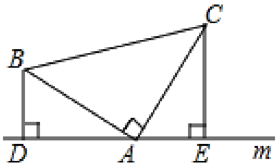
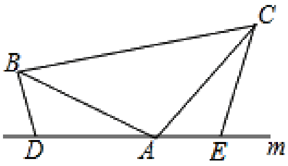
实验中学八年级上册压轴题数学模拟试卷

一、压轴题

1．问题背景：（1）如图 1，已知△ABC 中，∠BAC＝90°，AB＝AC，直线 m 经过点 A，BD⊥直线 m，CE⊥直线 m，垂足分别为点 D、E．求证：DE＝BD＋CE．



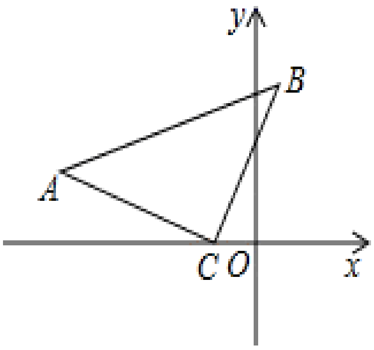
图①



图②

拓展延伸：（2）如图 2，将（1）中的条件改为：在△ABC 中，AB＝AC，D、A、E 三点都在直线 m 上，并且有∠BDA＝∠AEC＝∠BAC．请写出 DE、BD、CE 三条线段的数量关系．（不需要证明）

实际应用：（3）如图，在△ACB 中，∠ACB＝90°，AC＝BC，点 C 的坐标为(－2，0)，点 A 的坐标为(－6，3)，请直接写出 B 点的坐标．



2．已知在△ABC 中，AB＝AC，射线 BM、BN 在∠ABC 内部，分别交线段 AC 于点 G、H．

（1）如图 1，若∠ABC＝60°，∠MBN＝30°，作 AE⊥BN 于点 D，分别交 BC、BM 于点 E、F．

①求证：∠1＝∠2；

②如图 2，若 BF＝2AF，连接 CF，求证：BF⊥CF；

（2）如图 3，点 E 为 BC 上一点，AE 交 BM 于点 F，连接 CF，若∠BFE＝∠BAC＝2∠CFE，求 $\dfrac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ACF}}$ 的值．

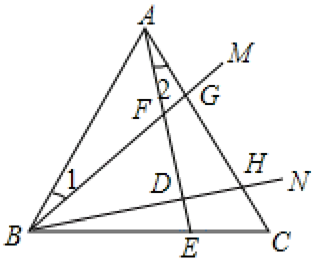


图1

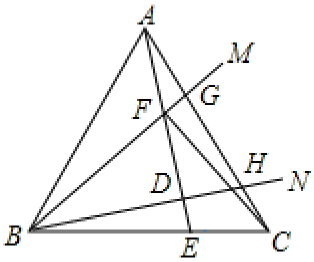


图2

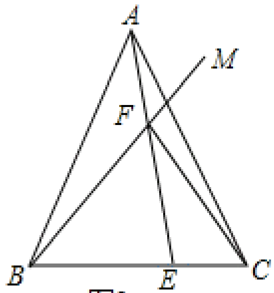


图3

3．问题情景：数学课上，老师布置了这样一道题目，如图 1，△ABC 是等边三角形，点 D 是 BC 的中点，且满足∠ADE＝60°，DE 交等边三角形外角平分线于点 E．试探究 AD 与 DE

的数量关系．

操作发现：（1）小明同学过点 D 作 DF∥AC 交 AB 于 F，通过构造全等三角形经过推理论证就可以解决问题，请您按照小明同学的方法确定 AD 与 DE 的数量关系，并进行证明．

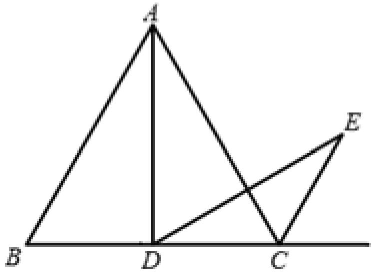


图 1

类比探究：（2）如图 2，当点 D 是线段 BC 上任意一点(除 B、C 外)，其他条件不变，试猜想 AD 与 DE 之间的数量关系，并证明你的结论．

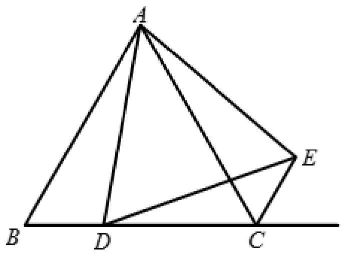


图 2

拓展应用：（3）当点 D 在线段 BC 的延长线上，且满足 CD＝BC，在图 3 中补全图形，直接判断△ADE 的形状(不要求证明)．

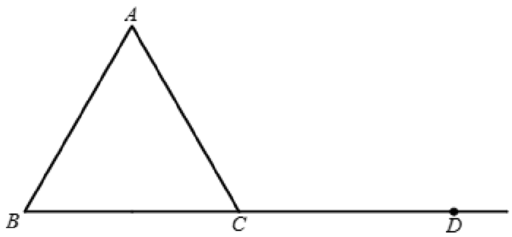


图 3

4．阅读下面材料，完成(1)-(3)题．

数学课上，老师出示了这样一道题：

如图 1，已知等腰△ABC 中，AB＝AC，AD 为 BC 边上的中线，以 AB 为边向 AB 左侧作等边△ABE，直线 CE 与直线 AD 交于点 F．请探究线段 EF、AF、DF 之间的数量关系，并证明．

同学们经过思考后，交流了自已的想法：

小明：“通过观察和度量，发现∠DFC 的度数可以求出来．”

小强：“通过观察和度量，发现线段 DF 和 CF 之间存在某种数量关系．”

小伟：“通过做辅助线构造全等三角形，就可以将问题解决．”

......

