

2024 届湖南省长沙市雅礼书院中学高考数学试题模拟题及解析

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

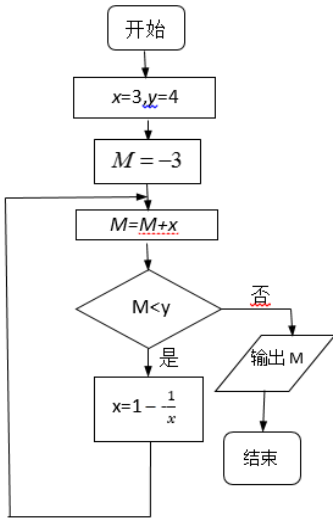
1. 我国宋代数学家秦九韶（1202-1261）在《数书九章》（1247）一书中提出“三斜求积术”，即：以少广求之，以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上；以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实；一为从隅，开平方得积。其实

质是根据三角形的三边长 a, b, c 求三角形面积 S ，即 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$ 。若 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ，

$a = \sqrt{3}$ ， $b = 2$ ，则 $\sin A$ 等于（ ）

- A. $\frac{\sqrt{55}}{10}$ B. $\frac{\sqrt{11}}{6}$ C. $\frac{\sqrt{55}}{10}$ 或 $\frac{\sqrt{11}}{6}$ D. $\frac{11}{20}$ 或 $\frac{11}{36}$

2. 执行如图所示的程序框图，输出的结果为（ ）



- A. $\frac{19}{3}$ B. 4 C. $\frac{25}{4}$ D. $\frac{13}{2}$

3. 设 $a = \log_2 3$ ， $b = \log_4 6$ ， $c = 5^{-0.1}$ ，则（ ）

- A. $a > b > c$ B. $b > a > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

4. 已知函数 $f(x) = m^x - m$ ($m > 0$, 且 $m \neq 1$) 的图象经过第一、二、四象限，则 $a = |f(\sqrt{2})|$ ， $b = \left| f\left(4^{\frac{3}{8}}\right) \right|$ ， $c = |f(0)|$

的大小关系为（ ）

- A. $c < b < a$ B. $c < a < b$

C. $a < b < c$

D. $b < a < c$

5. 已知复数 z 满足 $\frac{1+i}{1-i} \cdot \bar{z} = 2-i$ (其中 \bar{z} 为 z 的共轭复数), 则 $|z|$ 的值为()

A. 1

B. 2

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{5}$

6. 若不等式 $a \ln(x+1) - x^3 + 2x^2 > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的解集中有且仅有三个整数, 则实数 a 的取值范围是()

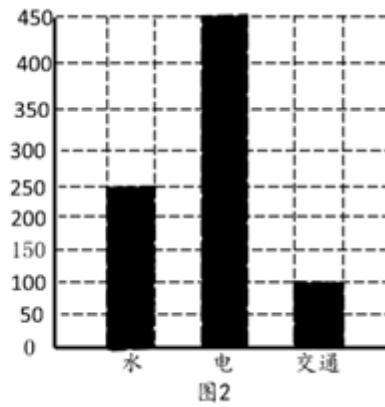
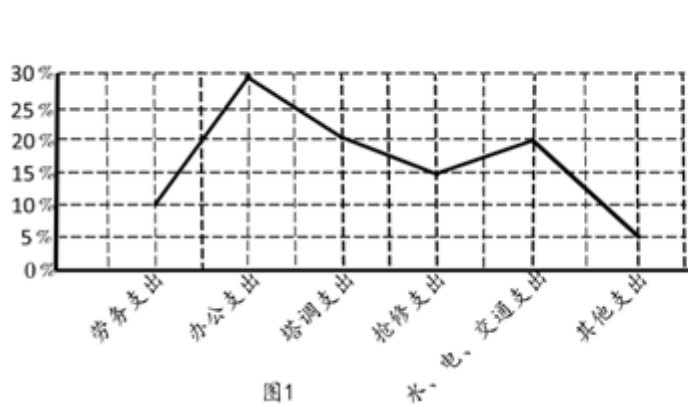
A. $\left[\frac{9}{2 \ln 2}, \frac{32}{\ln 5} \right]$

B. $\left(\frac{9}{2 \ln 2}, \frac{32}{\ln 5} \right)$

C. $\left(\frac{9}{2 \ln 2}, \frac{32}{\ln 5} \right)$

D. $\left(\frac{9}{2 \ln 2}, +\infty \right)$

7. 某单位去年的开支分布的折线图如图 1 所示, 在这一年中的水、电、交通开支 (单位: 万元) 如图 2 所示, 则该单位去年的水费开支占总开支的百分比为 ()



