

[义务教育教科书] (RJ) 九上数学课件

第二十二章 二次函数

22.3 实际问题与二次函数

第1课时 几何图形的最大面积

导入新课

讲授新课

当堂练习

课堂小结

学习目标

1. 分析实际问题中变量之间的二次函数关系. (难点)
 2. 会运用二次函数求实际问题中的最大值或最小值.
 3. 能应用二次函数的性质解决图形中最大面积问题. (重点)
-

复习引入

写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并写出其最值.

(1) $y=x^2-4x-5$; (配方法)

(2) $y=-x^2-3x+4$. (公式法)

解：(1) 开口方向：向上；对称轴： $x=2$ ；顶点坐标：
(2, -9)；最小值：-9；

(2) 开口方向：向下；对称轴： $x=-\frac{3}{2}$ ；顶点坐标：
 $(-\frac{3}{2}, \frac{25}{4})$ ；最大值： $\frac{25}{4}$.

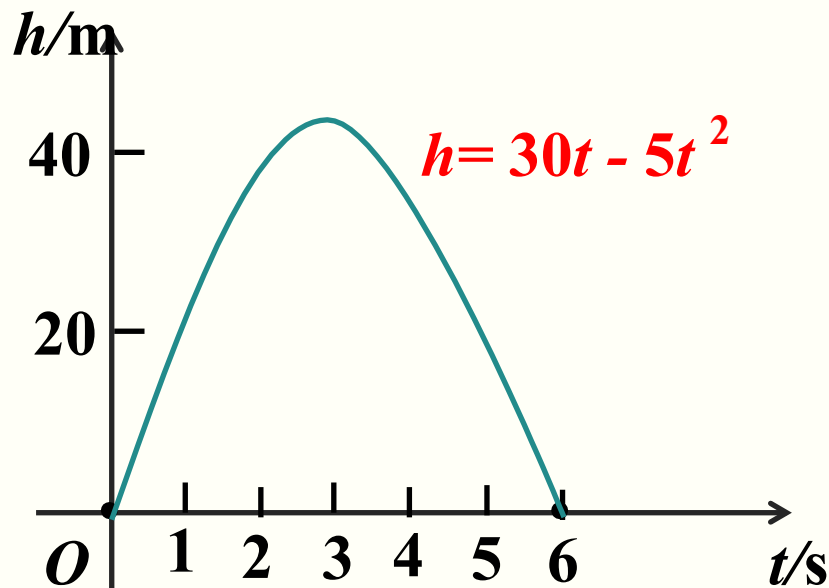
二次函数与几何图形面积的最值

引例 从地面竖直向上抛出一小球，小球的高度 h （单位：m）与小球的运动时间 t （单位：s）之间的关系式是 $h = 30t - 5t^2$

（ $0 \leq t \leq 6$ ）。小球的运动时间是多少时，小球最高？小球运动中的最大高度是多少？

可以看出，这个函数的图象是一条抛物线的一部分，这条抛物线的顶点是这个函数的图象的最高点。

也就是说，当 t 取顶点的横坐标时，这个函数有最大值。



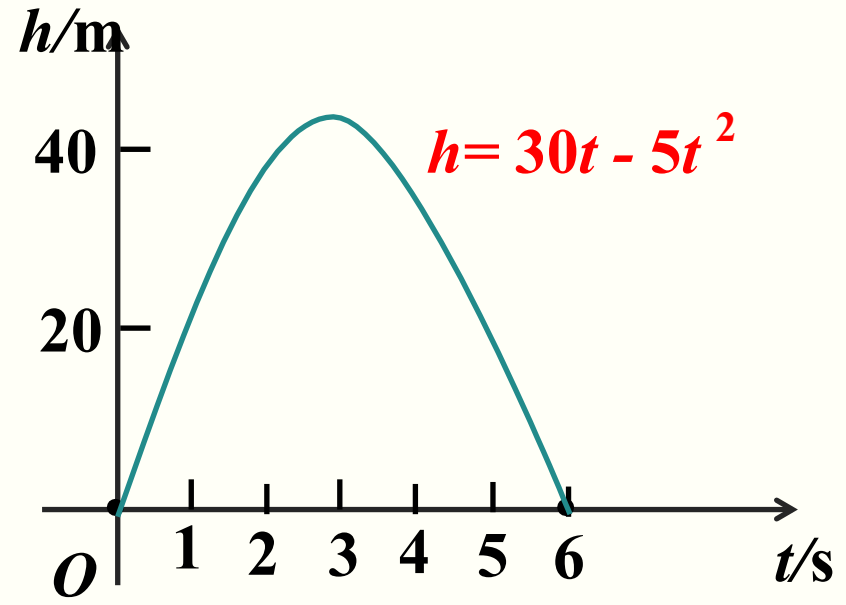
如何求出二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的最小（大）值？