老师：“若以 AB 为边向 AB 右侧作等边△ABE，其它条件均不改变，请在图 2 中补全图形，探究线段 EF、AF、DF 三者的数量关系，并证明你的结论．”

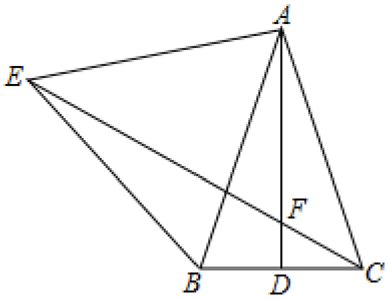


图 1

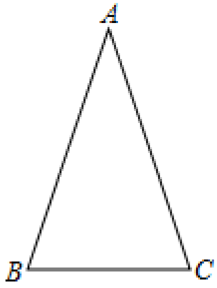


图 2

（1）求∠DFC 的度数；

（2）在图 1 中探究线段 EF、AF、DF 之间的数量关系，并证明；

（3）在图 2 中补全图形，探究线段 EF、AF、DF 之间的数量关系，并证明．

5．请按照研究问题的步骤依次完成任务．

（问题背景）

（1）如图 1 的图形我们把它称为“8 字形”， 请说理证明∠A+∠B=∠C+∠D．

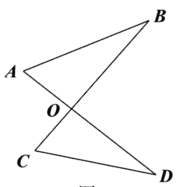


图1

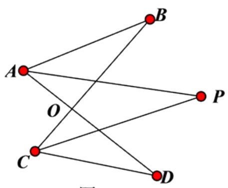


图2

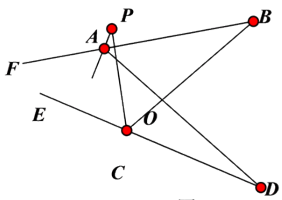


图3

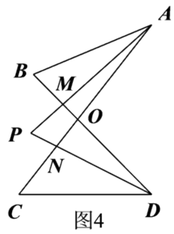


图4

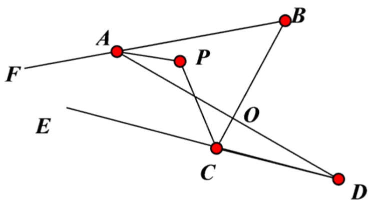


图5

（简单应用）

（2）如图 2，AP、CP 分别平分∠BAD、∠BCD，若∠ABC=20°，∠ADC=26°，求∠P 的度数（可直接使用问题（1）中的结论）

（问题探究）

（3）如图 3，直线 AP 平分∠BAD 的外角∠FAD，CP 平分∠BCD 的外角∠BCE， 若∠ABC=36°，∠ADC=16°，猜想∠P 的度数为__；

（拓展延伸）

（4）在图 4 中，若设∠C=x，∠B=y，∠CAP=$\frac{1}{3}$∠CAB，∠CDP=$\frac{1}{3}$∠CDB，试问∠P 与∠C、∠B 之间的数量关系为___（用 x、y 表示∠P）；

（5）在图 5 中，AP 平分∠BAD，CP 平分∠BCD 的外角∠BCE，猜想∠P 与∠B、D 的关系，直接写出结论．

6．在等边△*ABC* 的顶点 *A*、*C* 处各有一只蜗牛，它们同时出发，分别以每分钟 1 米的速度由 *A* 向 *B* 和由 *C* 向 *A* 爬行，其中一只蜗牛爬到终点时，另一只也停止运动，经过 *t*

分钟后，它们分别爬行到 *D*、*E* 处，请问：

（1）如图 1，在爬行过程中，*CD* 和 *BE* 始终相等吗，请证明？

（2）如果将原题中的“由 *A* 向 *B* 和由 *C* 向 *A* 爬行”，改为“沿着 *AB* 和 *CA* 的延长线爬行”，*EB* 与 *CD* 交于点 *Q*，其他条件不变，蜗牛爬行过程中∠*CQE* 的大小保持不变，请利用图 2 说明：∠*CQE*=60°；

（3）如果将原题中“由 *C* 向 *A* 爬行”改为“沿着 *BC* 的延长线爬行，连接 *DE* 交 *AC* 于 *F*”，其他条件不变，如图 3，则爬行过程中，证明：*DF*=*EF*

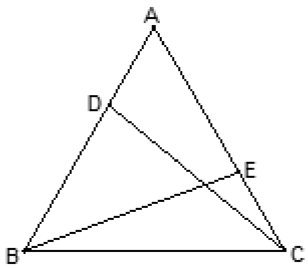


图1

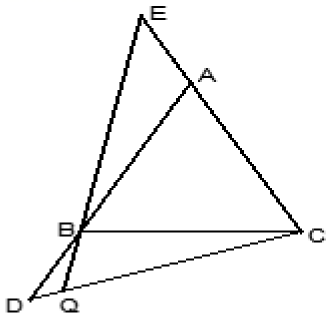


图2

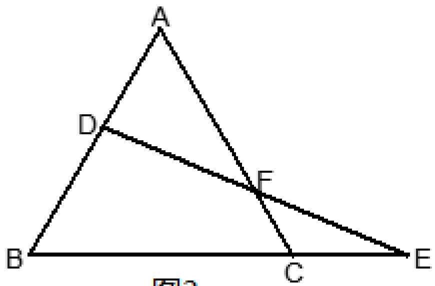


图3

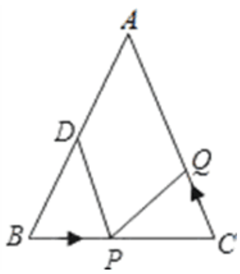
7．如图，已知△ABC 中，AB=AC=10cm，BC=8cm，点 D 为 AB 的中点．如果点 P 在线段 BC 上以 3cm/s 的速度由 B 点向 C 点运动，同时，点 Q 在线段 CA 上由 C 点向 A 点运动．

（1）若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，经过 1s 后，BP=___cm，CQ=___cm．

（2）若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，经过 1s 后，△BPD 与△CQP 是否全等，请说明理由；

（3）若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度不相等，当点 Q 的运动速度为多少时，能够使△BPD 与△CQP 全等？

（4）若点 Q 以（3）中的运动速度从点 C 出发，点 P 以原来的运动速度从点 B 同时出发，都逆时针沿△ABC 三边运动，求经过多长时间点 P 与点 Q 第一次相遇？



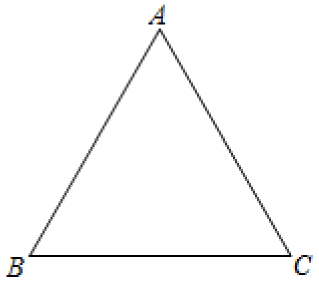
8．如图，△*ABC* 是等边三角形，△*ADC* 与△*ABC* 关于直线 *AC* 对称，*AE* 与 *CD* 垂直交 *BC*

