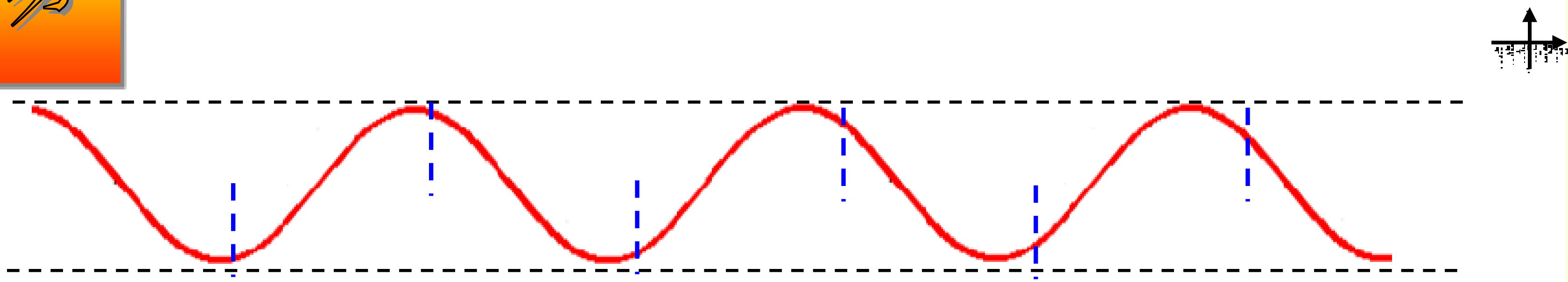
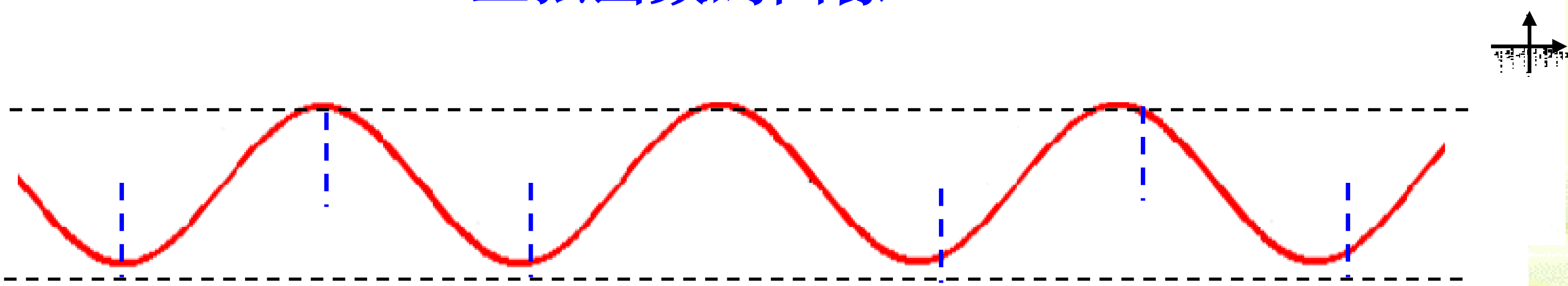
新课导入