由于抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的顶点是最低（高）点，
当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最小（大）值

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

$$t = -\frac{b}{2a} = -\frac{30}{2 \times (-5)} = 3,$$

$$h = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-30^2}{4 \times (-5)} = 45.$$



小球运动的时间是 3s 时，小球最高. 小球运动中的最大高度是 45 m.

典例精析

例 用总长为60m的篱笆围成矩形场地，矩形面积 S 随矩形一边长 l 的变化而变化. 当 l 是多少时，场地的面积 S 最大？

问题1 矩形面积公式是什么？

问题2 如何用 l 表示另一边？

问题3 面积 S 的函数关系式是什么？

例 用总长为60m的篱笆围成矩形场地，矩形面积 S 随矩形一边长 l 的变化而变化. 当 l 是多少时，场地的面积 S 最大？

解：根据题意得

$$S=l(30-l),$$

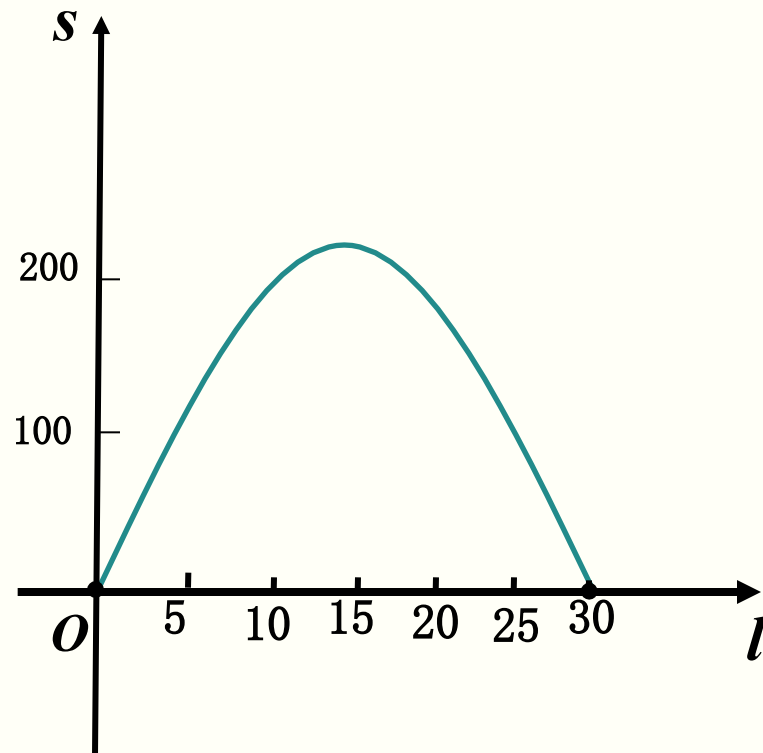
$$\text{即 } S=-l^2+30l \quad (0<l<30).$$

$$\text{因此，当 } l=-\frac{b}{2a}=-\frac{30}{2\times(-1)}=15$$

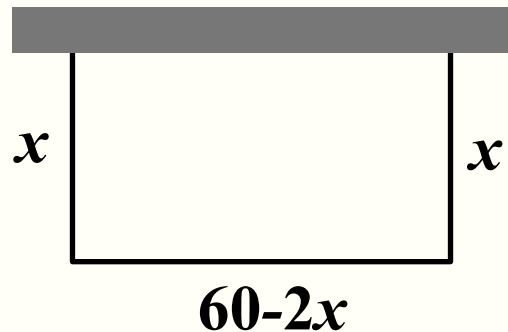
$$\text{时， } \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-30^2}{4\times(-1)}=225$$

S 有最大值

也就是说，当 l 是15m时，场地的面积 S 最大.