的延长线于点 E，$\angle EAF=45^\circ$，且 AF 与 AB 在 AE 的两侧，$EF\perp AF$．

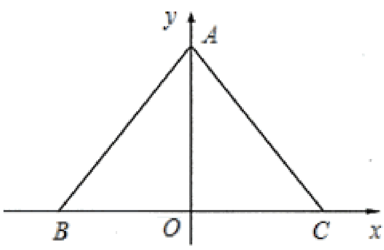
（1）依题意补全图形．

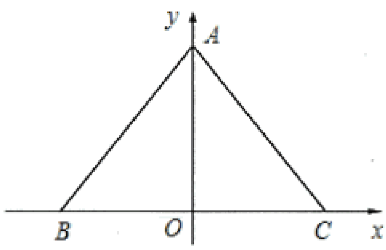
（2）①在 AE 上找一点 P，使点 P 到点 B，点 C 的距离和最短；

②求证：点 D 到 AF，EF 的距离相等．

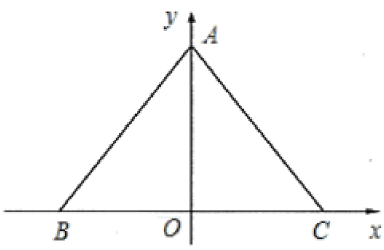


9．如图，ΔABC 在平面直角坐标系中，$\angle BAC=60^\circ$，$A\left(0,4\sqrt{3}\right)$，$AB=8$，点 B、C 在 x 轴上且关于 y 轴对称．





备用图



备用图

（1）求点 C 的坐标；

（2）动点 P 以每秒 2 个单位长度的速度从点 B 出发沿 x 轴正方向向终点 C 运动，设运动时间为 t 秒，点 P 到直线 AC 的距离 PD 的长为 d，求 d 与 t 的关系式；

（3）在（2）的条件下，当点 P 到 AC 的距离 PD 为 $3\sqrt{3}$ 时，连接 AP，作 $\angle ACB$ 的平分线分别交 PD、PA 于点 M、N，求 MN 的长．

10．如图 1．在△ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=10$，直线 DE 经过点 C，过点 A，B 分别作 $AD\perp DE$，$BE\perp DE$，垂足分别为点 D 和 E，$AD=8$，$BE=6$．

（1）①求证：△ADC≌△CEB；②求 DE 的长；

（2）如图 2，点 M 以 3 个单位长度/秒的速度从点 C 出发沿着边 CA 运动，到终点 A，点 N 以 8 个单位长度/秒的速度从点 B 出发沿着线 BC—CA 运动，到终点 A．M，N 两点同时出发，运动时间为 t 秒($t>0$)，当点 N 到达终点时，两点同时停止运动，过点 M 作 $PM\perp DE$ 于点 P，过点 N 作 $QN\perp DE$ 于点 Q；

①当点 N 在线段 CA 上时，用含有 t 的代数式表示线段 CN 的长度；
②当 t 为何值时，点 M 与点 N 重合；
③当△PCM 与△QCN 全等时，则 t=________.

图 1

11．对 x、y 定义一种新运算 T，规定：$T\left(x,y\right)=\left(mx+ny\right)\left(x+2y\right)$（其中 m、n 均为非零常数）．例如：$T\left(1,1\right)=3m+3n$．

（1）已知 $T\left(1,-1\right)=0,T\left(0,2\right)=8$．

①求 m、n 的值；

②若关于 p 的不等式组 $\begin{cases}T\left(2p,2-p\right)>4\\T\left(4p,3-2p\right)\le a\end{cases}$ 恰好有 3 个整数解，求 a 的取值范围；

（2）当 $x^2\ne y^2$ 时，$T\left(x,y\right)=T\left(y,x\right)$ 对任意有理数 x,y 都成立，请直接写出 m、n 满足的关系式．

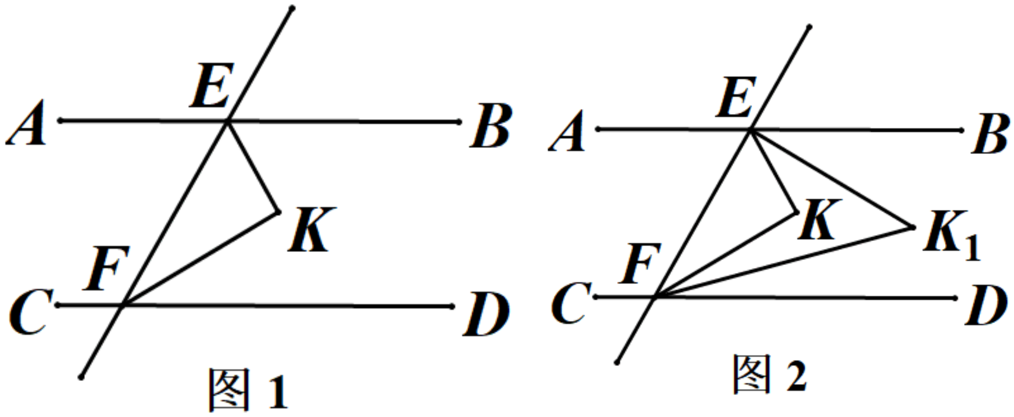
学习参考：①$a\left(b+c\right)=ab+ac$，即单项式乘以多项式就是用单项式去乘多项式的每一项，再把所得的结果相加；②$\left(a+b\right)\left(m+n\right)=am+an+bm+bn$，即多项式乘以多项式就是用一个多项式的每一项去乘另一个多项式的每一项，再把所得的结果相加．

12．已知：如图 1，直线 $AB//CD$，EF 分别交 AB，CD 于 E，F 两点，$\angle BEF$，$\angle DFE$ 的平分线相交于点 K.

