第2课时　直线和椭圆的位置关系

新知导学

1．点与椭圆的位置关系

点 $P(x_0，y_0)$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的位置关系：点 P 在椭圆上⇔$\underline{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1}$；

点 P 在椭圆内部⇔$\underline{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}<1}$；

点 P 在椭圆外部⇔$\underline{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}>1}$.

2．直线与椭圆的位置关系

直线 $y=kx+m$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的位置关系判断方法：由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.\end{cases}$消去 y(或 x)得到一个一元二次方程．

位置关系	解的个数	Δ的取值
相交	两解	Δ___>___0
相切	一解	Δ___=___0
相离	无解	Δ___<___0

3、弦长问题

若直线$l: y = kx + m$与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的交点为$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$则|AB|叫做弦长。

弦长公式：

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_1 - x_2|$$

$$|AB| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot \sqrt{(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \cdot |y_1 - y_2|$$

4．弦长公式推导

(1)弦长公式：$|P_1P_2|=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|$或$|P_1P_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}|y_2-y_1|$.

(2)弦长公式的推导：

直线 l：$y=kx+b$ 与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$相交于两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$且 $y_1=kx_1+b$，$y_2=kx_2+b$.

由两点间的距离公式得$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(kx_2-kx_1)^2}=\sqrt{(1+k^2)(x_2-x_1)^2}$

$=\sqrt{1+k^2}|x_2-x_1|$，

其中求$|x_2-x_1|$与$|y_2-y_1|$时通常使用根与系数的关系，即作如下变形$|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$；$|y_2-y_1|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$.

典题例证技法归纳

题型探究

题型一　直线与椭圆的位置关系

例1　当 m 为何值时，直线 $y=x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 相交？相切？相离？

【解】　由$\begin{cases} y=x+m \\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1 \end{cases}$，得 $25x^2+32mx+16m^2-144=0$，

$\therefore \Delta=(32m)^2-4\times25\times(16m^2-144)$

$=9\times4^3(25-m^2)$.

当 $\Delta>0$，即 $-5<m<5$ 时，直线和椭圆相交；

当 $\Delta=0$，即 $m=\pm5$ 时，直线和椭圆相切；

当 $\Delta<0$,即 $m>5$ 或 $m<-5$ 时,直线和椭圆相离.

综上所述，当 $m>5$ 或 $m<-5$ 时直线与椭圆相离；当 $m=\pm5$ 时，直线与椭圆相切；当 $-5<m<5$ 时，直线与椭圆相交.

【名师点评】　判断直线与椭圆的位置关系的常用方法为：联立直线与椭圆方程，消去y或x，得到关于x或y的一元二次方程,记该方程的判别式为Δ,则(1)直线与椭圆相交⇔Δ>0；(2)直线与椭圆相切⇔Δ＝0；(3)直线与椭圆相离⇔Δ<0.

变式训练

1.已知椭圆$4x^2+y^2=1$及直线$y=x+m$.当直线和椭圆有公共点时，求实数m的取值范围.

解：由$\begin{cases}4x^2+y^2=1\\y=x+m\end{cases}$，得 $5x^2+2mx+m^2-1=0$.

因为直线与椭圆有公共点，

所以$\Delta=4m^2-20(m^2-1)\geq 0$.

解得$-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq m\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$.

题型二　中点弦问题

例2　焦点分别为$(0，5\sqrt{2})$和$(0，-5\sqrt{2})$的椭圆截直线 $y=3x-2$ 所得椭圆的弦的中点的横坐标为$\frac{1}{2}$，求此椭圆的方程.

【解】　法一：设所求方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，

且 $a^2-b^2=(5\sqrt{2})^2=50$.①

由$\begin{cases}\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\\ y=3x-2\end{cases}$，

得$(a^2+9b^2)x^2-12b^2x+4b^2-a^2b^2=0$，

设 $y=3x-2$ 与椭圆的交点坐标为$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{6b^2}{a^2+9b^2}$.

$\because\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{6b^2}{a^2+9b^2}=\frac{1}{2}$，

$\therefore a^2=3b^2$　②，

由①②解得：$a^2=75$，$b^2=25$，此时 $\Delta>0$，$\therefore\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{75}=1$.

法二：设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

直线 $y=3x-2$ 与椭圆交于 A、B 两点.

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$$\begin{cases}\frac{y_1^2}{a^2}+\frac{x_1^2}{b^2}=1 & ① \\ \frac{y_2^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1 & ②\end{cases}$$

①－②得

$$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{a^2}=-\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{b^2},$$

即$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{a^2(x_1+x_2)}{-b^2(y_1+y_2)}=-\frac{a^2x_1+x_2}{b^2y_1+y_2}$.

$\because k_{AB}=3$，AB 中点(x_0,y_0)，$x_0=\frac{1}{2}$，$y_0=-\frac{1}{2}$，

$\therefore 3=-\frac{a^2}{b^2}\frac{2\times\frac{1}{2}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{a^2}{b^2}$，

$\therefore a^2=3b^2$.又 $a^2-b^2=(5\sqrt{2})^2=50$，$\therefore a^2=75$，$b^2=25$，

$\therefore$椭圆方程为$\frac{y^2}{75}+\frac{x^2}{25}=1$.

【名师点评】　关于中点的问题一般地可以采用两种方法解决：(1)联立方程组，消元，利用根与系数的关系进行设而不解，从而简化运算解题；(2)利用“点差法”，求出与中点、斜率有关的式子，进而求解，同学们可以试一试．不管应用何种方法我们都必须注意判别式Δ的限制．