特征可知外接球的球心在其高上, 又 $OD=\sqrt{2}a$, 在 $Rt\triangle MOD$ 中, $MD^2=OD^2+OM^2$, 即 $3^2=2a^2+(h-3)^2$,

所以正四棱锥的体积为 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4a^2h = \frac{2}{3}[9 - (h-3)^2]h$,

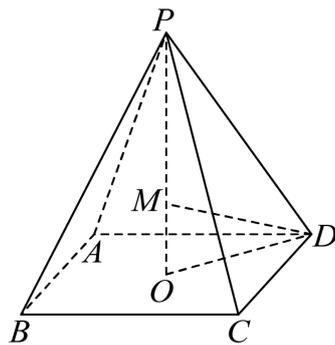
整理得 $V = -\frac{2}{3}h^3 + 4h^2 (h > 0)$, $V' = -2h^2 + 8h = -2h(h-4)$,

当 $0 < h < 4$ 时, $V' > 0$, 当 $h > 4$ 时, $V' < 0$,

所以 $V = -\frac{2}{3}h^3 + 4h^2 (h > 0)$ 在 $(0, 4)$ 上递增, 在 $(4, +\infty)$ 上递减,

所以当 $h = 4$ 时, V 取得最大值 $-\frac{2}{3} \times 4^3 + 4 \times 4^2 = \frac{64}{3}$,

故答案为: $\frac{64}{3}$.



题目 22 (2023·江苏扬州·统考模拟预测) 已知正四棱锥的侧面是边长为3的正三角形, 它的侧棱的所有三等分点都在同一个球面上, 则该球的表面积为 _____.

【答案】 10π

【解析】 如图, 正四棱锥的侧棱的所有三等分点构成一个正四棱台, 棱台上底面是边长为1的正方形, 棱台下底面是边长为2的正方形, 侧棱长为1,

可求得棱台的高为 $\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

设该棱台的外接球的半径为 r ,

球心到下底面的距离 $\sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2}$,

球心到上底面的距离 $\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$,

① 球心在两个底面之间时,

所以 $\sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $r^2 \geq 2$, 则 $\sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则上式无解;

② 球心在下底面下方时,

$\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

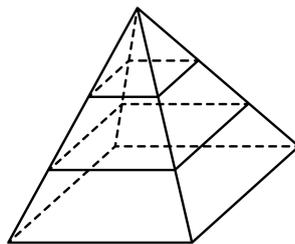
$\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 - (\sqrt{2})^2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

两边同时平方: $r^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2r^2 - 4} + r^2 - 2$,

$\sqrt{2r^2 - 4} = 1$, 解得: $r^2 = \frac{5}{2}$,

表面积 $S = 4\pi r^2 = 10\pi$,

故答案为: 10π .



题型 07 侧棱为外接球直径模型

题目 23 (2023·保山期末) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的顶点都在球 O 的球面上, $\triangle ABC$ 是边长为6的正三角形, SC 为球 O 的直径, 且此三棱锥的体积为 $12\sqrt{3}$, 则球 O 的表面积为 ()

A. 16π

B. 32π

C. 48π

D. 64π

【解析】 解: $\because \triangle ABC$ 是边长为6的正三角形, $\therefore \triangle ABC$ 外接圆的半径 $r = \frac{6}{2\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$,

设点 S 到平面 ABC 的距离为 d ,

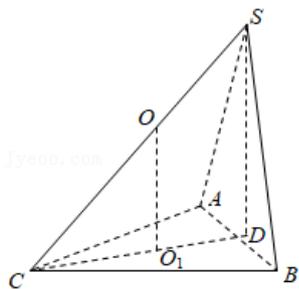
则棱锥 $S-ABC$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} d = 12\sqrt{3}$, 解得 $d = 4$,

又 SC 为球 O 的直径,

\therefore 点 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{d}{2} = 2$, 则三棱锥外接球 O 的半径 $R = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + r^2} = 4$,

可得球的表面积 $S = 4\pi R^2 = 64\pi$.

故选: D .



题目 24 (2023·大连模拟) 球 O 的直径 $SC = 4$, A, B 是该球球面上的两点, $AB = 2$, $\angle ASC = \angle BSC = \frac{\pi}{4}$,

则棱锥 $A-SBC$ 的体积为 ()

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

【解析】解: \because 球 O 的直径 $SC = 4$, A, B 是该球球面上的两点,

$$AB = 2, \angle ASC = \angle BSC = \frac{\pi}{4},$$

\therefore 由题意知, 在棱锥 $S-ABC$ 中,

$\triangle SAC, \triangle SBC$ 都是等腰直角三角形, 其中 $AB = 2, SC = 4$,

$$SA = AC = SB = BC = 2\sqrt{2}.$$

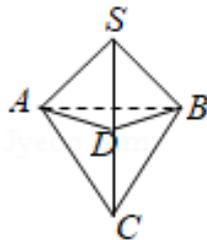
取 SC 的中点 D , 则 $AD \perp SC, BD \perp SC$,

$\therefore SC$ 垂直于面 ABD ,

\therefore 棱锥 $S-ABC$ 的体积为两个棱锥 $S-ABD$ 和 $C-ABD$ 的体积和,

$$\therefore \text{棱锥 } S-ABC \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} SC \cdot S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} \times 4 \times \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故选: D .