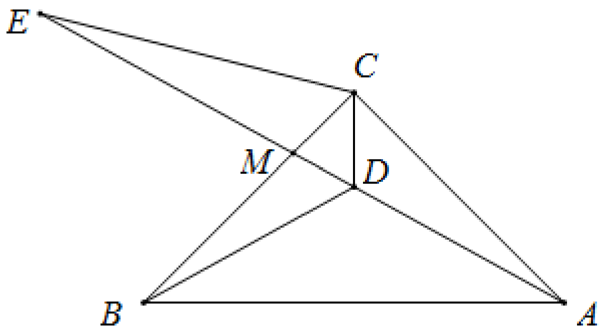
（1）求 $\angle K$ 的度数；

（2）如图 2，$\angle BEK$，$\angle DFK$ 的平分线相交于点 K_1，问 $\angle K_1$ 与 $\angle K$ 的度数是否存在某种特定的等量关系？写出结论并证明；

（3）在图 2 中作 $\angle BEK_1$，$\angle DFK_1$ 的平分线相交于点 K_2，作 $\angle BEK_2$，$\angle DFK_2$ 的平分线相交于点 K_3，依此类推，作 $\angle BEK_n$，$\angle DFK_n$ 的平分线相交于点 K_{n+1}，请用含的 n 式子表示 $\angle K_{n+1}$ 的度数．（直接写出答案，不必写解答过程）



13．如图，在ΔABC中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，点D为ΔABC内一点，且$BD=AD$.



（1）求证：$CD\perp AB$；

（2）若$\angle CAD=15°$，E为AD延长线上的一点，且$CE=CA$.

①求$\angle BDC$的度数.

②若点M在DE上，且$DC=DM$，请判断ME、BD的数量关系，并说明理由.

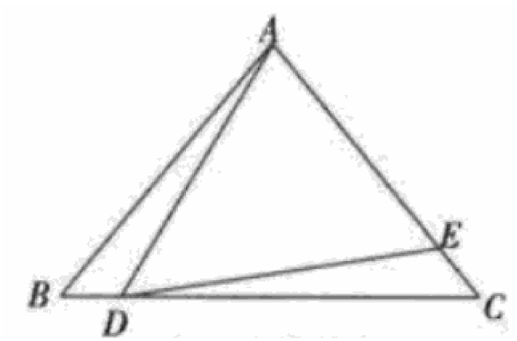
③若点N为直线AE上一点，且ΔCEN为等腰Δ，直接写出$\angle CNE$的度数.

14．如图，在$\triangle ABC$中，$AB=AC=3$，$\angle B=\angle C=50°$，点 D 在边 BC 上运动（点 D 不与点B,C重合），连接 AD，作$\angle ADE=50°$，DE 交边 AC 于点 E.

（1）当$\angle BDA=100°$时，$\angle EDC=$____°，$\angle DEC=$____°

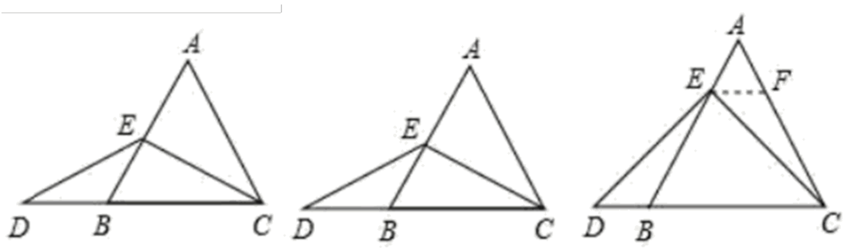
（2）当 DC 等于多少时，$\triangle ABD\cong\triangle DCE$，请说明理由；

（3）在点 D 的运动过程中，$\triangle ADE$的形状可以是等腰三角形吗？若可以，请求出$\angle BDA$的度数；若不可以，请说明理由.



15．小敏与同桌小颖在课下学习中遇到这样一道数学题：“如图（1），在等边三角形

ABC 中，点 E 在 AB 上，点 D 在 CB 的延长线上，且 $ED=EC$，试确定线段 AE 与 DB 的大小关系，并说明理由”．小敏与小颖讨论后，进行了如下解答：



图（1）　　　　　　　　图（2）　　　　　　图（3）

（1）取特殊情况，探索讨论：当点 E 为 AB 的中点时，如图（2），确定线段 AE 与 DB 的大小关系，请你写出结论：AE _____ DB（填“＞”，“＜”或“＝”），并说明理由．

（2）特例启发，解答题目：

解：题目中，AE 与 DB 的大小关系是：AE _____ DB（填“＞”，“＜”或“＝”）．理由如下：

如图（3），过点 E 作 $EF//BC$，交 AC 于点 F．（请你将剩余的解答过程完成）

（3）拓展结论，设计新题：在等边三角形 ABC 中，点 E 在直线 AB 上，点 D 在直线 BC 上，且 $ED=EC$，若△ ABC 的边长为1，$AE=2$，求 CD 的长（请你画出图形，并直接写出结果）．

16. （阅读材料）：

（1）在 ΔABC 中，若 $\angle C=90°$，由“三角形内角和为 180°”得 $\angle A+\angle B=180°-\angle C=180°-90°=90°$．

（2）在 ΔABC 中，若 $\angle A+\angle B=90°$，由“三角形内角和为 180°”得 $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)=180°-90°=90°$．

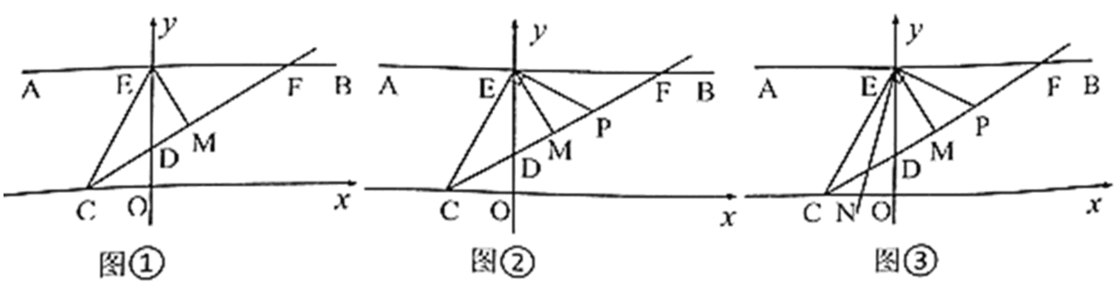
（解决问题）：

如图①，在平面直角坐标系中，点 C 是 x 轴负半轴上的一个动点．已知 $AB//x$ 轴，交 y 轴于点 E，连接 CE，CF 是∠ECO 的角平分线，交 AB 于点 F，交 y 轴于点 D．过 E 点作 EM 平分∠CEB，交 CF 于点 M．

（1）试判断 EM 与 CF 的位置关系，并说明理由；

（2）如图②，过 E 点作 PE⊥CE，交 CF 于点 P．求证：∠EPC=∠EDP；

（3）在（2）的基础上，作 EN 平分∠AEP，交 OC 于点 N，如图③．请问随着 C 点的运动，∠NEM 的度数是否发生变化？若不变，求出其值：若变化，请说明理由．



