第五章 三角函数

5.2.2 同角三角函数的基本关系

教学目标

01 理解并掌握同角三角函数的基本关系；（重点）

02 会用同角三角函数的基本关系进行三角函数式的求值、化简和证明；（重点、难点）

03 通过对同角三角函数的基本关系式的探究学习，让学生学会用联系的观

点，化归与转化的思想，数形结合的思想分析解决问题，培养探究精

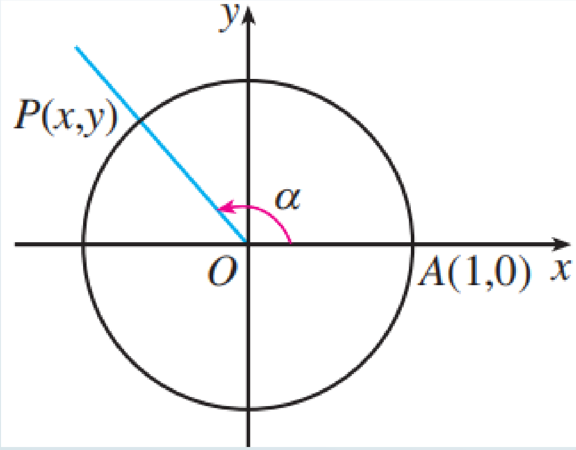
和创新意识.

学科素养

数学抽象	理解并掌握同角三角函数的基本关系；
逻辑推理	用同角三角函数的基本关系进行三角函数式的求值、化简和
数学建模	
数学运算	用同角三角函数的基本关系进行三角函数式的求值、化简
直观想象	
数据分析	

复习回顾

设α是一个任意角，$\alpha\in R$，它的终边与单位圆相交于点$P(x,y)$



(1)把点P的纵坐标y叫做α的正弦函数,记作$\sin\alpha$,

即 $y=\sin\alpha$;

(2)把点P的横坐标x叫做α的余弦函数,记作$\cos\alpha$,

即 $x=\cos\alpha$

(3)把点P的纵坐标和横坐标的比值$\frac{y}{x}$叫做α的正切函数,记作$\tan\alpha$,

即$\frac{y}{x}=\tan\alpha$ $(x\neq 0)$.

设角α是一个任意角，$P(x,y)$是角α终边上的任意一点，点P与原点的距离为$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$

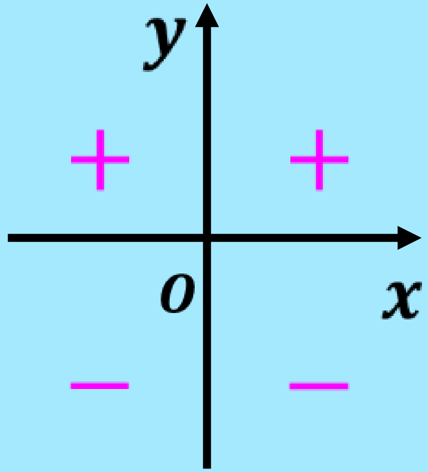
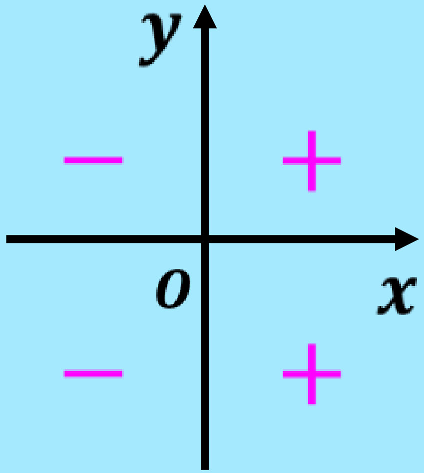
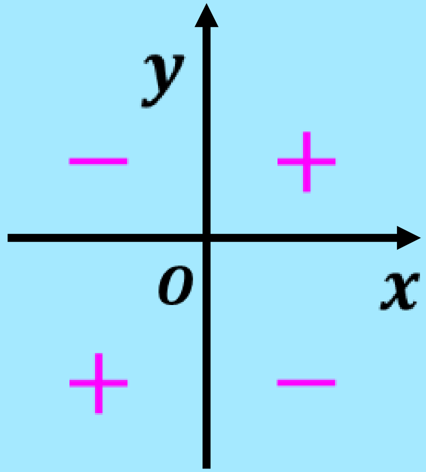
三角函数第二定义（任意点定义）

那么① $\frac{y}{r}$叫做α的正弦，即$\sin\alpha=\frac{y}{r}$

② $\frac{x}{r}$叫做α的余弦，即$\cos\alpha=\frac{x}{r}$

③ $\frac{y}{x}$叫做α的正切，即$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq 0)$

任意角α的三角函数值仅与α有关，而与点P在角的终边上的位置无关.

