南山区 2022-2023 学年度第一学期期末质量监测

高二数学试题

注意事项：

1．本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分，考试用时 120 分钟．

2．答卷前，考生务必将自己的学校，班级和姓名填在答题卡上，正确粘贴条形码．

3．作答选择题时，用 2B 铅笔在答题卡上将对应答案的选项涂黑．

4. 非选择题的答案必须写在答题卡各题目的指定区域内相应位置上，不准使用铅笔和涂改液．

5．考试结束后，考生上交答题卡．

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 抛物线 $x^2=4y$ 的焦点坐标是

A. $(1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(2,0)$　　D. $(0,2)$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据抛物线定义,可直接得焦点坐标.

【详解】$x^2=4y$ 是焦点位于 y 轴上的抛物线

所以 $p=2$

即焦点坐标为 $(0,1)$

故选:B

【点睛】本题考查了抛物线的标准方程及焦点求法,属于基础题.

2. 若 $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ 构成空间的一组基底，则下列向量不共面的为（　　）

A　$\vec{a}$，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{c}$　　B. $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{a}+2\vec{b}$

C. $\vec{a}$，$\vec{a}-\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{c}$　　D. $\vec{b}$，$\vec{a}+\vec{c}$，$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据平面向量的基本定理，可得答案.

【详解】对于 A，设 $x,y\in\mathrm{R}$，则 $x\vec{a}+y\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{c}$，显然不存在 x,y 使得等式成立，故 A 正确；

对于 B，设 $x,y\in\mathrm{R}$，则 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{a}+2\vec{b}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$，故 B 错误；

对于 C，设 $x,y\in\mathrm{R}$，则 $x\vec{a}+y\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{c}$，即 $\begin{cases}x+y=1\\-y=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$，故 C 错误；

对于 D，设 $x,y\in\mathrm{R}$，则 $x\vec{b}+y\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，故 D 错误.

故选：A.

3. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=2$，且 $S_4=10$，则 $\{a_n\}$ 的公差为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】利用等差数列的求和公式以及等差数列的性质可求得 a_3 的值，即可求得数列 $\{a_n\}$ 的公差.

【详解】因为 $S_4=\frac{4\left(a_1+a_4\right)}{2}=2\left(a_2+a_3\right)=10$，$\because a_2=2$，则 $a_3=3$，

因此，等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d=a_3-a_2=1$.

故选：B.

4. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{3+k}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 的焦点在 y 轴上，则实数 k 的取值范围为（　　）

A. $(-3,1)$　　B. $(1,5)$　　C. $(-3,5)$　　D. $(1,3)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据椭圆 C 的焦点位置可得出关于 k 的不等式组，即可解得实数 k 的取值范围.

【详解】因为椭圆 $C:\frac{x^2}{3+k}+\frac{y^2}{5-k}=1$ 的焦点在 y 轴上，则 $\begin{cases}3+k>0\\5-k>0\\5-k>3+k\end{cases}$，解得 $-3<k<1$.

故选：A.

5. 已知 $A\left(2,-3\right)$、$B\left(2,1\right)$，若直线 l 经过点 $P\left(0,-1\right)$，且与线段 AB 有交点，则 l 的斜率的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$　　　　B. $[-2,2]$

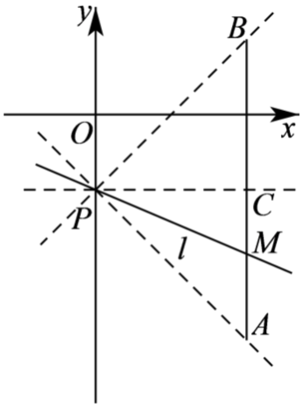
C. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　　　D. $[-1,1]$

【答案】D

【解析】

【分析】作出图形，数形结合可得出直线l的斜率的取值范围.

【详解】过点P作$PC\perp AB$，垂足为点C，如图所示：



设直线l交线段AB于点M，设直线l的斜率为k，且$k_{PA}=\dfrac{-1+3}{0-2}=-1$，$k_{PB}=\dfrac{1+1}{2-0}=1$，

当点M在从点A运动到点C（不包括点C）时，直线l的倾斜角逐渐增大，

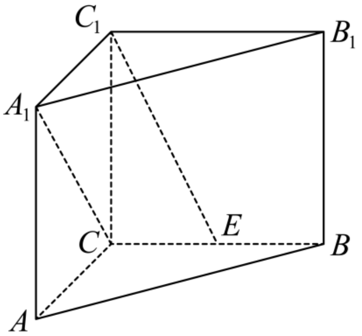
此时$-1=k_{PA}\le k<0$；

当点M在从点C运动到点B时，直线l的倾斜角逐渐增大，此时$0\le k\le k_{PB}=1$.