17. 已知：MN∥PQ，点 A，B 分别在 MN，PQ 上，点 C 为 MN，PQ 之间的一点，连接

CA，CB．

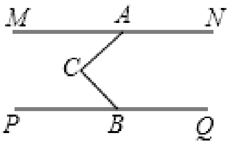


图1

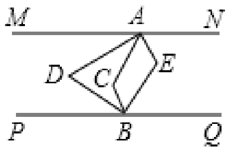


图2

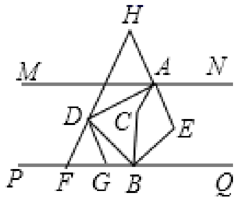


图3

（1）如图 1，求证：∠C=∠MAC+∠PBC；

（2）如图 2，AD，BD，AE，BE 分别为∠MAC，∠PBC，∠CAN，∠CBQ 的角平分线，求证：∠D+∠E=180°；

（3）在（2）的条件下，如图 3，过点 D 作 DA 的垂线交 PQ 于点 G，点 F 在 PQ 上，∠FDA=2∠FDB，FD 的延长线交 EA 的延长线于点 H，若 3∠C=4∠E，猜想∠H 与∠GDB 的倍数关系并证明．

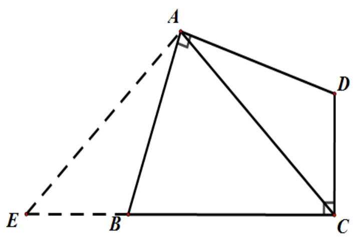
18．阅读材料并完成习题：

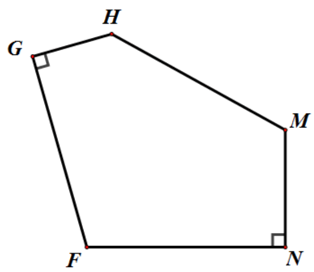
在数学中，我们会用“截长补短”的方法来构造全等三角形解决问题．请看这个例题：如图 1，在四边形 ABCD 中，∠BAD=∠BCD=90°，AB=AD，若 AC=2cm，求四边形 ABCD 的面积．

解：延长线段 CB 到 E，使得 BE=CD，连接 AE，我们可以证明△BAE≌△DAC，根据全等三角形的性质得 AE=AC=2，∠EAB=∠CAD，则 ∠EAC=∠EAB+∠BAC=∠DAC+∠BAC=∠BAD=90°，得 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEC}$，这样，四边形 ABCD 的面积就转化为等腰直角三角形 EAC 面积．

（1）根据上面的思路，我们可以求得四边形 ABCD 的面积为___ cm^2．

（2）请你用上面学到的方法完成下面的习题．





如图 2，已知 FG=FN=HM=GH+MN=2cm，∠G=∠N=90°，求五边形 FGHMN 的面积．

19．已知 $AB // CD$，点 E 是平面内一点，$\angle CDE$ 的角平分线与 $\angle ABE$ 的角平分线交于点 F．

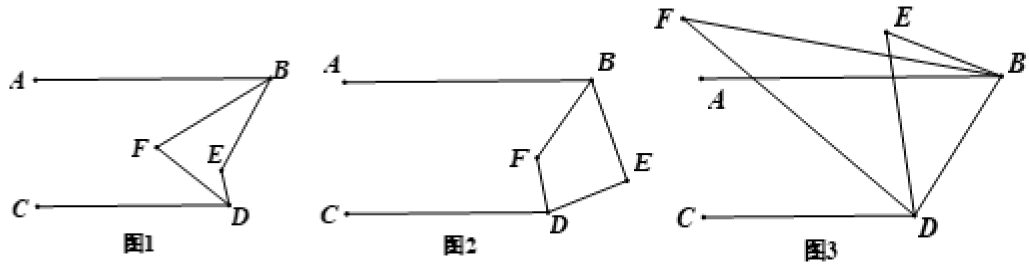
（1）若点 E 的位置如图 1 所示．

①若 $\angle ABE=60°$，$\angle CDE=80°$，则 $\angle F=$____°；

②探究 $\angle F$ 与 $\angle BED$ 的数量关系并证明你的结论；

（2）若点 E 的位置如图 2 所示，$\angle F$ 与 $\angle BED$ 满足的数量关系式是____．

（3）若点 E 的位置如图 3 所示，$\angle CDE$ 为锐角，且 $\angle E \geq \frac{1}{2}\angle F + 45°$，设 $\angle F=\alpha$，则 α 的取值范围为____．



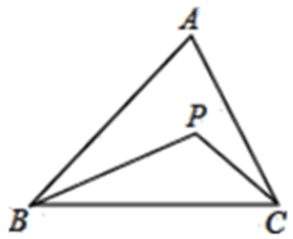
20．已知∨ABC，P是平面内任意一点（A、B、C、P中任意三点都不在同一直线上）．连接PB、PC，设∠PBA＝s°，∠PCA＝t°，∠BPC＝x°，∠BAC＝y°．

（1）如图，当点P在∨ABC内时，

①若y＝70，s＝10，t＝20，则x＝____；

②探究s、t、x、y之间的数量关系，并证明你得到的结论．

（2）当点P在∨ABC外时，直接写出s、t、x、y之间所有可能的数量关系，并画出相应的图形．



【参考答案】***试卷处理标记，请不要删除

一、压轴题

1．（1）证明见解析；（2）DE＝BD＋CE；（3）B(1，4)

【解析】

【分析】

（1）证明△ABD≌△CAE，根据全等三角形的性质得到AE=BD，AD=CE，结合图形解答即可；

（2）根据三角形内角和定理、平角的定义证明∠ABD=∠CAE，证明△ABD≌△CAE，根据全等三角形的性质得到AE=BD，AD=CE，结合图形解答即可；

（3）根据△AEC≌△CFB，得到CF=AE=3，BF=CE=OE-OC=4，根据坐标与图形性质解答．

【详解】

（1）证明：∵BD⊥直线m，CE⊥直线m，

∴∠ADB＝∠CEA＝90°

∵∠BAC＝90°

∴∠BAD＋∠CAE＝90°

∵∠BAD＋∠ABD＝90°

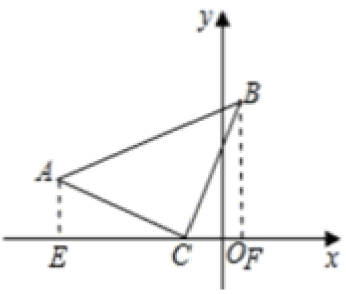
∴∠CAE＝∠ABD
∵在△ADB 和△CEA 中

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE\\ \angle ADB=\angle CEA\\ AB=CA\end{cases}$$

