

## 2024 届湖南省长沙市雅礼书院中学高考数学试题模拟题及解析

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

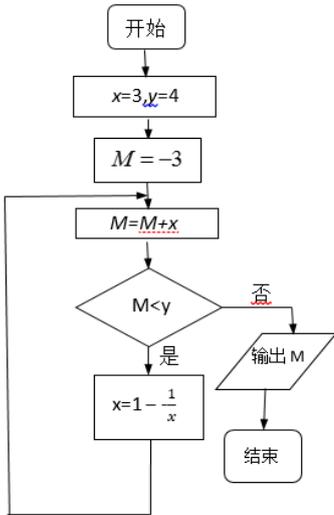
1. 我国宋代数学家秦九韶（1202-1261）在《数书九章》（1247）一书中提出“三斜求积术”，即：以少广求之，以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积。其实

质是根据三角形的三边长  $a, b, c$  求三角形面积  $S$ ，即  $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ 。若  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ，

$a = \sqrt{3}$ ， $b = 2$ ，则  $\sin A$  等于（ ）

- A.  $\frac{\sqrt{55}}{10}$       B.  $\frac{\sqrt{11}}{6}$       C.  $\frac{\sqrt{55}}{10}$  或  $\frac{\sqrt{11}}{6}$       D.  $\frac{11}{20}$  或  $\frac{11}{36}$

2. 执行如图所示的程序框图，输出的结果为（ ）



- A.  $\frac{19}{3}$       B. 4      C.  $\frac{25}{4}$       D.  $\frac{13}{2}$

3. 设  $a = \log_2 3$ ， $b = \log_4 6$ ， $c = 5^{-0.1}$ ，则（ ）

- A.  $a > b > c$       B.  $b > a > c$       C.  $c > a > b$       D.  $c > b > a$

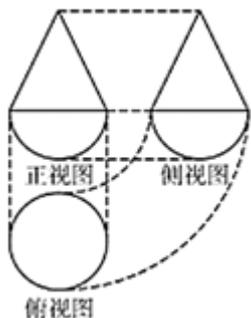
4. 已知函数  $f(x) = m^x - m$  ( $m > 0$ , 且  $m \neq 1$ ) 的图象经过第一、二、四象限，则  $a = |f(\sqrt{2})|$ ， $b = \left| f\left(4^{\frac{3}{8}}\right) \right|$ ， $c = |f(0)|$

的大小关系为（ ）

- A.  $c < b < a$       B.  $c < a < b$



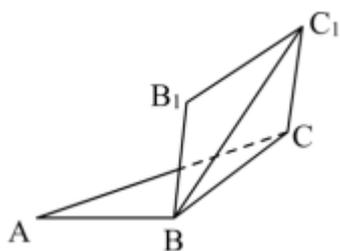
12. 某几何体的三视图如图所示，图中圆的半径为1，等腰三角形的腰长为3，则该几何体表面积为（ ）



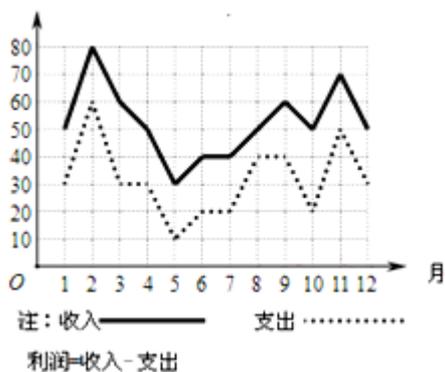
- A.  $7\pi$                       B.  $6\pi$                       C.  $5\pi$                       D.  $4\pi$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 如图所示，平面  $BCC_1B_1 \perp$  平面  $ABC$ ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，四边形  $BCC_1B_1$  为正方形，且  $AB = BC = 2$ ，则异面直线  $BC_1$  与  $AC$  所成角的余弦值为\_\_\_\_\_.



14. 某商场一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示，下列说法中正确的是\_\_\_\_\_.



