习题课

（刚体定轴转动部分）

1. 刚体定轴转动定律： $M = J\beta$

$$J = \sum m_i r_i^2 \qquad J = \int r^2 dm$$

平行轴定理： $J = J_c + md^2$

2. 刚体定轴转动的角动量定理：

$$\mathrm{M_z} = \frac{\mathrm{dL_z}}{\mathrm{dt}} \qquad (L_z = J_z \omega)$$

3. 角动量守恒定律： 若$M_z \equiv 0$, 则$L_{z1} =$ 恒量

4. 刚体转动动能定理：

$$A = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2 \qquad \mathrm{A} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{M}\,\mathrm{d}\theta$$

5. 功能原理

6. 机械能守恒定律

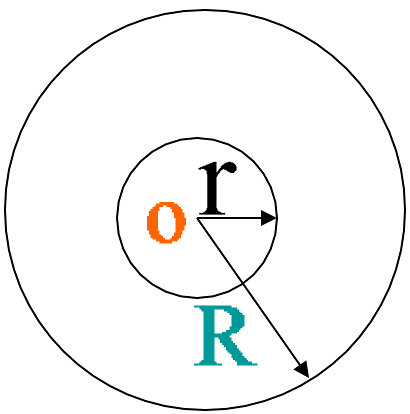
$$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2 \qquad \mathrm{E_p} = \mathrm{mgh_c}$$