综上所述，直线l的斜率的取值范围是$[-1,1]$.

故选：D.

6. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=AC=BC$，且$AC\perp BC$，已知E为BC的中点，则异面直线A_1C与C_1E所成角的余弦值为（　　）



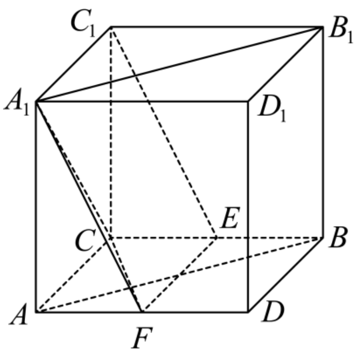
A. $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据直三棱柱的几何性质，补形成正方体，利用异面直线夹角的定义，结合余弦定理，可得答案.

【详解】由题意，可得该三棱柱可看作正方体的一半，补形如下图所示：



记 AD 的中点为 F，连结 A_1F, CF, EF，

因为在正方形 $ABCD$，E, F 是 BC, AD 的中点，

所以 $EF//AC, EF=AC$，

又 $A_1C_1//AC, A_1C=AC$，所以 $EF//A_1C_1, EF=A_1C_1$，

故四边形 A_1C_1EF 是平行四边形，则 $A_1F//C_1E$，

则 $\angle FA_1C$ 为直线 A_1C 与 C_1E 的夹角或其补角，

设该正方体的边长为 2，

在 $\mathrm{Rt}\triangle AA_1F$ 中，$A_1F=\sqrt{AF^2+AA_1^2}=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}AD\right)^2+AA_1^2}=\sqrt{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACF$ 中，$CF=\sqrt{AC^2+AF^2}=\sqrt{AC^2+\left(\dfrac{1}{2}AD\right)^2}=\sqrt{5}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACA_1$ 中，$A_1C=\sqrt{AA_1^2+AC^2}=2\sqrt{2}$，

在 $\triangle A_1CF$ 中，$\cos\angle CA_1F=\dfrac{A_1C^2+A_1F^2-CF^2}{2\cdot A_1C\cdot A_1F}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

故选：B.

7. 已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，以$\left|F_1F_2\right|$为直径的圆与$C$的左支交于$M$、$N$两点，若$\angle MF_1N=\dfrac{2\pi}{3}$，则$C$的离心率为（　　）

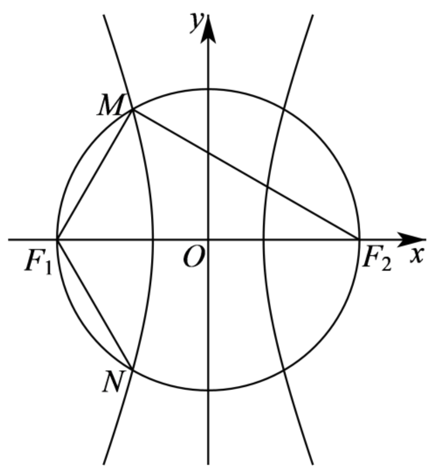
A. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】连接MF_2，求出$\left|MF_1\right|$、$\left|MF_2\right|$，利用双曲线的定义可得出关于a、c的齐次等式，即可解得双曲线C的离心率的值.

【详解】如下图所示，易知点M、N关于x轴对称，连接MF_2，所以，$\angle MF_1F_2=\dfrac{\pi}{3}$，



由圆的几何性质可得$\angle F_1MF_2=\dfrac{\pi}{2}$，所以，$\left|MF_1\right|=2c\cos\dfrac{\pi}{3}=c$，$\left|MF_2\right|=2c\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}c$，

由双曲线的定义可得$\left|MF_2\right|-\left|MF_1\right|=\left(\sqrt{3}-1\right)c=2a$，

因此，双曲线C的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$.

故选：C.