∴△ADB≌△CEA（AAS）
∴AE＝BD，AD＝CE
∴DE＝AE＋AD＝BD＋CE
即：DE＝BD＋CE
（2）解：数量关系：DE＝BD＋CE
理由如下：在△ABD 中，∠ABD=180°-∠ADB-∠BAD，
∵∠CAE=180°-∠BAC-∠BAD，∠BDA=∠AEC，
∴∠ABD=∠CAE，
在△ABD 和△CAE 中，

$$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE\\ \angle BDA=\angle AEC\\ AB=CA\end{cases}$$

∴△ABD≌△CAE（AAS）
∴AE=BD，AD=CE，
∴DE=AD+AE=BD+CE；
（3）解：如图，作 AE⊥x 轴于 E，BF⊥x 轴于 F，
由（1）可知，△AEC≌△CFB，
∴CF=AE=3，BF=CE=OE-OC=4，
∴OF=CF-OC=1，
∴点 B 的坐标为 B（1，4）．



【点睛】
本题考查的是全等三角形的判定和性质、坐标与图形性质，掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键．
2．（1）①见解析；②见解析；（2）2
【解析】
【分析】
（1）①只要证明∠2+∠BAF＝∠1+∠BAF＝60°即可解决问题；

②只要证明△BFC≌△ADB，即可推出∠BFC＝∠ADB＝90°；

（2）在 BF 上截取 BK＝AF，连接 AK．只要证明△ABK≌CAF，可得 $S_{\triangle ABK}=S_{\triangle AFC}$，再证明 AF＝FK＝BK，可得 $S_{\triangle ABK}=S_{\triangle AFK}$，即可解决问题；

【详解】

（1）①证明：如图 1 中，

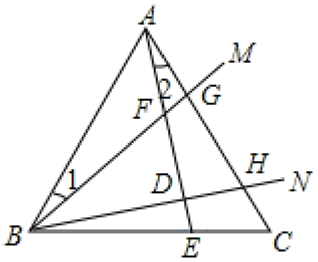


图1

∵AB＝AC，∠ABC＝60°

∴△ABC 是等边三角形，

∴∠BAC＝60°，

∵AD⊥BN，

∴∠ADB＝90°，

∵∠MBN＝30°，

∠BFD＝60°＝∠1+∠BAF＝∠2+∠BAF，

∴∠1＝∠2

②证明：如图 2 中，

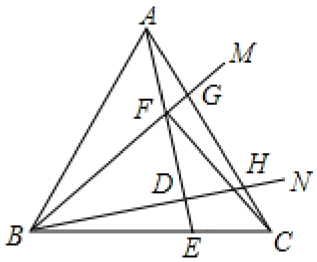


图2

在 Rt△BFD 中，∵∠FBD＝30°，

∴BF＝2DF，

∵BF＝2AF，

∴BF＝AD，

∵∠BAE＝∠FBC，AB＝BC，

∴△BFC≌△ADB，

∴∠BFC＝∠ADB＝90°，

∴BF⊥CF

（2）在 BF 上截取 BK＝AF，连接 AK．

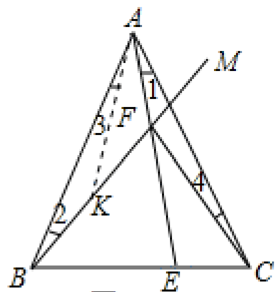


图3

∵∠BFE＝∠2+∠BAF，∠CFE＝∠4+∠1，

∴∠CFB＝∠2+∠4+∠BAC，

∵∠BFE＝∠BAC＝2∠EFC，

∴∠1+∠4＝∠2+∠4

∴∠1＝∠2，∵AB＝AC，

∴△ABK≌CAF，

∴∠3＝∠4，$S_{\triangle ABK}$＝$S_{\triangle AFC}$，

∵∠1+∠3＝∠2+∠3＝∠CFE＝∠AKB，∠BAC＝2∠CEF，

∴∠KAF＝∠1+∠3＝∠AKF，

∴AF＝FK＝BK，

∴$S_{\triangle ABK}$＝$S_{\triangle AFK}$，

∴$\dfrac{S_{\Delta ABF}}{S_{\Delta AFC}}=2$.

【点睛】

本题考查全等三角形的判定和性质、等边三角形的性质、等腰三角形的判定和性质、直角三角形30度角性质等知识，解题的关键是能够正确添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考压轴题.

3．（1）AD＝DE，见解析；（2）AD＝DE，见解析；（3）见解析，△ADE是等边三角形，

【解析】

【分析】

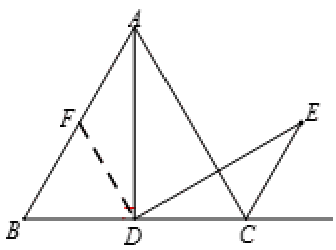
（1）根据题意，通过平行线的性质及等边三角形的性质证明$\Delta ADF \cong \Delta EDC$即可得解；

（2）根据题意，通过平行线的性质及等边三角形的性质证明$\Delta AFD \cong \Delta DCE$即可得解；

（3）根据垂直平分线的性质及等边三角形的判定定理进行证明即可.

【详解】

（1）如下图，数量关系：*AD*＝*DE*.



证明：∵ΔABC是等边三角形

∴$AB=BC$，$\angle B=\angle BAC=\angle BCA=60°$

∵$DF\parallel AC$

∴$\angle BFD=\angle BAC$，$\angle BDF=\angle BCA$

∴$\angle B=\angle BFD=\angle BDF=60°$

∴ΔBDF 是等边三角形，$\angle AFD=120°$

∴$DF=BD$

∵点 D 是 BC 的中点

∴$BD=CD$

∴$DF=CD$

∵CE 是等边ΔABC的外角平分线

∴$\angle DCE=120°=\angle AFD$

∵ΔABC是等边三角形，点 D 是 BC 的中点

∴$AD\perp BC$

∴$\angle ADC=90°$

∵$\angle BDF=\angle ADE=60°$

∴$\angle ADF=\angle EDC=30°$

在ΔADF与ΔEDC中

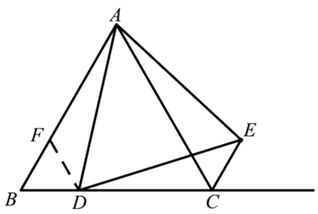
$$\begin{cases}\angle AFD=\angle ECD\\ DF=CD\\ \angle ADF=\angle EDC\end{cases}$$

∴$\Delta ADF\cong\Delta EDC(ASA)$

∴$AD=DE$；

（2）结论：$AD=DE$.