1. 注意以下几个问题：

(1) 粘接在一起的两个圆盘（或圆柱）

它们的角速度和角加速度均相同，

但不同半径处的速度和加速度不同。



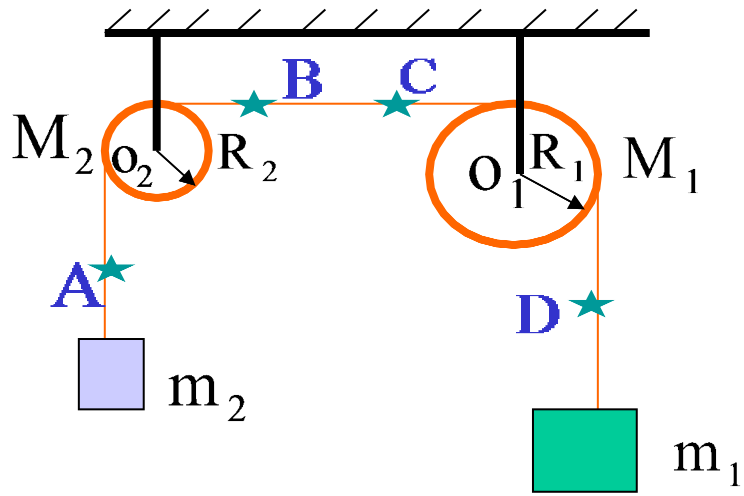
如图，在r处：

$$\upsilon = r\omega \qquad a_t = r\beta$$

在R处：

$$\upsilon = R\omega \qquad a_t = R\beta$$

（2）用一根绳连接两个或多个刚体



- 同一根绳上各点的切向加速度相同；线速度也相同；

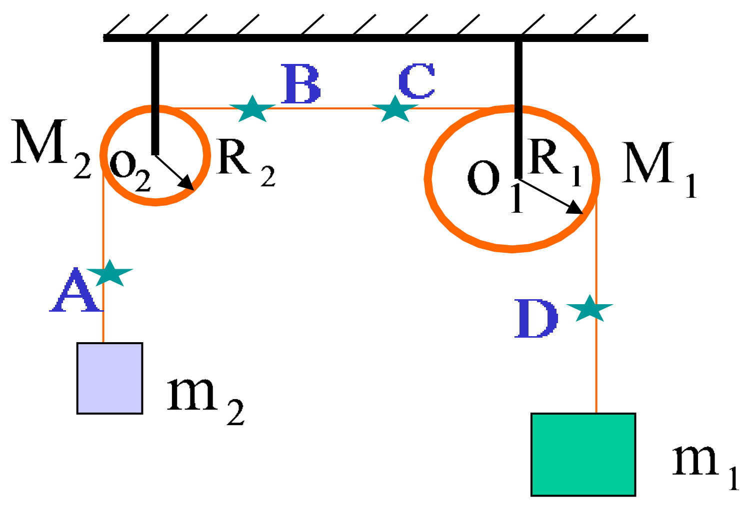
$$a_t(A)=a_t(B)=a_t(C)=a_t(D)$$

$$\upsilon(A)=\upsilon(B)=\upsilon(C)=\upsilon(D)$$

- 跨过有质量的圆盘两边的绳子中的张力不相等；

$$T_A \neq T_B \neq T_D$$

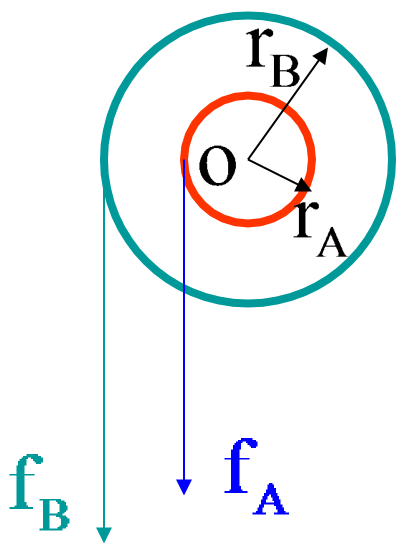
但 $T_B = T_C$



- 两个圆盘的角速度和角加速度不相等。

$$\omega_1 \neq \omega_2 \qquad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

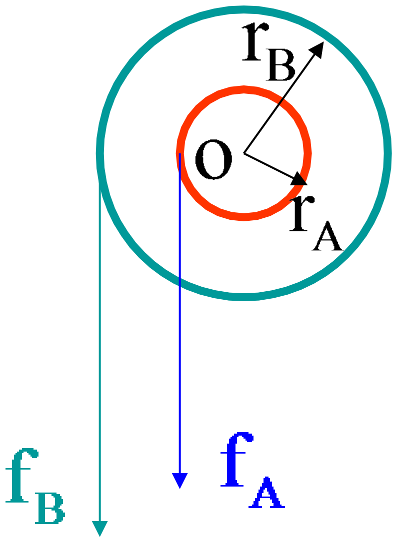
2. 如图，转轮A、B可分别独立地绕o轴转动。A、B轮的质量分别为 $m_A=10kg$ 和 $m_B=20kg$,半径分别为r_A和r_B。现分别用f_A和f_B分别拉系在轮上的细绳且使绳与轮间无滑动。为使A、B两轮边缘处切向加速度相同，相应的拉力f_A和f_B之比为多少？



解：A、B滑轮视为两个刚体

由转动定律： $M=J\beta$

滑轮边缘的切向加速度 $a_t=r\beta$



$$a_t = r\beta = r\frac{M}{J} = r\frac{r\cdot f}{\frac{1}{2}mr^2} = \frac{2f}{m}$$

由题意：$a_{t_A} = a_{t_B}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2f_A}{m_A} = \frac{2f_B}{m_B}$$

解出：$\dfrac{f_A}{f_B} = \dfrac{m_A}{m_B} = \dfrac{1}{2}$

3. 现有质量相同，厚度相同的铁质和木质圆板各一个。令其各自绕通过圆板中心且与圆板垂直的光滑轴转动。设其角速度也相同。某时刻起两者受到同样大小的阻力矩，问：哪种质料的圆板先停止转动？