三角函数	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$
定义域	R	R	$\left\{x \middle\vert x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
象限角三角函数值符号			

公式一：

$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha$　　$\cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha$　　$\tan(\alpha+2k\pi)=\tan\alpha$　　其中$k\in \mathbf{Z}$

新课导入

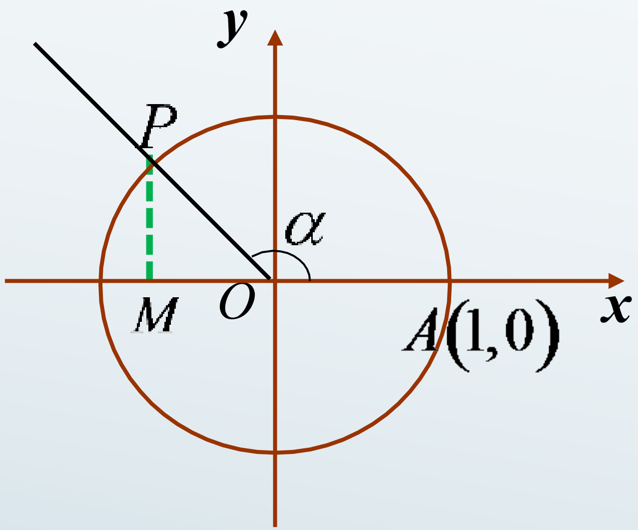
探究

公式一表明，终边相同的角的同一三角函数值相等．那么，终边相同的角的三个三角函数之间是否也有某种关系呢？

因为三个三角函数值都是由角的终边与单位圆的交点坐标所唯一确定的，所以它们之间一定有内在联系．由公式一可知，我们不妨讨论同一个角的三个三角函数值之间的关系．

新知探究

问题2 当角α的终边不在坐标轴时，正弦、余弦之间的关系是什么？



过P作x轴的垂线，交x轴于M，则ΔOMP是直角三角形.

由勾股定理，有$MP^2+OM^2=OP^2$

因此，$y^2+x^2=1$，即$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

问题3 当角α的终边在坐标轴上时，关系式是否还成立？

当角α的终边在x轴上时，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0+1=1$

当角α的终边在y轴上时，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1+0=1$

结论： 对于任意角$\alpha(\alpha\in R)$，都有$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

同角三角函数的平方关系

这就是说，同一个角α的正弦、余弦的平方和等于1.

问题4 观察并思考任意角α的$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\tan\alpha$这三者有什么样的关系？

$\sin\alpha = y$，$\cos\alpha = x$，$\tan\alpha = \frac{\square}{x}(x \neq 0)$ ⟶ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

思考 这个商的关系对任意角都成立吗？

同角三角函数的商数关系

当$\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in Z)$时，有$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$

这就是说，同一个角α的正弦、余弦的商等于角α的正切.

对同角三角函数的基本关系式的理解

(1)同角三角函数的基本关系式中的角都是”同一个角”，而$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$不一定成立.“同角”与角的表示形式无关,如$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}=1$成立，这里的同角是指$\frac{\alpha}{2}$.一般地，公式中的角可以是具体值，也可以是变量，可以是单项式形式表示的角，也可以是多项式形式表示的角.

(2)同角三角函数的基本关系式是针对使三角函数有意义的角而言的，$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$对一切$\alpha\in R$恒成立，而$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$仅对$\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$成立.

(3) $\sin^2\alpha$与$\sin\alpha^2$之间的区别：前者是$(\sin\alpha)^2$的简写，是α的正弦的平方，读作“$\sin\alpha$的平方”，后者是α的平方的正弦，两者是截然不同的。

问题5 对于平方关系$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$和商数关系$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$可作哪些变形？

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right) \\ \cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\left(\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},k\in Z\right) \end{cases}$$

典例解析：求值(一)

先定位（判象限、定正负）
后定量（定公式）
分类讨论！

例1. 已知$\sin\alpha = -\frac{3}{5}$，求$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的值.

【解析】因为$\sin\alpha<0$，$\sin\alpha\neq-1$，所以α是第三或第四象限角.

由$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$得$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=\frac{16}{25}$；

如果α是第三象限角，那么$\cos\alpha<0$．于是$\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，从而$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}$.

如果α是第四象限角，那么$\cos\alpha>0$．于是$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，从而$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
https://d.book118.com/325004302001012011