A. 6.25%

B. 7.5%

C. 10.25%

D. 31.25%

8. 复数 $z = \frac{i}{1+2i}$ 的共轭复数在复平面内所对应的点位于()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

9. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = k) = C_2^k (1-p_i)^{2-k} p_i^k$, $i=1,2$, $k=0,1,2$. 若 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$, 则 ()

A. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

B. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

C. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$

D. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

10. 函数 $f(x) = \sin(x+\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上为增函数, 则 θ 的值可以是()

A. 0

B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. $\frac{3\pi}{2}$

11. 设 i 为虚数单位, z 为复数, 若 $\frac{|z|}{z} + i$ 为实数 m , 则 $m =$ ()

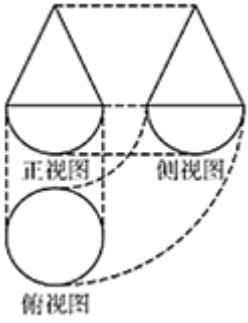
A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

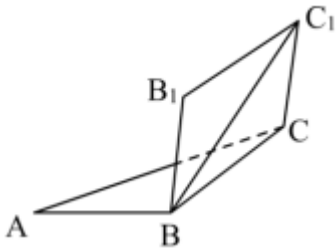
12. 某几何体的三视图如图所示，图中圆的半径为1，等腰三角形的腰长为3，则该几何体表面积为（ ）



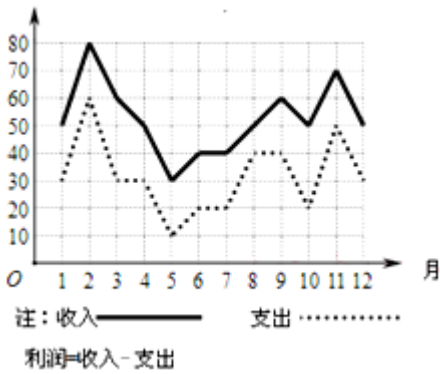
- A. 7π B. 6π C. 5π D. 4π

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 如图所示，平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC ， $\angle ABC = 120^\circ$ ，四边形 BCC_1B_1 为正方形，且 $AB = BC = 2$ ，则异面直线 BC_1 与 AC 所成角的余弦值为_____.



14. 某商场一年中各月份的收入、支出情况的统计如图所示，下列说法中正确的是_____.



- ① 2至3月份的收入的变化率与11至12月份的收入的变化率相同；
 ② 支出最高值与支出最低值的比是6:1；
 ③ 第三季度平均收入为50万元；
 ④ 利润最高的月份是2月份.

15. 已知向量 $\vec{a} = (\cos 5^\circ, \sin 5^\circ)$ ， $\vec{b} = (\cos 65^\circ, \sin 65^\circ)$ ，则 $|\vec{a} + \vec{b}| =$ _____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ，若 $\sqrt{3} \sin A - \cos A = 1$ ， $a = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_____.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，满足 $\sqrt{3} \sin A + \cos A = 0$. 有三个条件：① $a = 1$

；② $b = \sqrt{3}$ ；③ $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 其中三个条件中仅有两个正确，请选出正确的条件完成下面两个问题：

(1) 求 c ；

(2) 设 D 为 BC 边上一点，且 $AD \perp AC$ ，求 $\triangle ABD$ 的面积.

18. (12分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且椭圆 C 的一个焦点与抛物线 $y^2 = 4\sqrt{3}x$ 的

焦点重合. 过点 $E(1, 0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ 两点， O 为坐标原点.

(1) 若直线 l 过椭圆 C 的上顶点，求 $\triangle MON$ 的面积；

(2) 若 A, B 分别为椭圆 C 的左、右顶点，直线 MA, NB, MB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 ，求 $k_3(k_1 + k_2)$ 的值.

19. (12分) 传染病的流行必须具备的三个基本环节是：传染源、传播途径和人群易感性. 三个环节必须同时存在，方能构成传染病流行. 呼吸道飞沫和密切接触传播是新冠病毒的主要传播途径，为了有效防控新冠病毒的流行，人们出行都应该佩戴口罩. 某地区已经出现了新冠病毒的感染病人，为了掌握该地区居民的防控意识和防控情况，用分层抽样的方法从全体居民中抽出一个容量为 100 的样本，统计样本中每个人出行是否会佩戴口罩的情况，得到下面列联表：

	戴口罩	不戴口罩
青年人	50	10
中老年人	20	20

(1) 能否有 99.9% 的把握认为是否会佩戴口罩出行的行为与年龄有关？

(2) 用样本估计总体，若从该地区出行不戴口罩的居民中随机抽取 5 人，求恰好有 2 人是青年人的概率.