变式1 如图，用一段长为60m的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长32m，这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少？



问题1 变式1与例题有什么不同？

问题2 我们可以设面积为 S ，如何设自变量？

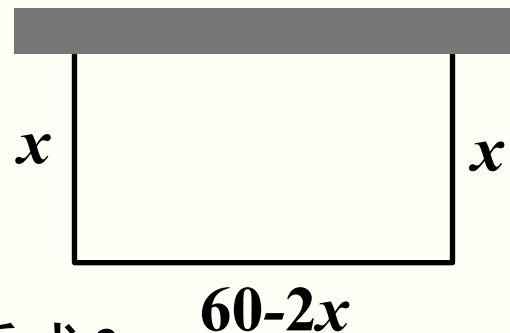
问题3 面积 S 的函数关系式是什么？

设垂直于墙的边长为 x 米， $S = x(60 - 2x) = -2x^2 + 60x$.

问题4 如何求解自变量 x 的取值范围？墙长32m对此题有什么作用？ $0 < 60 - 2x \leq 32$ ，即 $14 \leq x < 30$.

问题5 如何求最值？最值在其顶点处，即当 $x = 15\text{m}$ 时， $S = 450\text{m}^2$

变式2 如图，用一段长为60m的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长18m，这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大，最大面积是多少？



问题1 变式2与变式1有什么异同？

问题2 可否模仿变式1设未知数、列函数关系式？

问题3 可否试设与墙平行的一边为 x 米？则如何表示另一边？

答案：设矩形面积为 $S\text{m}^2$ ，与墙平行的一边为 x 米，则

$$S = \frac{60-x}{2} \cdot x = -\frac{1}{2}x^2 + 30x$$

问题4 当 $x=30$ 时, S 取最大值, 此结论是否正确?

不正确.

问题5 如何求自变量的取值范围?

$$0 < x \leq 18.$$

问题6 如何求最值?

由于 $30 > 18$, 因此只能利用函数的增减性求其最值. 当 $x=18$ 时, S 有最大值是378.

实际问题中求解二次函数最值问题，不一定都取图象顶点处，要根据自变量的取值范围.通过变式1与变式2的对比，希望同学们能够理解函数图象的顶点、端点与最值的关系，以及何时取顶点处、何时取端点处才有符合实际的最值.

二次函数解决几何面积最值问题的方法

1. 求出函数解析式和自变量的取值范围；
2. 配方变形，或利用公式求它的最大值或最小值，
3. 检查求得的最大值或最小值对应的自变量的值必须在自变量的取值范围内.

当堂练习

1. 如图1，用长8m的铝合金条制成如图的矩形窗框，

那么最大的透光面积是 $\frac{8}{3}m^2$.

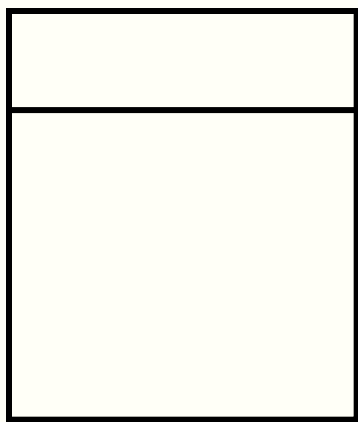


图1

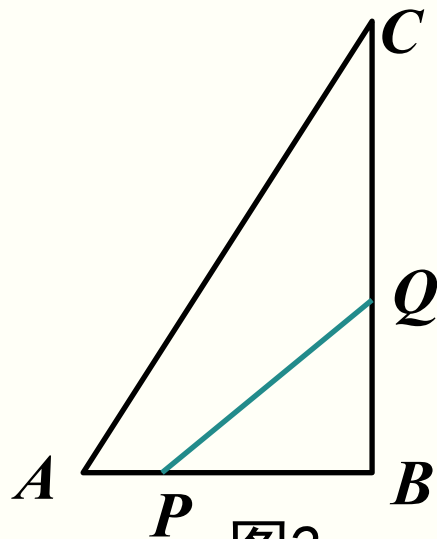


图2

2. 如图2，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$, $AB=12\text{cm}$, $BC=24\text{cm}$ ，动点 P 从点 A 开始沿 AB 向 B 以 2cm/s 的速度移动（不与点 B 重合），动点 Q 从点 B 开始沿 BC 以 4cm/s 的速度移动（不与点 C 重合）. 如果 P 、 Q 分别从 A 、 B 同时出发，那么经过 3 秒，四边形 $APQC$ 的面积最小.

