第一章 绪论

1.1 研究意义

微分中值定理是一系列定理的总称.这一系列定理是研究函数、函数的微分、函数与其微分之间关系,不等式等数学问题的基础理论和有力工具；是微分学理论的重要组成部分,在导数应用中起着桥梁作用,也是研究函数变化形态的纽带,因而在经典分析学中占有很重要的地位.通过本论文主要讨论多元微分中值定理的存在形式及其在数学理论证明和实际问题的数学描述与求解中的应用.因而使多元实值函数、多元向量值函数的各微分中值定理的存在形式数学形式化、具体化是具有数学理论价值和数学应用价值的.

1.2研究现状

对微分中值定理的研究,是伴随着微积分建立就开始了.1637年,著名法国数学家费马在《求最大值和最小值的方法》中给出费马定理.教科书中通常将它称为费马定理.1691年,法国数学家罗尔在《方程的解法》一文中给出多项式形式的罗尔定理.797年,法国数学家拉格朗日在《解析函数论》一书中给出拉格朗日定理,并给出最初的证明.以罗尔定理,拉格朗日中值定理和柯西中值定理组成的一组中值定理是整个微分学的理论基础,它们建立了函数值与导数值之间的定量联系,中值定理的主要作用在于理论分析和证明.

我们国内对中值定理也有一定的研究,如唐伟国,唐仁献在文[1]中通过以微分多项式表达式作为其应用,导出了拉格朗日中值定理与柯西中值定理的一种新的推广形式.党艳霞在文[2]中从多角度阐述微分中值定理及其三个定理之间的关系,并举例说明了微分中值定理的应用.邱召友在文[3]中通过讨论微分中值定理在n 维欧氏空间中的推广,将一元函数的微分中值定理推广到了多元函数及向量值函数.

1.3研究内容

本论文主要是对微分中值定理的证明方法进行研究,同时给出多元微分中值定理的数学证明形式,在文章中我们给出了微分中值定理的一种统一的证法和微分中值定理的一种逆向分析证法.多元微分中值定理的数学证明形式中我们给出了多元实值函数的微分中值定理形式的推导与证明以及多元向量值函数的微分

中值定理形式的推导和证明,讨论四个定理的推广形式,并给出其简单的证明.同时本文还讨论了微分中值定理的内在联系;讨论定理的推广形式;讨论加强条件之后的深层阐述.为了完成研究内容,实现研究目标,本论文共分五章阐述了整个研究工作,具体如下,第一章中将本论文的研究意义、研究现状以及研究内容进行整体的阐述.第二章中主要阐述了一元微分中值定理的研究,其中包括对 Rolle 定理、Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理的阐述,以及 Taylor 公式的定义. 同时将各定理之间的关系进一步进行研究.第三章主要是对多元微分中值定理的研究,其中包括多元实值函数微分中值定理和多元向量值微分中值定理.第四章主要是一些多元微分中值定理的应用实例.第五章主要是对本文研究内容的一个总结.

第二章 一元微分中值定理

2. 1 微分中值定理的基本内容

微分中值定理是反映导数值与函数值之间联系的三个定理,它们分别是罗尔定理、拉格朗日定理和柯西中值定理具体内容如下:

定理 2.1.1[4]（罗尔定理）

设函数 f x 在闭区间 a,b 上连续,在开区间 a,b 上可导,且 f a f b ,则至少存在一点 a,b ,使得

$$f \qquad 0$$

定理 2.1.2[4]（拉格朗日定理）

设函数 f x 在闭区间 a,b 上连续,在开区间 a,b 上可导,则至少存在一点 a,b ,使得

$$f \qquad \frac{f\ b \quad f\ a}{b \quad a}$$

定理 2.1.3[4]（柯西中值定理）

设 f x 和 g x 都在闭区间 a,b 上连续,在开区间 a,b 上可导,且对于任意 x a,b , g x 0 .则至少存在一点 a,b ,使得

$$\frac{f}{g} \qquad \frac{f\ b \quad f\ a}{g\ b \quad g\ a}$$

定理 2.1.4[4]（Taylor 微分中值定理）

设 f x 在 x_0 处有 n 阶导数,则存在 x_0 的一个邻域,对于该邻域中任意一点 x，成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_n(x), \tag{1}$$

其中余项 $r_n(x)$ 满足

$$r_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad (\text{Peano余项}) \tag{2}$$

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (\text{Lagrange余项}) \tag{3}$$

2．2 三个定理之间的关系

在拉格朗日中值定理中,如果 $f(a)=f(b)$,则 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ 变成罗尔定理;在柯西中值定理中,如果 $g(x)=x$,则由 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 变为拉格朗日中值定理.因此,拉格朗日中值定理是罗尔定理的推广,柯西中值定理是拉格朗日定理的推广.反之,拉格朗日定理是柯西中值定理的特例,罗尔定理是拉格朗日中值定理的特例

2．3 几何解释

罗尔定理的几何解释是：在曲线 $y=f(x)$ 上存在这样的点,过该点的切线平行于过曲线两端点的弦(或 x 轴）.