8. 著名的斐波那契数列是意大利数学家斐波那契以兔子繁殖为例引入，又称兔子数列，记该数列为$\left\{a_n\right\}$，则$a_1=1$，$a_2=1$，且$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$. 已知斐波那契数列有诸多特殊的性质，例如：（1）$a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n+2}-a_na_{n+1}$；（2）斐波那契数列中各项的个位数是以60为周期变化的，则由上述性质可知$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{365}^2$的个位数为（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 2　　D. 0

【答案】D

【解析】

【分析】利用两个性质可得出$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{365}^2=a_{365}a_{366}$，计算出$a_5a_6$的个位数，即可求出$a_{365}a_{366}$的个位数，即可得解.

【详解】由性质(1)可知$a_2^2=a_2a_3-a_2a_1$，$a_3^2=a_3a_4-a_3a_2$，$a_4^2=a_4a_5-a_4a_3$，$\cdots$，$a_{365}^2=a_{365}a_{366}-a_{365}a_{364}$，

上述等式全部相加可得$a_2^2+a_3^2+a_4^2+\cdots+a_{365}^2=a_{365}a_{366}-a_2a_1$，

$\because a_1=a_2=1$，所以，$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{365}^2=a_{365}a_{366}$，

由性质（2）可知a_{365}与a_5的个位数相同，a_{366}与a_6的个位数相同，且不难知道，$a_5=5$，$a_6=8$，

所以，a_5a_6的个位数为0，则$a_{365}a_{366}$的个位数也为0，

因此，$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{365}^2$的个位数为$0$.

故选：D.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 设圆C：$(x-1)^2+y^2=4$，直线l：$y=kx+1(k\in\mathbf{R})$，则下列结论正确的为（　　）

A. C的半径为 2　　B. l恒过定点$(0,1)$

C. l可能与C相切　　D. 当$k=1$时，l被C截得的弦长最短

【答案】ABD

【解析】

【分析】化简圆的标准方程即可判断 A，令$x=0$，代入直线方程即可判断 B，将$(0,1)$代入圆方程即可判断 C，当直线l与定点与圆心连线所在直线互相垂直时，弦长最短，即可判断 D.

【详解】对 A，$\because(x-1)^2+y^2=2^2$，所以C的半径为 2，故 A 正确；

对 B，当$x=0$时，$y=1$，故直线l恒过定点$(0,1)$，故 B 正确；

对 C，将$(0,1)$代入圆方程有$(0-1)^2+1^2=2<4$，故定点$(0,1)$在圆内，

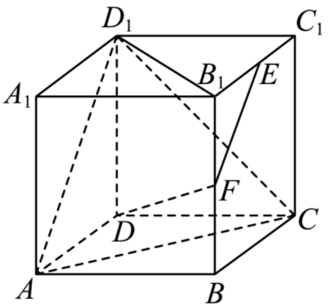
故直线与圆一定相交；

对 D，圆心$C(1,0)$，设直线l恒过定点$M(0,1)$，则当直线CM与直线l相互垂直时，

l被C截得的弦长最短，故$k_{CM}\cdot k=-1$，即$\dfrac{1-0}{0-1}\cdot k=-1$，则$k=1$，故D正确.

故选：ABD.

10. 如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E、F分别为棱B_1C_1、B_1B的中点，则下列结论正确的为（　　）



A. $\overrightarrow{AD_1}=2\overrightarrow{EF}$

B. $\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

C. $\left|\overrightarrow{DF}\right|=3$

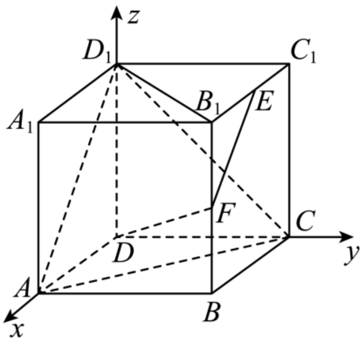
D. $\overrightarrow{DF}$为平面ACD_1的一个法向量

【答案】BC

【解析】

【分析】以点D为坐标原点，DA、DC、DD_1所在直线分别为x、y、z轴建立空间直角坐标系，利用空间向量的坐标运算可判断各项的正误.

【详解】以点D为坐标原点，DA、DC、DD_1所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，



则$A(2,0,0)$、$B(2,2,0)$、$C(0,2,0)$、$D(0,0,0)$、$A_1(2,0,2)$、$B_1(2,2,2)$、$C_1(0,2,2)$、$D_1(0,0,2)$、$E(1,2,2)$、$F(2,2,1)$.