- ① 2至3月份的收入的变化率与11至12月份的收入的变化率相同；  
 ② 支出最高值与支出最低值的比是6:1；  
 ③ 第三季度平均收入为50万元；  
 ④ 利润最高的月份是2月份.

15. 已知向量  $\vec{a} = (\cos 5^\circ, \sin 5^\circ)$ ， $\vec{b} = (\cos 65^\circ, \sin 65^\circ)$ ，则  $|\vec{a} + \vec{b}| =$ \_\_\_\_\_.

16. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别是  $a, b, c$ ，若  $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$ ， $a = 2$ ，则  $\triangle ABC$  的面积的最大值为\_\_\_\_\_.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ，满足  $\sqrt{3} \sin A + \cos A = 0$ . 有三个条件：①  $a = 1$

；②  $b = \sqrt{3}$ ；③  $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . 其中三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件完成下面两个问题：

(1) 求  $c$ ；

(2) 设  $D$  为  $BC$  边上一点，且  $AD \perp AC$ ，求  $\triangle ABD$  的面积.

18. (12分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且椭圆  $C$  的一个焦点与抛物线  $y^2 = 4\sqrt{3}x$  的

焦点重合. 过点  $E(1, 0)$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$  两点， $O$  为坐标原点.

(1) 若直线  $l$  过椭圆  $C$  的上顶点，求  $\triangle MON$  的面积；

(2) 若  $A, B$  分别为椭圆  $C$  的左、右顶点，直线  $MA, NB, MB$  的斜率分别为  $k_1, k_2, k_3$ ，求  $k_3(k_1 + k_2)$  的值.

19. (12分) 传染病的流行必须具备的三个基本环节是：传染源、传播途径和人群易感性. 三个环节必须同时存在，方能构成传染病流行. 呼吸道飞沫和密切接触传播是新冠病毒的主要传播途径，为了有效防控新冠病毒的流行，人们出行都应该佩戴口罩. 某地区已经出现了新冠病毒的感染病人，为了掌握该地区居民的防控意识和防控情况，用分层抽样的方法从全体居民中抽出一个容量为 100 的样本，统计样本中每个人出行是否会佩戴口罩的情况，得到下面列联表：

	戴口罩	不戴口罩
青年人	50	10
中老年人	20	20

(1) 能否有 99.9% 的把握认为是否会佩戴口罩出行的行为与年龄有关？

(2) 用样本估计总体，若从该地区出行不戴口罩的居民中随机抽取 5 人，求恰好有 2 人是青年人的概率.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
$k$	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (12分) 在  $\triangle ABC$  中，内角  $A, B, C$  的边长分别为  $a, b, c$ ，且  $c = 2$ .

(1) 若  $A = \frac{\pi}{3}$ ， $b = 3$ ，求  $\sin C$  的值；

(2) 若  $\sin A \cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cos^2 \frac{A}{2} = 3 \sin C$ ，且  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{25}{2} \sin C$ ，求  $a$  和  $b$  的值.

21. (12分) 已知函数  $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x, a \in \mathbf{R}, e \approx 2.71828 \dots$  是自然对数的底数.

(1) 若  $a = -e$ , 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$ , 求  $a$  的取值范围, 并证明:  $x_1 x_2 > x_1 + x_2$ .

22. (10分) 已知函数  $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \cos x (a \in \mathbf{R})$ ,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导数.

(1) 当  $a = 1$  时, 令  $h(x) = f'(x) - x + \ln x$ ,  $h'(x)$  为  $h(x)$  的导数. 证明:  $h'(x)$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  存在唯一的极小值点;

(2) 已知函数  $y = f(2x) - \frac{2}{3}x^4$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上单调递减, 求  $a$  的取值范围.

## 参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

将  $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 2$ , 代入  $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2 c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ , 解得  $c^2 = 5, c^2 = 9$ , 再分类讨论, 利用余

弦定理求  $\cos A$ , 再用平方关系求解.