观察

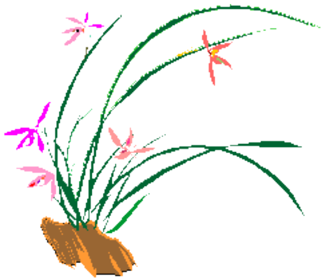


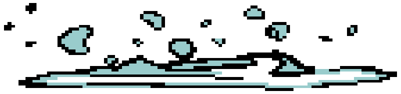
正弦函数的图像



余弦函数的图像

1.4.2正、余弦函数的性质

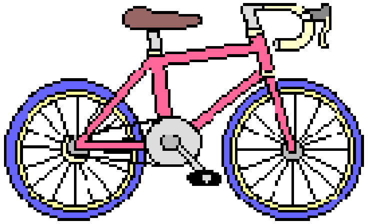




教学目的

➢ 知识与能力

能了解周期函数，周期函数的周期和最小正周期的定义；了解三角函数的奇、偶性和单调性。



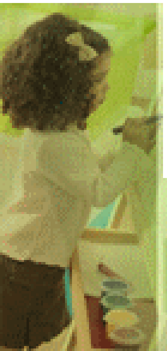
➢ 过程与措施

掌握正、余弦函数的周期和最小正周期，并能求出正、余弦函数的最小正周期。掌握正、余弦函数的奇、偶性的判断，并能求出正、余弦函数的单调区间。

➢ 情感态度与价值观

能够根据函数图像而导出周期性，领略从特殊推广到一般的数学思想，体会三角函数图像所蕴涵的友好美，激发学数学的爱好。

激发学生学习数学的爱好和主动性，陶冶学生的情操，培养学生坚忍不拔的意志，实事求是的科学学习态度和敢于创新的精神。



教学重难点

➢ **要点：**

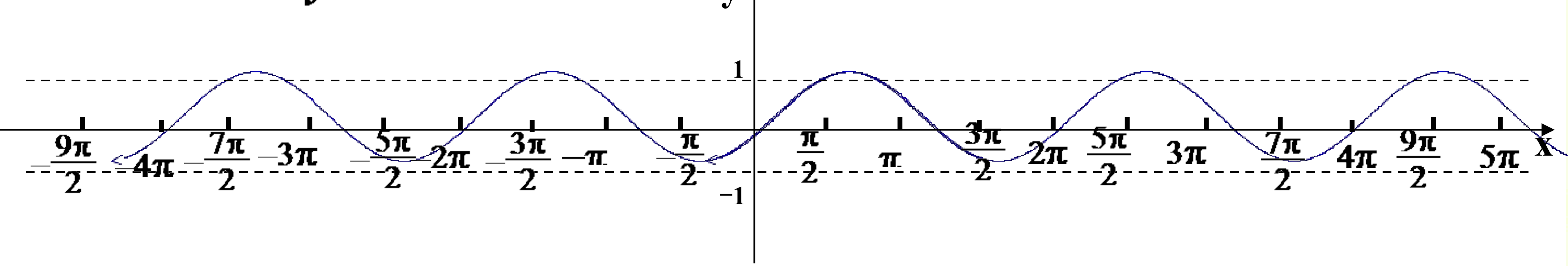
正、余弦函数的周期性；正、余弦函数的奇、偶性和单调性。

➢ **难点：**

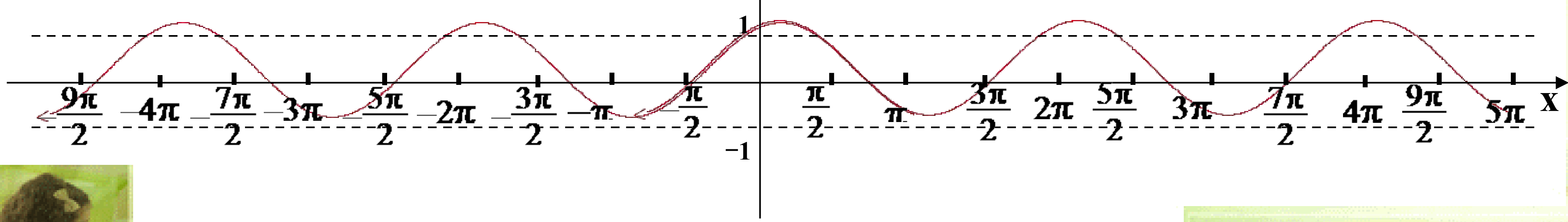
正、余弦函数周期性的了解与应用；正、余弦函数奇、偶性和单调性的了解与应用。

一、观察函数周期性

正弦曲线：$y = \sin x \quad x \in R$



余弦曲线：$y = \cos x \quad x \in R$



周期函数定义：对于函数$f(x)$，假如存在一种非零常数T，使得当x取定义域内的每一种值时，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