解：铁质和木质圆板的转动惯量分别为：

$$J_{铁}=\frac{1}{2}mR_{铁}^{2} \qquad J_{木}=\frac{1}{2}mR_{木}^{2}$$

$$\text{Q} \quad R_{铁}<R_{木} \qquad \therefore \quad J_{铁}<J_{木}$$

由角动量定理得：

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{J\Delta\omega}{\Delta t}$$

由题意： M相同，$\Delta\omega$也相同，所以：

$$\frac{J_{铁}}{\Delta t_{铁}} = \frac{J_{木}}{\Delta t_{木}}$$

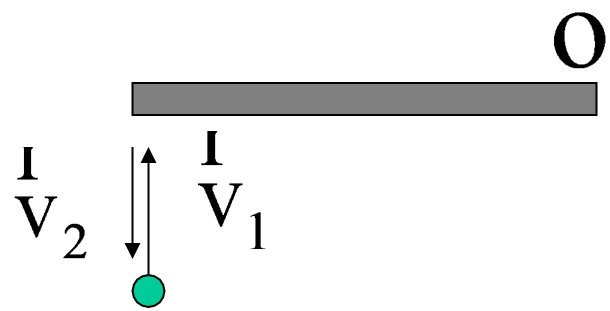
$$\Delta t_{木} = \frac{J_{木}}{J_{铁}} \Delta t_{铁} > \Delta t_{铁}$$

因此，铁圆板先停

4. 质量为M长为L的均质细棒静止平放在滑动摩擦系数为 μ 的水平桌面上。它可绕O点垂直于桌面的固定光滑轴转动。另有一水平运动的质量为m的小滑块，从侧面垂直于棒方向与棒发生碰撞，设碰撞时间极短。已知碰撞前后小滑块速度分别为 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$。求细棒碰撞后直到静止所需的时间是多少？

解： m与M碰撞过程，

系统（m,M）对O轴角动量守恒

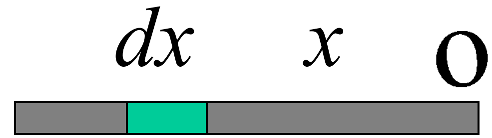


$$mv_1L = -mv_2L + J\omega$$

$$J = \frac{1}{3}ML^2$$

碰后细棒转动直至停止，受摩擦阻力矩作用

m与M碰撞之后：



$$M_f = -\int_L xdf = -\int_0^L x\mu(\lambda dx)g = -\frac{1}{2}\mu MgL$$

由转动定律 $$M = J\frac{d\omega}{dt}$$

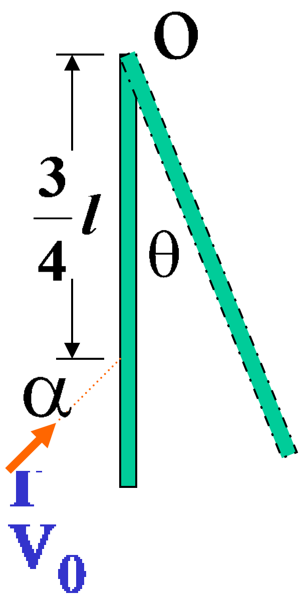
有：$$\int_0^t M_f dt = J\int_\omega^0 d\omega$$

解出： $$t = \frac{2m(v_1 + v_2)}{\mu Mg}$$

5. 一质量为M、长为 l 的均匀细棒，悬在通过其上O且与棒垂直的水平光滑固定轴上而自由下垂，如图所示。现有一质量为m的小泥团以与水平方向夹角为 α ，速度为 $\vec{v}_0$ 击在棒长的 $\frac{3}{4}$ 处，并粘在其上。