【详解】

已知  $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 2$ ,

代入  $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2 c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ ,

得  $\sqrt{\frac{1}{4}[3c^2 - (\frac{c^2 + 3 - 4}{2})^2]} = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ,

即  $c^4 - 12c^2 + 45 = 0$ ,

解得  $c^2 = 5, c^2 = 9$ ,

当  $c^2 = 5$  时, 由余弦定理得:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ ,  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{55}}{10}$ .

当  $c^2 = 9$  时, 由余弦定理得:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5}{6}$ ,  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{11}{6}$ .

故选: C

**【点睛】**

本题主要考查余弦定理和平方关系, 还考查了对数学史的理解能力, 属于基础题.

2、A

**【解析】**

模拟执行程序框图, 依次写出每次循环得到的  $x, M$  的值, 当  $x = 3$ ,  $M = \frac{19}{3} > 4$ , 退出循环, 输出结果.

**【详解】**

程序运行过程如下:

$x = 3, M = 0$ ;  $x = \frac{2}{3}, M = \frac{2}{3}$ ;  $x = -\frac{1}{2}, M = \frac{1}{6}$ ;

$x = 3, M = \frac{19}{6}$ ;  $x = \frac{2}{3}, M = \frac{23}{6}$ ;

$x = -\frac{1}{2}, M = \frac{10}{3}$ ;  $x = 3, M = \frac{19}{3} > 4$ , 退出循环, 输出结果为  $\frac{19}{3}$ ,

故选: A.

**【点睛】**

该题考查的是有关程序框图的问题, 涉及到的知识点有判断程序框图输出结果, 属于基础题目.

3、A

**【解析】**

先利用换底公式将对数都化为以 2 为底, 利用对数函数单调性可比较  $a, b$ , 再由中间值 1 可得三者的大小关系.

**【详解】**

$a = \log_2 3 \in (1, 2)$ ,  $b = \log_4 6 = \log_2 \sqrt{6} \in (1, \log_2 3)$ ,  $c = 5^{-0.1} \in (0, 1)$ , 因此  $a > b > c$ , 故选: A.

**【点睛】**

本题主要考查了利用对数函数和指数函数的单调性比较大小, 属于基础题.

4、C

**【解析】**

根据题意, 得  $0 < m < 1$ ,  $f(1) = 0$ , 则  $f(x)$  为减函数, 从而得出函数  $|f(x)|$  的单调性, 可比较  $a$  和  $b$ , 而

$c = |f(0)| = 1 - m$ , 比较  $f(0), f(2)$ , 即可比较  $a, b, c$ .

**【详解】**

因为  $f(x) = m^x - m (m > 0, \text{且 } m \neq 1)$  的图象经过第一、二、四象限,

所以  $0 < m < 1, f(1) = 0$ ,

所以函数  $f(x)$  为减函数, 函数  $|f(x)|$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

又因为  $1 < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{3}{8}} = 2^{\frac{3}{4}} < 2$ ,

所以  $a < b$ ,

又  $c = |f(0)| = 1 - m, |f(2)| = m^2 - m$ ,

则  $|f(2)| - |f(0)| = m^2 - 1 < 0$ ,

即  $|f(2)| < |f(0)|$ ,

所以  $a < b < c$ .

故选: C.

**【点睛】**

本题考查利用函数的单调性比较大小, 还考查化简能力和转化思想.

5、D

**【解析】**

按照复数的运算法则先求出  $\bar{z}$ , 再写出  $z$ , 进而求出  $|z|$ .

**【详解】**

$$\text{Q } \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

$$\therefore \frac{1+i}{1-i} \cdot \bar{z} = 2-i \Rightarrow i \cdot \bar{z} = 2-i \Rightarrow \bar{z} = \frac{2-i}{i} = -i(2-i) = -1-2i,$$

$$\therefore z = -1+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

故选: D

**【点睛】**

本题考查复数的四则运算、共轭复数及复数的模, 考查基本运算能力, 属于基础题.