拉格朗日定理的几何解释是：在曲线 $y=f(x)$ 上存在这样的点,过该点的切线平行于过曲线两端点的弦.

柯西中值定理的几何解释是：在曲线 $\begin{cases} X=F(x) \\ Y=f(x) \end{cases}$ (其中 x 为参数, $a\le x\le b$） 存在一点,使曲线过该点的切线平行于过曲线两端点 $A(F(a), f(a))$, B F b , f b 的弦.综上所述,这三个中值定理归纳起来,用几何解释为:在区间 [a , b] 上连续且除端点外每一点都存在不垂直于 x 轴的切线的曲线,它们有个共同的特征即在曲线上至少存在一点,过该点的切线平行于曲线端点的连线.

2. 4 一元微分中值定理的深层阐述

2. 4. 罗尔定理

(i) 罗尔定理的证明是借用最值定理及费马定理[5]

从罗尔定理的证明中我们可得到:(1)符合罗尔定理条件的函数在开区间 a,b 内必存在最大值或最小值. (2)在开区间 a,b 内使 f x 0 的点不一定是极值点.例如函数 f x $\frac{x^3}{4}$ 5 3x 在闭区间 1, 2 上满足罗尔定理的三个条件,由 f x 3x^2 5/4 x ,显然 0 ,有 f 0 成立,但 0 不是 f x 的极值点.但加强条件,可得如下定理:

定理 2.4.1.1[6] 若函数在闭区间 a,b 上满足罗尔定理的三个条件,且在开区间 a,b 内只有唯一的一个点 ,使 f 0 成立,则点 必是 f x 的极值点.完全按照罗尔定理的证法,即可证得使 f 0 成立的唯一点 就是 f x 在 a,b 内的最值点,当然是极值点

(ii) 罗尔定理的逆命题不成立[7]

设函数 y f x 在闭区间 a,b 上连续,在开区间 a,b 内可导,若在点 a,b 处,有 f 0 ,则存在 , a,b , ,使得

f f

例 函数 y x^3, x a,a a 0 ,显然 y x^3 在 a,a 上连续,在 a,a 内可导, f 0 0 ,但是不存在 , a,b , ,使得 f f .但如果加强条件,下述定理成立:

定理 2.4.1.2 设函数 $y \quad f \; x$ 在闭区间 a,b 上连续,在开区间 a,b 内可导,且导函数 $f \; x$ 是严格单调函数,则在点 a,b 处,有 $f \qquad 0$ 的充分必要条件是存在 , a,b , ,使得 $f \qquad f$.

证明 首先, 由罗尔定理可以保证充分性成立.下面证必要性成立.

设在点 a,b 处,有 $f \qquad 0$,不妨设导函数 $f \; x$ 是严格单调减少的函数(否则,讨论 $g \; x \quad f \; x$ 即可).因为 $f \qquad 0$,故当 x 时, $f \; x \quad 0$;当 x 时, $f \; x \quad 0$.因而函数 $y \quad f \; x$ 在点 处取的极大值.根据极大值的定义,可取点 的邻域 , a,b ,使得在此邻域内有 $f \; x \quad f$,当 x 时,

① $f \qquad f$,则取 , ,就有 $f \qquad f$.

② 若 $f \qquad f$,则作辅助函数 $F \; x \quad f \; x \quad f$,

于是 $F \qquad f \qquad f \qquad 0, F \qquad f \qquad f \qquad 0$.

根据介值定理,至少存在一 , ,使得 $F \; a \quad 0$,即 $f \qquad f$,则取 ,就有 $f \qquad f$.

③若 $f \qquad f$,作辅助函数 $F \; x \quad f \; x \quad f$,采用上述方法,同理可证,故原命题成立.

2. 4. 2 拉格朗日中值定理

拉格朗日定理结论中的点 ξ 不是任意的

请看下例:

问题 “若函数 $f \; x$ 在 $a,$ (a 为任意实数)上可导,且 $\lim\limits_{x} f \; x \quad c$ (c 为常数) 则 $\lim\limits_{x} f \; x \quad 0$ ”这一命题正确吗?

证明 设 x 为任意正数,由题设知 $f\ x$ 在闭区间 $x, 2x$ 上连续,在开区间 $x, 2x$ 内可导,由拉格朗日定理知至少存在一点 $x, 2x$,使得

$$f \quad \frac{f\ 2x \quad f\ x}{x}$$,又因为 $\lim_{x} f\ x \quad c$,故

$$\lim_{x} \frac{f\ 2x \quad f\ x}{x} \quad 0$$

由于 夹在 x 与 $2x$ 之间,

当 x 时, 也趋于 于是

$$\lim_{x} f\ x \quad \lim_{x} f \qquad 0$$

上述证明是错误的,原因在于 是随着 x 的变化而变化,即 x ,但当 x 时, x 未必连续地趋于 ,可能以某种跳跃方式趋于 ,而这时就不能由 f 趋于 0 推出 $\lim_{x} f\ x \quad 0$ 了.