求（1） 细棒被击中后的角速度；

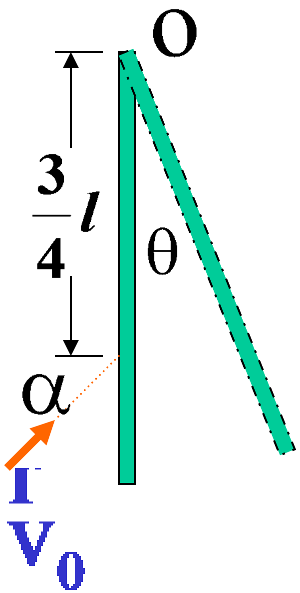
（2）细棒摆到最高点时，细棒与铅直方向间的夹角 θ 。



解：（1） 选细棒、泥团为系统。

泥团击中后系统的转动惯量为：

$$I=\frac{1}{3}Ml^2+m\left(\frac{3}{4}l\right)^2$$

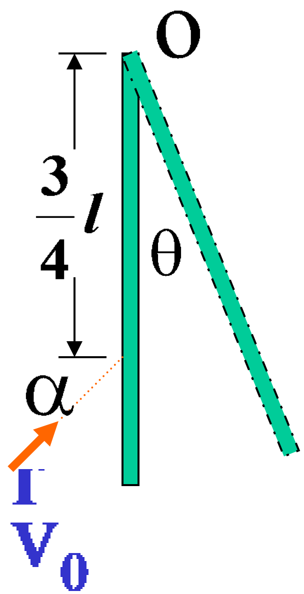


在泥团与细棒碰撞过程中对轴O的

角动量守恒！

$$mv_0\left(\frac{3}{4}l\right)\sin(90^0+\alpha)=I\omega$$

$$\therefore\quad \omega=\frac{36mv_0\cos\alpha}{(16M+27m)l}$$



（2）选细棒、泥团和地为系统。

在摆动过程中，机械能守恒。

$$\frac{1}{2}I\omega^2 \quad -Mg\frac{l}{2} \quad -mg\frac{3}{4}l$$

$$=0 \quad -Mg\frac{l}{2}\cos\theta \quad -mg\frac{3}{4}l\cos\theta$$

解出：

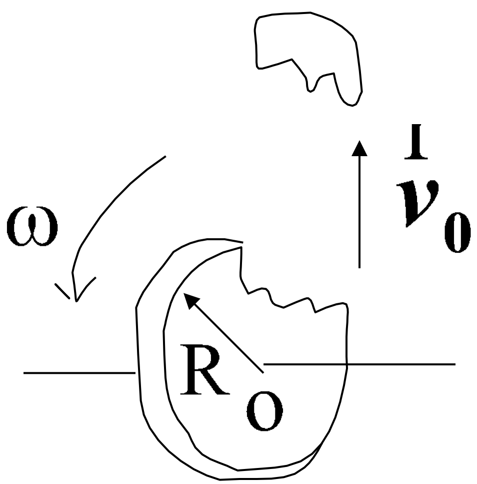
$$\theta=\cos^{-1}\left[1-\frac{54m^2v_0^2\cos^2\alpha}{(2M+3m)(16M+27m)gl}\right]$$

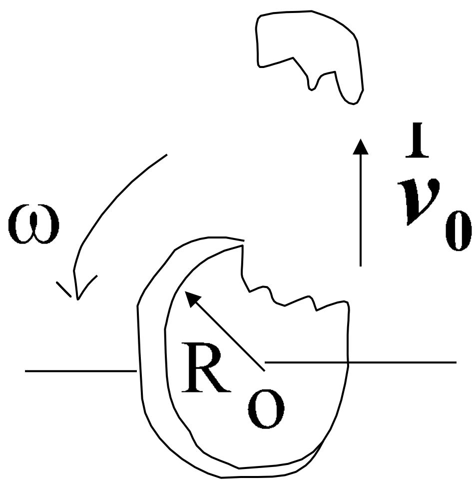
6. 质量为**M**,半径为**R**并以角速度 ω 旋转的飞轮，在某一瞬时，突然有一片质量为**m**的碎片从轮的边缘飞出。假定碎片脱离了飞轮时的速度正好向上。

求（1） 碎片上升的高度 H=?

（2） 余下部分的 $\omega' = ?$

角动量及动能又各为多少?





解（1）碎片作匀加速运动.

$$v_0 = R\omega \qquad v = 0$$

$$|H| = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$

（2）系统（碎片和圆盘余下部分）

对O轴角动量守恒.（为什么？）

$$I\omega = I'\omega' + mv_0R$$