3. 某广告公司设计一幅周长为12m的矩形广告牌，广告设计费用每平方米1000元，设矩形的一边长为 x (m)，面积为 S (m^2)。

- (1) 写出 S 与 x 之间的关系式，并写出自变量 x 的取值范围；
- (2) 请你设计一个方案，使获得的设计费最多，并求出这个费用。

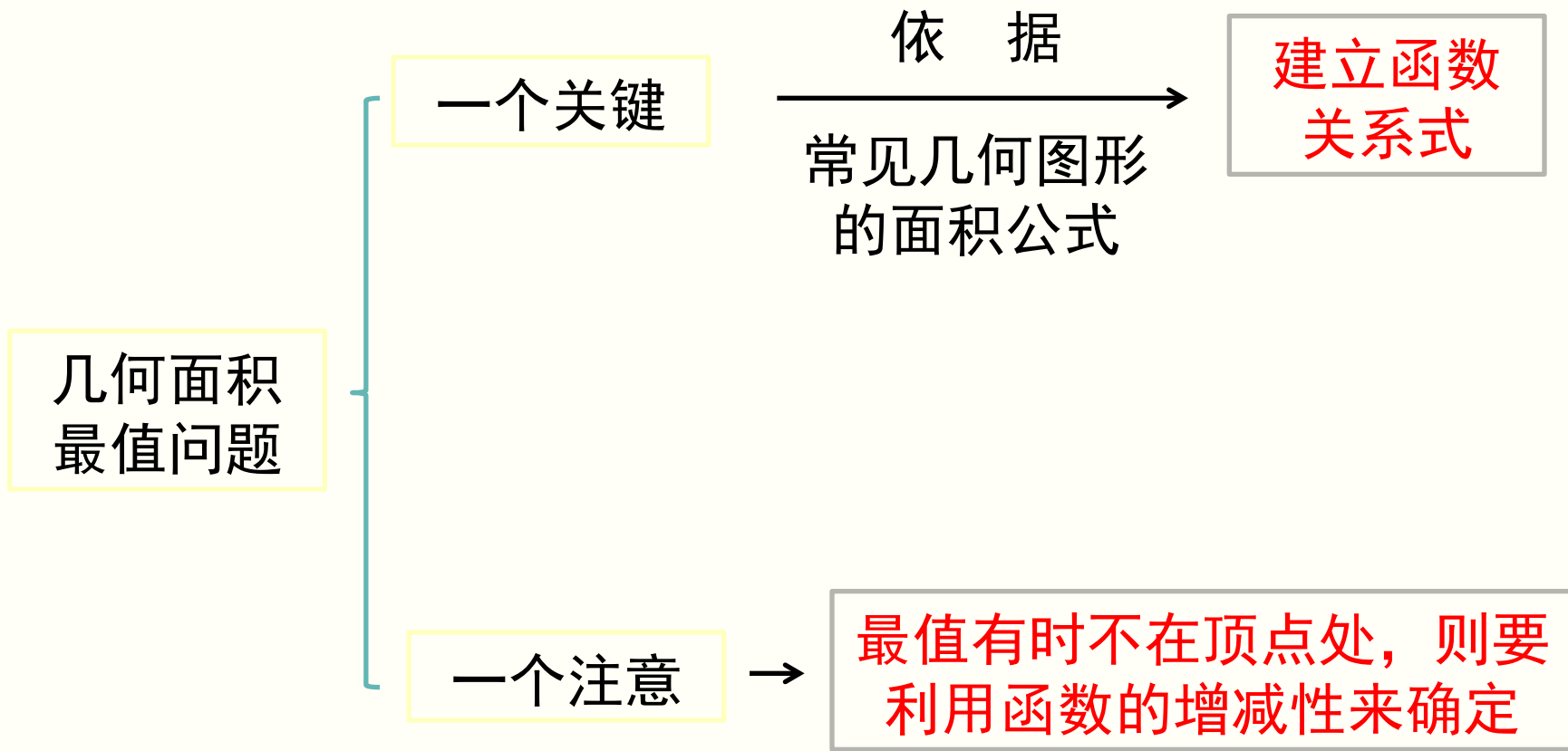
解： (1) 设矩形一边长为 x ，则另一边长为 $(6-x)$ ，

$$\therefore S = x(6-x) = -x^2 + 6x, \text{ 其中 } 0 < x < 6.$$

$$(2) S = -x^2 + 6x = -(x-3)^2 + 9;$$

\therefore 当 $x=3$ 时，即矩形的一边长为3m时，矩形面积最大，为 $9m^2$ 。

这时设计费最多，为 $9 \times 1000 = 9000$ （元）



见本课时练习

谢谢！

[义务教育教科书] (RJ) 九上数学课件

第二十二章 二次函数

22.3 实际问题与二次函数

第2课时 商品利润最大问题

导入新课

讲授新课

当堂练习

课堂小结

学习目标

- 1.能应用二次函数的性质解决商品销售过程中的最大利润问题
（重点）
- 2.弄清商品销售问题中的数量关系及确定自变量的取值范围.
（难点）

情境引入

在日常生活中存在着许许多多的与数学知识有关的实际问题. 商品买卖过程中, 作为商家追求利润最大化是永恒的追求.



如果你是商场经理, 如何定价才能使商场获得最大利润呢?

一 利润问题中的数量关系

探究交流

某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件，已知商品的进价为每件40元，则每星期销售额是18000元，销售利润6000元.

数量关系

- (1) 销售额= 售价 \times 销售量;
- (2) 利润= 销售额-总成本=单件利润 \times 销售量;
- (3) 单件利润=售价-进价.

二 如何定价利润最大

例1 某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件，市场调查反映：每涨价1元，每星期少卖出10件；每降价1元，每星期可多卖出18件，已知商品的进价为每件40元，如何定价才能使利润最大？

u涨价销售

①每件涨价 x 元，则每星期售出商品的利润 y 元，填空：

	单件利润（元）	销售量（件）	每星期利润（元）
正常销售	20	300	6000
涨价销售	$20+x$	$300-10x$	$y=(20+x)(300-10x)$

建立函数关系式： $y=(20+x)(300-10x)$,

即： $y=-10x^2+100x+6000$.