例 函数 $f\ x \quad \frac{\sin x^2}{x}$ 满足 $\lim_{x} f\ x \quad 0$,且 $f\ x \quad 2\cos x^2 \quad \frac{1}{x^2}\sin x^2$ 在 $0,$ 内存在,但 $\lim_{x} f\ x \quad \lim_{x} 2\cos x^2 \quad \frac{1}{x^2}\sin x^2$ 并不存在,当然 $\lim_{x} f\ x \quad 0$ 不会成立.

定理 2.4.2.1[8] 若函数 $f\ x$ 在 $a,$ (a 为任意实数)上可导,且 $\lim_{x} f\ x$ 存在,若 $\lim_{x} f\ x \quad c$ (c 为常数) 则 $\lim_{x} f\ x \quad 0$

定理 2.4.2.2 设函数 y f x 在闭区间 a,b 上连续,在开区间 a,b 内可导,且导函数 f x 是严格单调函数,则对任意 a,b ,一定存在 , a,b , 使得 f $\frac{f \quad f}{}$

证明 不妨设导函数 f x 是严格单调增加函数,取点 ξ 的邻域 , a,b

① $\frac{f \qquad f}{2}$ f ,则取 , = ,就有

$$f \quad \frac{f \quad f}{}$$

② 若 $\frac{f \qquad f}{2}$ f ,则作辅助函数

$$F \ x \quad \frac{f \ x \quad f}{2} \quad f$$

于是

$$F \qquad \frac{f \qquad f}{2} \quad f \qquad 0$$

$$F \qquad \frac{f \quad f}{} \quad f$$

$$\frac{f}{} \quad f$$

$$f \qquad f \qquad 0,$$

根据介值定理，存在 , ，使得 F 0 ,取 ,就得到

$$f \quad \frac{f \quad f}{}$$

③ $\frac{f \qquad f}{2} \quad f$,采用上述方法,同理可证,故原命题成立.

2. 4. 3柯西中值定理讨论

我们在教学中常见的 Cauchy 中值定理是"若函数 f x ,g x 在闭区间 a,b 上连续,开

区 a,b 内可导,且 g x 0, x a,b ,则至少存在一点 a,b 使

$\frac{f}{g} \quad \frac{f\ b \quad f\ a}{g\ b \quad g\ a}$,在学习中我们特别强调条件 g x 0, x a,b ,事实

上 Cauchy 中值定理的条件是充分的而不是必要的,条件 g x 0, x a,b 可放松一些,将 Cauchy 中值定理改为

定理 2.4.3.1 如函数 f x ,g x 在闭区间 a,b 连续,开区 a,b 内可导, g b g a ,且 x a,b 有 f x ,g x 不同时为 0,则至少存在一点 a,b ,使 $\frac{f}{g} \quad \frac{f\ b \quad f\ a}{g\ b \quad g\ a}$

证明:考虑函数 F x f x f a $\frac{f\ b \quad f\ a}{b \quad a}$ x a 不难验证 F x 在闭区间 a,b 上连续,开区 a,b 内可导,且 F b F a 0,由 Rolle定理知,至少存在一点 a,b 使 F 0 即 F f $\frac{f\ b \quad f\ a}{g\ b \quad g\ a}$ g 0

即

$$f \quad \frac{f\ b \quad f\ a}{g\ b \quad g\ a} g$$

这里一定有 g 0,因若 g 0,则 f 0 与 f x ,g x 不同时为 0 矛盾,

所以有

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

证毕.

定理 2.4.3.2（元实值函数 Cauchy 中值定理推广） 若 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内 n 阶可导,且 $g'(x), g''(x), \ldots, g^{(n)}(x)$ 均不为零,则 $\exists\xi\in(a,b)$ 使

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(b-\frac{k(b-a)}{n}\right)}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k g\left(b-\frac{k(b-a)}{n}\right)}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)} \tag{4}$$

证明 当 $n=1$ 时,（4）式显然成立,它就是 Cauchy 中值定理,设当 $n=t$ 时,（4）式成立,即

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left(b-\frac{k(b-a)}{n}\right)}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k g\left(b-\frac{k(b-a)}{n}\right)}=\frac{f^{(t)}(\xi)}{g^{(t)}(\xi)} \tag{5}$$

当 $n=t+1$ 时,若能证明（4）式也成立,则有归纳法可得定理 3.4 是正确的. 为此,作辅助函数:

$$F(x)=\sum_{k=0}^{t+1}(-1)^k C_{t+1}^k f\left(x-\frac{k(x-a)}{t+1}\right)-\lambda\sum_{k=0}^{t+1}(-1)^k C_{t+1}^k g\left(x-\frac{k(x-a)}{t+1}\right) \tag{6}$$

在（6）式中,令 $F(b)=0$,得:

$$\lambda=\frac{\sum_{k=0}^{t+1}(-1)^k C_{t+1}^k f\left(b-\frac{k(b-a)}{t+1}\right)}{\sum_{k=0}^{t+1}(-1)^k C_{t+1}^k g\left(b-\frac{k(b-a)}{t+1}\right)} \tag{7}$$

当 $x=a$ 时,由（6）式可得到