附：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

20. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 的边长分别为 a, b, c ，且 $c = 2$.

(1) 若 $A = \frac{\pi}{3}$ ， $b = 3$ ，求 $\sin C$ 的值；

(2) 若 $\sin A \cos^2 \frac{B}{2} + \sin B \cos^2 \frac{A}{2} = 3 \sin C$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{25}{2} \sin C$ ，求 a 和 b 的值.

21. (12分) 已知函数 $f(x) = x \ln x - \frac{a}{2}x^2 - x, a \in \mathbf{R}, e \approx 2.71828 \dots$ 是自然对数的底数.

(1) 若 $a = -e$, 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 求 a 的取值范围, 并证明: $x_1 x_2 > x_1 + x_2$.

22. (10分) 已知函数 $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + \cos x (a \in \mathbf{R}), f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(1) 当 $a = 1$ 时, 令 $h(x) = f'(x) - x + \ln x, h'(x)$ 为 $h(x)$ 的导数. 证明: $h'(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 存在唯一的极小值点;

(2) 已知函数 $y = f(2x) - \frac{2}{3}x^4$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递减, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、C

【解析】

将 $S = \frac{\sqrt{11}}{2}, a = \sqrt{3}, b = 2$, 代入 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2 c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$, 解得 $c^2 = 5, c^2 = 9$, 再分类讨论, 利用余

弦定理求 $\cos A$, 再用平方关系求解.

【详解】

已知 $S = \frac{\sqrt{11}}{2}, a = \sqrt{3}, b = 2$,

代入 $S = \sqrt{\frac{1}{4}[a^2 c^2 - (\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2})^2]}$,

得 $\sqrt{\frac{1}{4}[3c^2 - (\frac{c^2 + 3 - 4}{2})^2]} = \frac{\sqrt{11}}{2}$,

即 $c^4 - 12c^2 + 45 = 0$,

解得 $c^2 = 5, c^2 = 9$,

当 $c^2 = 5$ 时, 由余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{55}}{10}$.

当 $c^2 = 9$ 时, 由余弦定理得: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5}{6}$, $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{11}{6}$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查余弦定理和平方关系, 还考查了对数学史的理解能力, 属于基础题.

2、A

【解析】

模拟执行程序框图, 依次写出每次循环得到的 x, M 的值, 当 $x = 3$, $M = \frac{19}{3} > 4$, 退出循环, 输出结果.

【详解】

程序运行过程如下:

$x = 3, M = 0$; $x = \frac{2}{3}, M = \frac{2}{3}$; $x = -\frac{1}{2}, M = \frac{1}{6}$;

$x = 3, M = \frac{19}{6}$; $x = \frac{2}{3}, M = \frac{23}{6}$;

$x = -\frac{1}{2}, M = \frac{10}{3}$; $x = 3, M = \frac{19}{3} > 4$, 退出循环, 输出结果为 $\frac{19}{3}$,

故选: A.

【点睛】

该题考查的是有关程序框图的问题, 涉及到的知识点有判断程序框图输出结果, 属于基础题目.

3、A

【解析】

先利用换底公式将对数都化为以 2 为底, 利用对数函数单调性可比较 a, b , 再由中间值 1 可得三者的大小关系.

【详解】

$a = \log_2 3 \in (1, 2)$, $b = \log_4 6 = \log_2 \sqrt{6} \in (1, \log_2 3)$, $c = 5^{-0.1} \in (0, 1)$, 因此 $a > b > c$, 故选: A.

【点睛】

本题主要考查了利用对数函数和指数函数的单调性比较大小, 属于基础题.

4、C

【解析】

根据题意, 得 $0 < m < 1$, $f(1) = 0$, 则 $f(x)$ 为减函数, 从而得出函数 $|f(x)|$ 的单调性, 可比较 a 和 b , 而

$c = |f(0)| = 1 - m$, 比较 $f(0), f(2)$, 即可比较 a, b, c .

【详解】

因为 $f(x) = m^x - m (m > 0, \text{且 } m \neq 1)$ 的图象经过第一、二、四象限,

所以 $0 < m < 1, f(1) = 0$,

所以函数 $f(x)$ 为减函数, 函数 $|f(x)|$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

又因为 $1 < \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} < 4^{\frac{3}{8}} = 2^{\frac{3}{4}} < 2$,

所以 $a < b$,

又 $c = |f(0)| = 1 - m, |f(2)| = m^2 - m$,

则 $|f(2)| - |f(0)| = m^2 - 1 < 0$,

即 $|f(2)| < |f(0)|$,

所以 $a < b < c$.