②自变量 x 的取值范围如何确定？

营销规律是价格上涨，销量下降，因此只要考虑销售量就可以，故 $300-10x \geq 0$ ，且 $x \geq 0$ ，因此自变量的取值范围是 $0 \leq x \leq 30$ 。

③涨价多少元时，利润最大，最大利润是多少？

$$y = -10x^2 + 100x + 6000,$$

$$\text{当 } x = -\frac{100}{2 \times (-10)} = 5 \text{ 时, } y = -10 \times 5^2 + 100 \times 5 + 6000 = 6250.$$

即定价65元时，最大利润是6250元。

例1 某商品现在的售价为每件60元，每星期可卖出300件，市场调查反映：每涨价1元，每星期少卖出10件；每降价1元，每星期可多卖出18件，已知商品的进价为每件40元，如何定价才能使利润最大？

u 降价销售

①每件降价 x 元，则每星期售出商品的利润 y 元，填空：

	单件利润（元）	销售量（件）	每星期利润（元）
正常销售	20	300	6000
降价销售	$20-x$	$300+18x$	$y=(20-x)(300+18x)$

建立函数关系式： $y=(20-x)(300+18x)$ ，

即： $y=-18x^2+60x+6000$ 。

②自变量 x 的取值范围如何确定？

营销规律是价格下降，销量上升，因此只要考虑单件利润就可以，故 $20-x \geq 0$ ，且 $x \geq 0$ ，因此自变量的取值范围是 $0 \leq x \leq 20$ 。

③涨价多少元时，利润最大，是多少？

即： $y = -18x^2 + 60x + 6000$ ，

当 $x = -\frac{60}{2 \times (-18)} = \frac{5}{3}$ 时， $y = -18 \times \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 60 \times \frac{5}{3} + 6000 = 6050$ 。

即定价57.5元时，最大利润是6050元。

由(1)(2)的讨论及现在的销售情况，你知道应该如何定价能使利润最大了吗？

知识要点

求解最大利润问题的一般步骤

(1) 建立利润与价格之间的函数关系式：

运用“总利润=总售价-总成本”或“总利润=单件利润×销售量”

(2) 结合实际意义，确定自变量的取值范围；

(3) 在自变量的取值范围内确定最大利润：

可以利用配方法或公式求出最大利润；也可以画出函数的简图，利用简图和性质求出。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/318034000063006075>