对于A选项，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(1,0,-1)$，则$\overrightarrow{AD_1}=-2\overrightarrow{EF}$，A错；

对于B选项，$\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，则$\overrightarrow{B_1D_1}\cdot\overrightarrow{AC}=4-4=0$，B对；

对于 C 选项，$\overrightarrow{DF}=(2,2,1)$，故$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，C 对；

对于 D 选项，$\overrightarrow{DF}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-4+2\neq 0$，故$\overrightarrow{DF}$不是平面$ACD_1$的一个法向量，D 错.

故选：BC.

11. 已知公差为 d 的等差数列$\{a_n\}$，其前 n 项和为S_n，且$S_{10}>0$，$S_{11}<0$，则下列结论正确的为（　　）

A. $\{a_n\}$为递增数列

B. $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列

C. 当S_n取得最大值时，$n=6$

D. 当$a_2=1$时，d的取值范围为$\left(-\frac{2}{7},-\frac{1}{4}\right)$

【答案】BD

【解析】

【分析】通过等差数列前n项和公式和下标和性质即可得到$d<0$，$a_1>0$，$a_6<0$，$a_5>0$，则可判断 AC，而$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{d}{2}(n-1)$则可判断 B，而通过$a_5+a_6>0$，$a_6<0$，则可得到关于$d$的不等式组，即可判断 D.

【详解】对 A，$\because S_{10}>0,S_{11}<0$，即$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}>0$，$\frac{11(a_1+a_{11})}{2}<0$，

即$5(a_5+a_6)>0$，$11a_6<0$，则$a_6<0$，而$a_5>-a_6>0$，故$d=a_6-a_5<0$，

故$\{a_n\}$为递减数列，故 A 错误；

对 B，设$\{a_n\}$的首项为a_1，则$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，

$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d=a_1+\frac{d}{2}(n-1)$，故数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是以$a_1$为首项，公差为$\frac{d}{2}$的等差数列，故 B 错误；

对 C，由 A 知$a_6<0$，即$S_6-S_5<0$，则$S_6<S_5$，而$a_5>0$，即$a_1+4d>0$，

则$a_1>-4d>0$，而$d<0$，当S_n取得最大值时,$n=5$，故 C 错误；

对 D，当$a_2=1$时，由 A 知$a_5+a_6>0$，$a_6<0$，即$\begin{cases}a_2+3d+a_2+4d>0\\ a_2+4d<0\end{cases}$，

即$\begin{cases}2+7d>0\\ 1+4d<0\end{cases}$，解得$d\in\left(-\frac{2}{7},-\frac{1}{4}\right)$，故 D 正确.

故选：BD.

12. 已知椭圆$C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$和$C_2:\frac{x^2}{4}+y^2=\lambda(\lambda>1)$，点$M(x_0,y_0)(x_0y_0\neq0)$在$C_1$上，且直线$x_0x+4y_0y=4$与$C_2$交于A、B两点，若点$N$在$C_2$上，使得$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，则下列结论正确的为（　　）

A. C_1、C_2的离心率相等

B. $\lambda=2$

C. 直线ON、AB的斜率之积为定值

D. 四边形$OANB$的面积为$4\sqrt{3}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】计算出两椭圆的的离心率，可判断A选项；求出点N的坐标，将点N的坐标代入椭圆C_2的方程，求出λ的值，可判断B选项；利用斜率公式以及椭圆方程可判断C选项；利用三角形的面积公式求出四边形$OANB$的面积，可判断D选项.

【详解】设点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，椭圆C_1、C_2的离心率分别为e_1、e_2.

对于A选项，$e_1=\frac{\sqrt{4-1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$e_2=\frac{\sqrt{4\lambda-\lambda}}{2\sqrt{\lambda}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，A对；

对于B选项，联立$\begin{cases}x_0x+4y_0y=4\\x^2+4y^2=4\lambda\end{cases}$可得$x^2-2x_0x+4-4\lambda y_0^2=0$，所以，$x_1+x_2=2x_0$，

由题意可知$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，则$y_1+y_2=\frac{4-x_0x_1+4-x_0x_2}{4y_0}=\frac{8-x_0(x_1+x_2)}{4y_0}=\frac{8-2x_0^2}{4y_0}=2y_0$，

因为$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=(2x_0,2y_0)$，

则点$N(2x_0,2y_0)$在椭圆C_2上，所以，$\lambda=\frac{4x_0^2}{4}+4y_0^2=4$，B错；

对于C选项，由B选项可知，椭圆C_2的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，$N(2x_0,2y_0)$，

