第七节 正弦定理和余弦定理

一、根底学问

1. 正弦定理

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为$\triangle ABC$ 外接圆的半径）.

正弦定理的常见变形

(1) $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

(2) $\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$；

(3) $a∶b∶c=\sin A∶\sin B∶\sin C$；

(4)(4) $\dfrac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$.

2. 余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$；$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$；$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

3. 三角形的面积公式

(1) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ah_a$（$h_a$ 为边 a 上的高）；

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$；

(3) $S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$（r 为三角形的内切圆半径）.

二、常用结论汇总——规律多一点

1. 三角形内角和定理

在$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$；变形：$\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$.

2. 三角形中的三角函数关系

(1)$\sin(A+B)=\sin C$；(2)$\cos(A+B)=-\cos C$；

(3)$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$；(4)$\cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$.

3. 三角形中的射影定理

在$\triangle ABC$ 中，$a=b\cos C+c\cos B$；$b=a\cos C+c\cos A$；$c=b\cos A+a\cos B$.

4．用余弦定理推断三角形的外形

在$\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，当$b^2+c^2-a^2>0$ 时，可知A 为锐角；当 $b^2+c^2-a^2=0$ 时，可知 A 为直角；当 $b^2+c^2-a^2<0$ 时，可知 A 为钝角．

第一课时 正弦定理和余弦定理(一)

考点一 利用正、余弦定理解三角形

考法(一) 正弦定理解三角形

[典例] (1)(2023·**江西重点中学**联考)在△ABC 中，$a=3$，$b=2$，$A=30°$，则 $\cos B=$________.

(2)设△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c.假设 $a=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，则 $b=$________.

[解析] (1)由正弦定理可得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\sin 30°}{3}=\frac{1}{3}$，∵$a=3>b=2$，∴$B<A$，即 B 为锐角，∴$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(2)∵$\sin B=\frac{1}{2}$且 $B\in(0，\pi)$，∴$B=\frac{\pi}{6}$或 $B=\frac{5\pi}{6}$，

又∵$C=\frac{\pi}{6}$，∴$B=\frac{\pi}{6}$，$A=\pi-B-C=\frac{2\pi}{3}$.

又 $a=\sqrt{3}$，由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

即$\frac{\sqrt{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{6}}$，解得 $b=1$.

[答案] (1)$\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (2)1

考法(二) 余弦定理解三角形

[典例] (1)(2023·**山西五校**联考)在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，假设 $b\cos A+a\cos B=c^2$，$a=b=2$，则△ABC 的周长为( )

A．7.5　　B．7

C．6　　D．5

(2)(2023·**泰安二模**)在△ABC 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\frac{c-b}{\sqrt{2}c-a}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}$，则角 $B=$________.

[解析] (1)∵$b\cos A+a\cos B=c^2$，∴由余弦定理可得 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c^2$，整理可得 $2c^2=2c^3$，解得 $c=1$，则△ABC 的周长为 $a+b+c=2+2+1=5$.

(2)由正弦定理可得$\frac{c-b}{\sqrt{2}c-a}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{a}{b+c}$，

∴$c^2-b^2=\sqrt{2}ac-a^2$，∴$c^2+a^2-b^2=\sqrt{2}ac$，