故选: C.

【点睛】

本题考查利用函数的单调性比较大小, 还考查化简能力和转化思想.

5、D

【解析】

按照复数的运算法则先求出 \bar{z} , 再写出 z , 进而求出 $|z|$.

【详解】

$$\text{Q } \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i,$$

$$\therefore \frac{1+i}{1-i} \cdot \bar{z} = 2-i \Rightarrow i \cdot \bar{z} = 2-i \Rightarrow \bar{z} = \frac{2-i}{i} = -i(2-i) = -1-2i,$$

$$\therefore z = -1+2i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

故选: D

【点睛】

本题考查复数的四则运算、共轭复数及复数的模, 考查基本运算能力, 属于基础题.

6、C

【解析】

由题可知，设函数 $f(x) = a \ln(x+1)$ ， $g(x) = x^3 - 2x^2$ ，根据导数求出 $g(x)$ 的极值点，得出单调性，根据

$a \ln(x+1) - x^3 + 2x^2 > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的解集中有且仅有三个整数，转化为 $f(x) > g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的解集中有且仅有三个整数，结合图象，可求出实数 a 的取值范围。

【详解】

设函数 $f(x) = a \ln(x+1)$ ， $g(x) = x^3 - 2x^2$ ，

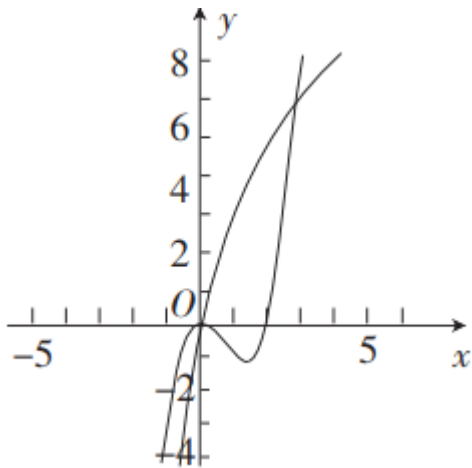
因为 $g'(x) = 3x^2 - 4x$ ，

所以 $g'(x) = 0$ ，

$$\therefore x = 0 \text{ 或 } x = \frac{4}{3},$$

因为 $0 < x < \frac{4}{3}$ 时， $g'(x) < 0$ ，

$x > \frac{4}{3}$ 或 $x < 0$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(0) = g(2) = 0$ ，其图象如下：



当 $a = 0$ 时， $f(x) > g(x)$ 至多一个整数根；

当 $a > 0$ 时， $f(x) > g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的解集中仅有三个整数，只需 $\begin{cases} f(3) > g(3) \\ f(4) \leq g(4) \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} a \ln 4 > 3^3 - 2 \times 3^2 \\ a \ln 5 \leq 4^3 - 2 \times 4^2 \end{cases},$$

$$\text{所以 } \frac{9}{2 \ln 2} < a \leq \frac{32}{\ln 5}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查不等式的解法和应用问题，还涉及利用导数求函数单调性和函数图象，同时考查数形结合思想和解题能力.

7、A

【解析】

由折线图找出水、电、交通开支占总开支的比例，再计算出水费开支占水、电、交通开支的比例，相乘即可求出水费开支占总开支的百分比。

【详解】

水费开支占总开支的百分比为 $\frac{250}{250+450+100} \times 20\% = 6.25\%$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查折线图与柱形图，属于基础题。

8、D

【解析】

由复数除法运算求出 z ，再写出其共轭复数，得共轭复数对应点的坐标。得结论。

【详解】

$z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i+2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ ， $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ ，对应点为 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ ，在第四象限。

故选：D.

【点睛】

本题考查复数的除法运算，考查共轭复数的概念，考查复数的几何意义。掌握复数的运算法则是解题关键。

9、B

【解析】

根据二项分布的性质可得： $E(\xi_i) = p_i$ ， $D(\xi_i) = p_i(1-p_i)$ ，再根据 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ 和二次函数的性质求解。

【详解】

因为随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = k) = C_2^k (1-p_i)^{2-k} p_i^k$ ， $i=1,2$ ， $k=0,1,2$ 。

所以 ξ_i 服从二项分布，

由二项分布的性质可得： $E(\xi_i) = p_i$ ， $D(\xi_i) = p_i(1-p_i)$ ，

因为 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ ，

所以 $E(\xi_1) < E(\xi_2)$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/326034103202010234>