证明：如下图，过点 D 作 $DF\parallel AC$，交 AB 于 F



∵ΔABC是等边三角形

∴$AB=BC$，$\angle B=\angle BAC=\angle BCA=60°$

∵$DF\parallel AC$

∴$\angle BFD=\angle BAC$，$\angle BDF=\angle BCA$

∴$\angle B=\angle BFD=\angle BDF=60°$

∴ΔBDF 是等边三角形，$\angle AFD=120°$

∴$BF=BD$

∴$AF=DC$

∵CE 是等边ΔABC的外角平分线

$\therefore \angle DCE = 120° = \angle AFD$

$\because \angle ADC$ 是 ΔABD 的外角

$\therefore \angle ADC = \angle B + \angle FAD = 60° + \angle FAD$

$\because \angle ADC = \angle ADE + \angle CDE = 60° + \angle CDE$

$\therefore \angle FAD = \angle CDE$

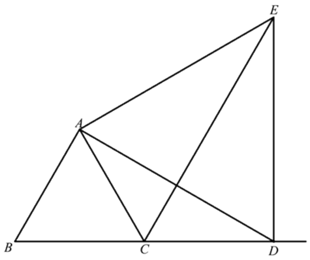
在 ΔAFD 与 ΔDCE 中

$$\begin{cases} \angle AFD = \angle DCE \\ AF = CD \\ \angle FAD = \angle EDC \end{cases}$$

$\therefore \Delta AFD \cong \Delta DCE(ASA)$

$\therefore AD = DE$;

（3）如下图，ΔADE 是等边三角形.



证明：$\because BC = CD$

$\therefore AC = CD$

$\because CE$ 平分 $\angle ACD$

$\therefore CE$ 垂直平分 AD

$\therefore AE=DE$

$\because \angle ADE = 60°$

$\therefore \Delta ADE$ 是等边三角形.

【点睛】

本题主要考查了等边三角形的性质及判定，三角形全等的判定及性质，平行线的性质，垂直平分线的性质等相关内容，熟练掌握三角形综合解决方法是解决本题的关键.

4．（1）60°；（2）EF=AF+FC，证明见解析；（3）AF=EF+2DF，证明见解析.

【解析】

【分析】

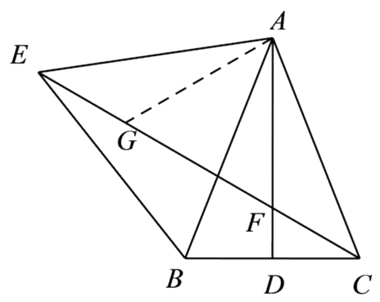
（1）可设∠BAD＝∠CAD＝α，∠AEC＝∠ACE＝β，在△ACE 中，根据三角形内角和可得 2α＋60＋2β＝180°，从而有 α＋β＝60°，即可得出∠DFC 的度数；

（2）在 EC 上截取 EG＝CF，连接 AG，证明△AEG≌△ACF，然后再证明△AFG 为等边三角形，从而可得出 EF＝EG＋GF＝AF＋FC;

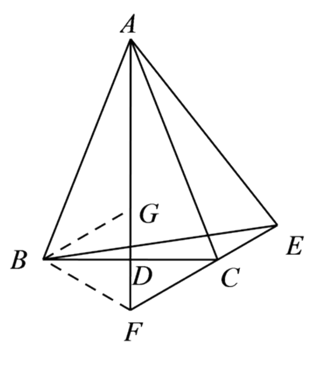
（3）在 AF 上截取 AG＝EF，连接 BG，BF，证明方法类似（2），先证明△ABG≌△EBF，再证明△BFG 为等边三角形，最后可得出结论.

【详解】

解：（1）∵AB=AC，AD 为 BC 边上的中线，∴可设∠BAD＝∠CAD＝α，
又△ABE 为等边三角形，
∴AE=AB=AC，∠EAB=60°，∴可设∠AEC＝∠ACE＝β，
在△ACE 中，2α＋60°＋2β＝180°，
∴α＋β＝60°，
∴∠DFC=α＋β＝60°；
（2）EF=AF+FC，证明如下：
∵AB=AC，AD 为 BC 边上的中线，∴AD⊥BC，∴∠FDC=90°，
∵∠CFD＝60°，则∠DCF=30°，
∴CF＝2DF，
在 EC 上截取 EG＝CF，连接 AG，



又 AE=AC，
∴∠AEG=∠ACF，
∴△AEG≌△ACF（SAS），
∴∠EAG＝∠CAF，AG＝AF，
又∠CAF=∠BAD，
∴∠EAG=∠BAD，
∴∠GAF＝∠BAD+∠BAG=∠EAG+∠BAG=∠60°，
∴△AFG 为等边三角形，
∴EF＝EG＋GF＝AF＋FC，
即 EF=AF+FC；
（3）补全图形如图所示，



结论：AF=EF+2DF．证明如下：

同（1）可设∠BAD＝∠CAD＝α，∠ACE＝∠AEC＝β，

∴∠CAE＝180°－2β，

∴∠BAE＝2α＋180° －2β＝60°，∴β－α＝60°，

∴∠AFC=β－α＝60°，

又△ABE 为等边三角形，∴∠ABE=∠AFC=60°，

∴由 8 字图可得：∠BAD＝∠BEF，

在 AF 上截取 AG＝EF，连接 BG，BF，

又 AB=BE，

∴△ABG≌△EBF（SAS），

∴BG＝BF，

又 AF 垂直平分 BC，

∴BF=CF，

∴∠BFA=∠AFC=60°，

∴△BFG 为等边三角形，

∴BG=BF，又 BC⊥FG，∴FG=BF=2DF，

∴AF＝AG＋GF＝BF＋EF＝2DF＋EF.