题目 25 (2023·迎泽区校级月考) 已知球 O 的直径 $SC = 4$, A, B 是该球面上的两点, 且 $AB = 2, \angle ASC = 30^\circ, \angle BSC = 45^\circ$, 则三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

D. $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

【解析】解: 设球心为 O , 连结 AO, BO ,

$\because SC$ 为球的直径, A, B 是球面上的点, $\therefore \angle SAC = \angle SBC = 90^\circ$.

又 $\because \angle ASC = 30^\circ, \angle SCB = 45^\circ, SC = 4, \therefore AC = 2, AS = 2\sqrt{3}, BS = BC = 2\sqrt{2}$.

又 $\because AB = 2, \therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角 \triangle , $\triangle ABC$ 的外心为 BC 中点 M ,

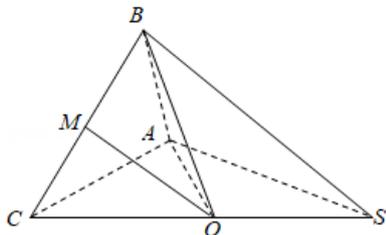
连接 OM , 根据球的性质, 可得 $OM \perp$ 面 ABC ,

在 $\triangle BOC$ 中, $BO = CO = 2, BC = 2\sqrt{2}, \therefore OM = \sqrt{2}$,

$$\therefore V_{O-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot OM = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore V_{S-ABC} = 2V_{O-ABC} = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \text{三棱锥 } S-ABC \text{ 的体积为 } \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

故选: C.



题型 08 共斜边拼接模型

题目 26 (2023·全国·高三专题练习) 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\angle SBA = \angle SCA = \frac{\pi}{2}$, 底面 ABC 是边长为 2 的等边三角形. 若二面角 $S-BC-A$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$, 则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球表面积大小为 ()

A. $\frac{16}{3}\pi$

B. $\frac{17}{3}\pi$

C. $\frac{19}{3}\pi$

D. $\frac{20}{3}\pi$

【答案】C

【解析】解: 取 BC 的中点 O , 连接 SO, AO ,

因为 $\angle SBA = \angle SCA = \frac{\pi}{2}, BA = CA, SA = SA$,

所以 $\triangle SBA \cong \triangle SCA$,

所以 $SB = SC$, 所以 $SO \perp BC, OA \perp BC$,

因此 $\angle SOA = \frac{2\pi}{3}$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角,

设 $SO = x$, 则 $SB = \sqrt{x^2 + 1}$,

$$\therefore \angle SBA = \frac{\pi}{2}, \therefore SA = \sqrt{x^2 + 5},$$

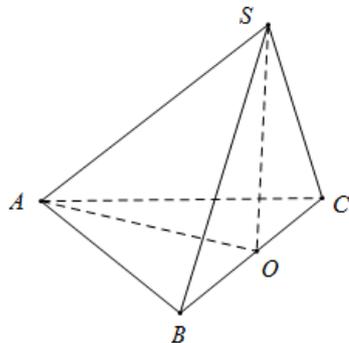
在 $\triangle SOA$ 中, 由余弦定理得 $SO^2 + OA^2 - 2SO \cdot OA \cos \frac{2\pi}{3} = SA^2$,

$$\text{即 } x^2 + 3 + \sqrt{3}x = x^2 + 5, \text{解得: } x = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

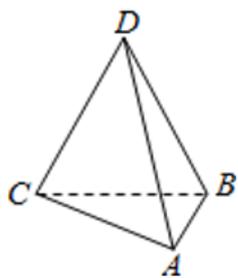
所以三棱锥的外接球的直径 $2R = SA = \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{\frac{19}{3}}$,

所以三棱锥的外接球的表面积为 $S = 4\pi R^2 = \frac{19}{3}\pi$.

故选: C.



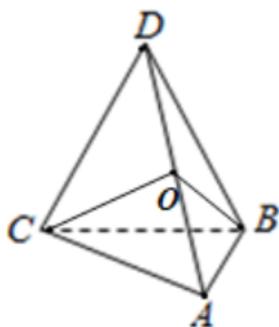
题目 27 (2023·全国·高三专题练习) 三棱锥 $D-ABC$ 中, $AB = DC = 3, AC = DB = 2, AC \perp CD, AB \perp DB$. 则三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积是 ().



- A. 9π B. 13π C. 36π D. 52π

【答案】B

【解析】取 AD 的中点为 O , 连接 OC, OB , 因为 $AC \perp CD, AB \perp DB$



$\therefore OC = OA = OD = OB$ 即 O 为棱锥 $D-ABC$ 外接球的球心,

又 $AB = DC = 3, AC = DB = 2,$

$\therefore AD = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13},$

\therefore 三棱锥 $D-ABC$ 外接球的表面积为 $13\pi.$

故选: B.