则$k_{ON}=\frac{2y_0}{2x_0}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，

由已知可得$\begin{cases}\frac{x_1^2}{16}+\frac{y_1^2}{4}=1\\\frac{x_2^2}{16}+\frac{y_2^2}{4}=1\end{cases}$，两式作差可得$k_{AB}k_{ON}=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=-\frac{1}{4}$，C对；

对于D选项，显然四边形$OANB$为平行四边形，其面积记为S_1，$\triangle OAB$的面积记为S_2，

因为 $x_0y_0\neq 0$，所以，直线 l 与 y 轴必有交点，不妨设为 P，且 $P\left(0,\dfrac{1}{y_0}\right)$，

$S_2=\dfrac{1}{2|y_0|}\cdot|x_1-x_2|$，故 $S_1=2S_2=\dfrac{1}{|y_0|}|x_1-x_2|$，

由韦达定理可得 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4-16y_0^2$ 且 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，

所以，$S_1=\dfrac{1}{|y_0|}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{1}{|y_0|}\sqrt{4x_0^2-4\left(4-16y_0^2\right)}=\dfrac{1}{|y_0|}\sqrt{4\left(4-4y_0^2\right)-4\left(4-16y_0^2\right)}$

$=4\sqrt{3}$，D 对.

故选：ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $\vec{a}=(1,2,-3)$，$\vec{b}=(-2,m,6)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$________.

【答案】-4

【解析】

【分析】根据空间向量共线的坐标表示可求得实数 m 的值.

【详解】因为 $\vec{a}=(1,2,-3)$，$\vec{b}=(-2,m,6)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\dfrac{-2}{1}=\dfrac{m}{2}=\dfrac{6}{-3}$，解得 $m=-4$.

故答案为：-4.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{a_n}+3\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，则 $a_1a_3=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】根据递推公式求出 a_1、a_3 的值，进而可求得 a_1a_3 的值.

【详解】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{a_n}+3\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

则 $a_2=-\dfrac{1}{a_1}+3=1$，可得 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_3=\dfrac{1}{a_2}+3=4$，因此，$a_1a_3=2$.

故答案为：2.

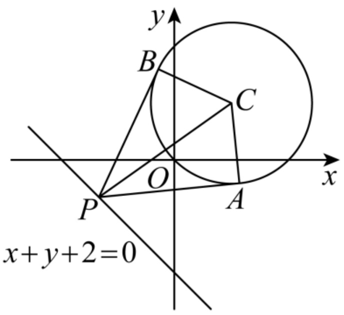
15. 已知圆 $C:x^2+y^2-2x-2y=0$，点 P 在直线 $x+y+2=0$ 上运动，过 P 作 C 的两条切线，切点分别为 A 、B，当四边形 $PACB$ 的面积最小时，$\angle ACB=$________.

【答案】120°

【解析】

【分析】证明出 $Rt\triangle PAC\cong Rt\triangle PBC$，计算出 $|PC|$ 的最小值，可得出 $|PA|$ 的最小值，可得出四边形 $PACB$ 的面积最小值，可求得 $\angle APC$ 的值，进而可得出 $\angle ACB$ 的值.

【详解】如图所示：



由圆的几何性质可得 $PB\perp BC$， $PA\perp AC$，

由切线长定理可得 $|PA|=|PB|$，又因为 $|AC|=|BC|$， $|PC|=|PC|$，

所以， $Rt\triangle PAC\cong Rt\triangle PBC$，

圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$，圆心为 $C(1,1)$，半径为 $r=\sqrt{2}$，

所以， $|PA|=\sqrt{|PC|^2-|AC|^2}=\sqrt{|PC|^2-2}$，

当 PC 与直线 $x+y+2=0$ 垂直时， $|PC|$ 取最小值，且 $|PC|_{\min}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

所以， $|PA|_{\min}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2}=\sqrt{6}$，

所以， $S_{四边形PACB}=2S_{\triangle PAC}=|PA|\cdot|AC|\geq 2\sqrt{3}$，此时 $\angle BPC=\angle APC=30^{\circ}$，

因此， $\angle ACB=2\angle ACP=2(90^{\circ}-\angle APC)=120^{\circ}$.

故答案为： 120°.

16. 如图，在直角 $\triangle ABC$ 中， $AB=1$， $BC=2$， D 为斜边 AC 上异于 A 、 C 的动点，若将 $\triangle ABD$ 沿折痕 BD 翻折，使点 A 折至 A_1 处，且二面角 A_1-BD-C 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$，则线段 A_1C 长度的最小值为________.