【点睛】

本题考查了全等三角形的判定和性质、等边三角形的性质、等腰三角形的性质等知识，解决问题的关键是常用辅助线构造全等三角形，属于中考常考题型.

5. （1）见解析；（2）∠P=23º；（3）∠P=26º；（4）∠P=$\frac{2x+y}{3}$；（5）∠P=$\frac{180°+\angle B+\angle D}{2}$.

【解析】

【分析】

（1）根据三角形内角和定理即可证明；

（2）如图 2，根据角平分线的性质得到∠1=∠2，∠3=∠4，列方程组即可得到结论；

（3）由 AP 平分∠BAD 的外角∠FAD，CP 平分∠BCD 的外角∠BCE，推出∠1=∠2，∠3=∠4，推出∠PAD=180°-∠2，∠PCD=180°-∠3，由∠P+（180°-∠1）=∠D+（180°-∠3），∠P+∠1=∠B+∠4，推出 2∠P=∠B+∠D，即可解决问题；

（4）根据题意得出∠B+∠CAB=∠C+∠BDC，再结合∠CAP=$\frac{1}{3}$∠CAB，∠CDP=$\frac{1}{3}$∠CDB，得到 y+（∠CAB-$\frac{1}{3}$∠CAB）=∠P+（∠BDC-$\frac{1}{3}$∠CDB），从而可得∠P=y+∠CAB-$\frac{1}{3}$∠CAB-∠CDB+$\frac{1}{3}$∠CDB=$\frac{2x+y}{3}$；

（5）根据题意得出∠B+∠BAD=∠D+∠BCD，∠DAP+∠P=∠PCD+∠D，再结合 AP 平分∠BAD，CP 平分∠BCD 的外角∠BCE，得到$\frac{1}{2}$∠BAD+∠P=[∠BCD+$\frac{1}{2}$（180°-

$\angle BCD$）]+$\angle D$，所以$\angle P=90°+\frac{1}{2}\angle BCD-\frac{1}{2}\angle BAD+\angle D=\frac{180°+\angle B+\angle D}{2}$.

【详解】

解：（1）证明：在△AOB 中，∠A+∠B+∠AOB=180°，

在△COD 中，∠C+∠D+∠COD=180°，

∵∠AOB=∠COD，

∴∠A+∠B=∠C+∠D；

（2）解：如图 2，∵AP、CP 分别平分∠BAD，∠BCD，

∴∠1=∠2，∠3=∠4，

由（1）的结论得：$\begin{cases}\angle P+\angle 3=\angle 1+\angle B① \\ \angle P+\angle 2=\angle 4+\angle D②\end{cases}$，

①+②，得 2∠P+∠2+∠3=∠1+∠4+∠B+∠D，

∴$\angle P=\frac{1}{2}$（∠B+∠D）=23°；

（3）解：如图 3，

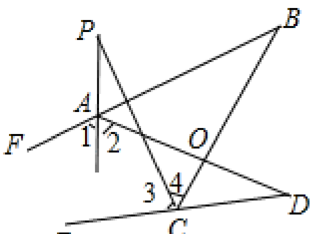


图3

∵AP 平分∠BAD 的外角∠FAD，CP 平分∠BCD 的外角∠BCE，

∴∠1=∠2，∠3=∠4，

∴∠PAD=180°-∠2，∠PCD=180°-∠3，

∵∠P+（180°-∠1）=∠D+（180°-∠3），

∠P+∠1=∠B+∠4，

∴2∠P=∠B+∠D，

∴$\angle P=\frac{1}{2}$（∠B+∠D）=$\frac{1}{2}$×（36°+16°）=26°；

故答案为：26°；

（4）由题意可得：∠B+∠CAB=∠C+∠BDC，

即 y+∠CAB=x+∠BDC，即∠CAB-∠BDC=x-y，

∠B+∠BAP=∠P+∠PDB，

即 y+∠BAP=∠P+∠PDB，

即 y+（∠CAB-∠CAP）=∠P+（∠BDC-∠CDP），

即 y+（$\angle CAB-\frac{1}{3}\angle CAB$）=∠P+（$\angle BDC-\frac{1}{3}\angle CDB$），

∴$\angle P=y+\angle CAB-\frac{1}{3}\angle CAB-\angle CDB+\frac{1}{3}\angle CDB$

$= y+\frac{2}{3}$（∠CAB-∠CDB）

$=y+\frac{2}{3}$（x-y）

$=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y$

故答案为：∠P=$\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y$；

（5）由题意可得：∠B+∠BAD=∠D+∠BCD，

∠DAP+∠P=∠PCD+∠D，

∴∠B-∠D=∠BCD-∠BAD，

∵AP 平分∠BAD，CP 平分∠BCD 的外角∠BCE，

∴∠BAP=∠DAP，∠PCE=∠PCB，

∴$\frac{1}{2}$∠BAD+∠P=（∠BCD+$\frac{1}{2}$∠BCE）+∠D，

∴$\frac{1}{2}$∠BAD+∠P=[∠BCD+$\frac{1}{2}$（180°-∠BCD）]+∠D，

∴∠P=90°+$\frac{1}{2}$∠BCD-$\frac{1}{2}$∠BAD +∠D

=90°+$\frac{1}{2}$（∠BCD-∠BAD）+∠D

=90°+$\frac{1}{2}$（∠B-∠D）+∠D

$=\frac{180°+\angle B+\angle D}{2}$，

故答案为：∠P=$\frac{180°+\angle B+\angle D}{2}$.

【点睛】

本题考查三角形内角和，三角形的外角的性质、多边形的内角和等知识，解题的关键是学会用方程组的思想思考问题，属于中考常考题型.

6．（1)相等，证明见解析；（2)证明见解析；（3)证明见解析.

【解析】

【分析】

（1）先证明△ACD≌△CBE，再由全等三角形的性质即可证得 CD=BE；

（2）先证明△BCD≌△ABE，得到∠BCD=∠ABE，求出∠DQB=∠BCQ+∠CBQ=∠ABE+∠CBQ=180°-∠ABC，∠CQE=180°-∠DQB，即可解答；

（3）如图 3，过点 D 作 DG∥BC 交 AC 于点 G，根据等边三角形的三边相等，可以证得 AD=DG=CE；进而证明△DGF 和△ECF 全等，最后根据全等三角形的性质即可证明.

【详解】

（1）解：CD 和 BE 始终相等，理由如下：