6、C

**【解析】**

由题可知，设函数  $f(x) = a \ln(x+1)$ ， $g(x) = x^3 - 2x^2$ ，根据导数求出  $g(x)$  的极值点，得出单调性，根据

$a \ln(x+1) - x^3 + 2x^2 > 0$  在区间  $(0, +\infty)$  内的解集中有且仅有三个整数，转化为  $f(x) > g(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内的解集中有且仅有三个整数，结合图象，可求出实数  $a$  的取值范围。

**【详解】**

设函数  $f(x) = a \ln(x+1)$ ， $g(x) = x^3 - 2x^2$ ，

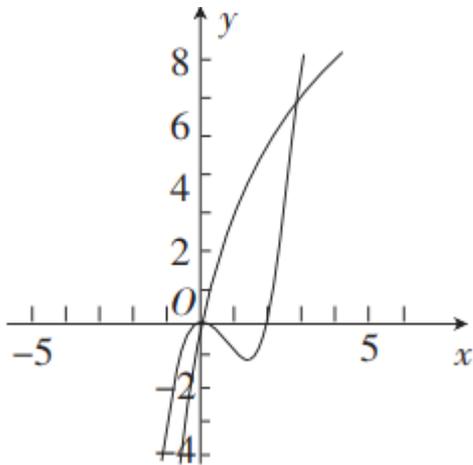
因为  $g'(x) = 3x^2 - 4x$ ，

所以  $g'(x) = 0$ ，

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = \frac{4}{3},$$

因为  $0 < x < \frac{4}{3}$  时， $g'(x) < 0$ ，

$x > \frac{4}{3}$  或  $x < 0$  时， $g'(x) > 0$ ， $g(0) = g(2) = 0$ ，其图象如下：



当  $a = 0$  时， $f(x) > g(x)$  至多一个整数根；

当  $a > 0$  时， $f(x) > g(x)$  在  $(0, +\infty)$  内的解集中仅有三个整数，只需  $\begin{cases} f(3) > g(3) \\ f(4) \leq g(4) \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} a \ln 4 > 3^3 - 2 \times 3^2 \\ a \ln 5 \leq 4^3 - 2 \times 4^2 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \frac{9}{2 \ln 2} < a \leq \frac{32}{\ln 5}.$$

故选：C.

**【点睛】**

本题考查不等式的解法和应用问题，还涉及利用导数求函数单调性和函数图象，同时考查数形结合思想和解题能力.



7、A

【解析】

由折线图找出水、电、交通开支占总开支的比例，再计算出水费开支占水、电、交通开支的比例，相乘即可求出水费开支占总开支的百分比。

【详解】

水费开支占总开支的百分比为  $\frac{250}{250+450+100} \times 20\% = 6.25\%$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查折线图与柱形图，属于基础题。

8、D

【解析】

由复数除法运算求出  $z$ ，再写出其共轭复数，得共轭复数对应点的坐标。得结论。

【详解】

$z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i+2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ ， $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ ，对应点为  $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ ，在第四象限。

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查共轭复数的概念，考查复数的几何意义。掌握复数的运算法则是解题关键。

9、B

【解析】

根据二项分布的性质可得： $E(\xi_i) = p_i$ ， $D(\xi_i) = p_i(1-p_i)$ ，再根据  $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$  和二次函数的性质求解。

【详解】

因为随机变量  $\xi_i$  满足  $P(\xi_i = k) = C_2^k (1-p_i)^{2-k} p_i^k$ ， $i=1,2$ ， $k=0,1,2$ 。

所以  $\xi_i$  服从二项分布，

由二项分布的性质可得： $E(\xi_i) = p_i$ ， $D(\xi_i) = p_i(1-p_i)$ ，

因为  $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ ，

所以  $E(\xi_1) < E(\xi_2)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/326034103202010234>