题目 28 (多选题) (2023·山东·泰安一中高一期中) 三棱锥 $S-ABC$ 中, 平面 $SAB \perp$ 平面 $ABC, \angle SAB = \angle ABC = 3\angle BAC = 90^\circ, SA = AC = 2,$ 则 ()

- A. $SA \perp BC$ B. 三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为 $\frac{8\pi}{3}$
 C. 点 A 到平面 SBC 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. 二面角 $S-BC-A$ 的正切值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】AD

【解析】对于 A, 因为平面 $SAB \perp$ 平面 $ABC, \angle SAB = 90^\circ,$ 即 $SA \perp AB,$

平面 $SAB \cap$ 平面 $ABC = AB, SA \subset$ 平面 $SAB,$ 所以 $SA \perp$ 平面 $ABC,$

又因为 $BC \subset$ 平面 $ABC,$ 所以 $SA \perp BC,$ 故 A 正确;

对于 B, 因为 $SA \perp BC, AB \perp BC, SA \cap AB = A,$

所以 $BC \perp$ 平面 $SAB,$ 因为 $SB \subset$ 平面 $SAB,$

所以 $BC \perp SB.$ 又 $SA \perp$ 平面 $ABC, AC \subset$ 平面 $ABC,$

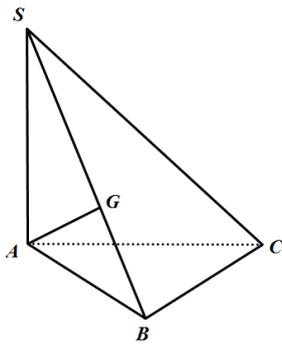
所以 $SA \perp AC,$ 即 $\angle SAC = \angle SBC = 90^\circ,$

所以三棱锥 $S-ABC$ 外接球的直径为 $SC.$ 因为 $SA = AC = 2,$

所以 $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2\sqrt{2},$

所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积 $S = 4\pi \left(\frac{SC}{2}\right)^2 = 4\pi(\sqrt{2})^2 = 8\pi,$ 故 B 错误;

对于 C , 因为 $BC \perp$ 平面 SAB , $BC \subset$ 平面 SBC ,
 所以平面 $SAB \perp$ 平面 SBC , 过点 A 作 $AG \perp SB$, 交 SB 于点 G ,
 根据面面垂直的性质定理, 可得 $AG \perp$ 平面 SBC ,
 故点 A 到平面 SBC 的距离为 AG , 由 $\angle ABC = 3\angle BAC = 90^\circ$, $AC = 2$,
 得 $AB = \sqrt{3}$, 则 $SB = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$,
 则 $AG = \frac{AB \times SA}{SB} = \frac{\sqrt{3} \times 2}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$, 故 C 错误;
 对于 D , $SB \perp BC$, $AB \perp BC$, 所以 $\angle SBA$ 为二面角 $S-BC-A$ 的平面角,
 在 $Rt\triangle SAB$ 中, $\tan \angle SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确;
 故选: AD .

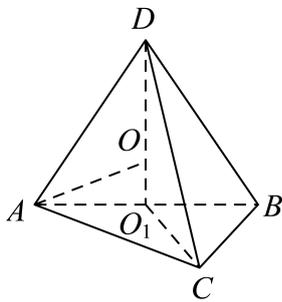


题型 09 垂面模型

题目 29 (2023·贵州贵阳·校联考模拟预测) 在三棱锥 $A-BCD$ 中, 已知 $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, $AD = BD = \sqrt{6}$, 且平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为 ()
 A. 8π B. 9π C. 10π D. 12π

【答案】 B

【解析】 如图, 设外接球的半径为 R , 取 AB 的中点 O_1 , 连接 O_1D , 则由 $AD = BD$, 得 $O_1D \perp AB$,
 因为平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 平面 $ABD \cap$ 平面 $ABC = AB$, $O_1D \subset$ 平面 ABD ,
 所以 $O_1D \perp$ 平面 ABC , 则球心 O 在直线 O_1D 上.
 连接 OA , 则 $OD = OA = R$,
 因为 $AC \perp BC$, $AC = BC = 2$, 所以 $AB = 2\sqrt{2}$;
 因为 $AD = BD = \sqrt{6}$, 所以 $AO_1 = \sqrt{2}$, $O_1D = 2$.
 因为 $O_1D > AO_1$, 所以球心在线段 O_1D 上.
 在 $Rt\triangle O_1OA$ 中, 由勾股定理, 得 $OO_1^2 + O_1A^2 = OA^2$,
 即 $(2 - R)^2 + 2 = R^2$, 解得 $R = \frac{3}{2}$,
 所以三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 9\pi$.
 故选: B .



题目 30 (2023·四川·四川省金堂中学校校联考三模) 如图, 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 4$, $BC = CD = DA = 2$, 将 $\triangle ACD$ 沿对角线 AC 折起, 使得点 D 翻折到点 P , 若面 $PAC \perp$ 面 ABC , 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球表面积为 ()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318033102123006033>