那么，**函数$f(x)$就叫做周期函数，非零常数T叫做这个函数的周期。**

注：

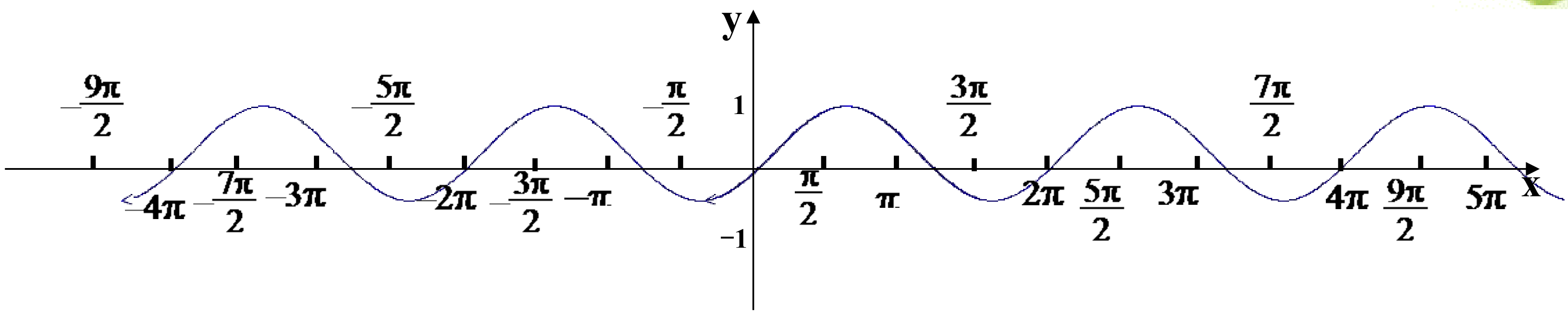
1、T要是非零常数；

2、“每一种值”只要有一种反例，则$f(x)$就不为周期函数（如$f(x_0+t)\neq f(x_0)$）；

3、周期函数的周期T往往是多值的（如$y=\sin x$　$2\pi,4\pi,\ldots,-2\pi,-4\pi,\ldots$都是周期）；

4、周期T中最小的正数叫做$f(x)$的最小正周期（有些周期函数没有最小正周期）。

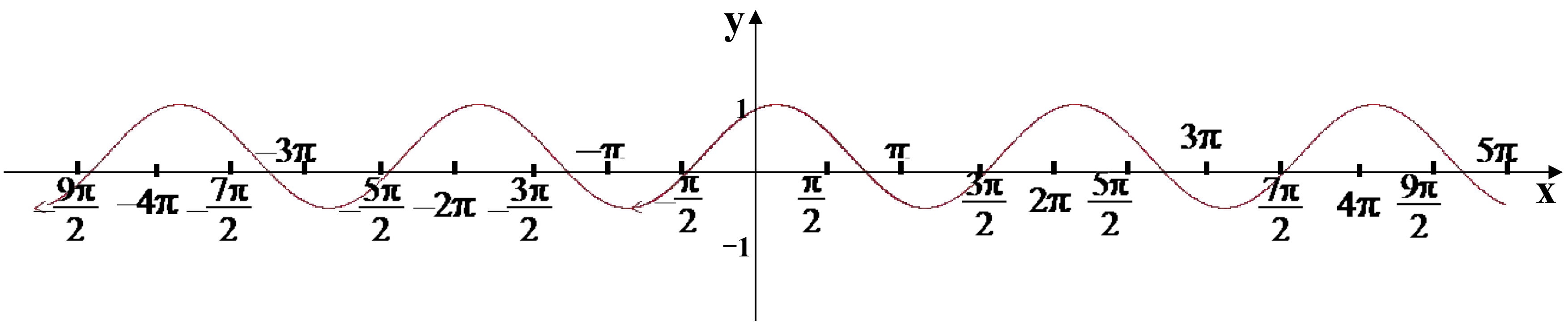
正弦曲线：$y=\sin x \quad x\in R$



周期性：

正弦函数是周期函$2k\pi(k\in Z$ 且 $k\neq 0)$，最小正周期是2π。

余弦曲线：$y = \cos x \quad x \in R$



周期性：

余弦函数的周期为$2k\pi(k \in Z$且$k \neq 0)$，最小正周期是2π。

例1. 求下列函数的周期.

(1) $y = 3\cos x, x \in R$;

(2) $y = 2\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}), x \in R$。

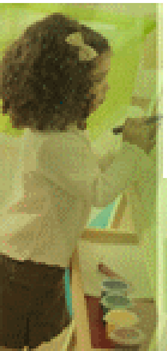
解:

(1) $\because 3\cos(x+2\pi)=3\cos x$

∴ 由周期函数的定义懂得，原函数的周期为2π。

(2) $\because 2\sin[\frac{1}{2}(x+4\pi)-\frac{\pi}{6}]=2\sin[(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})+2\pi]$

$=2\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})$



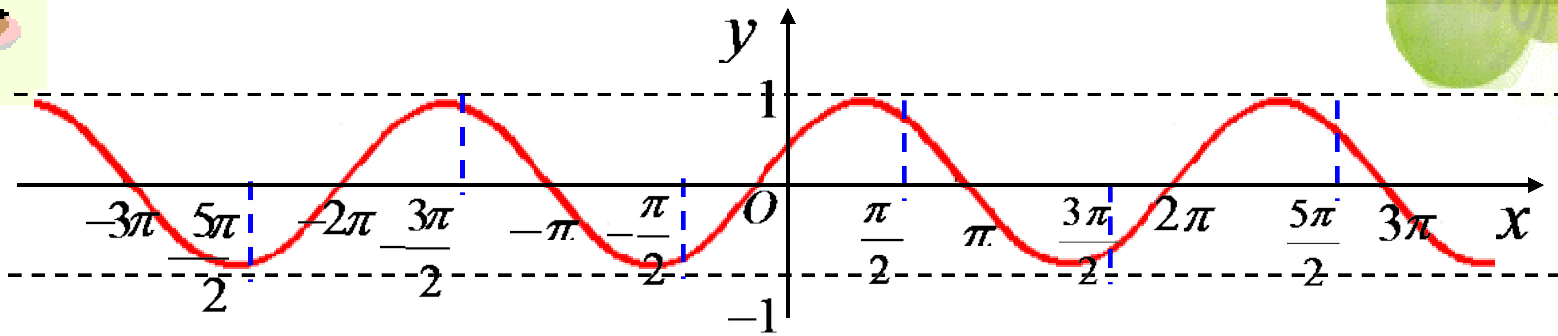
∴由周期函数的定义懂得，原函数的周期为4π。

注：由上面的得出：

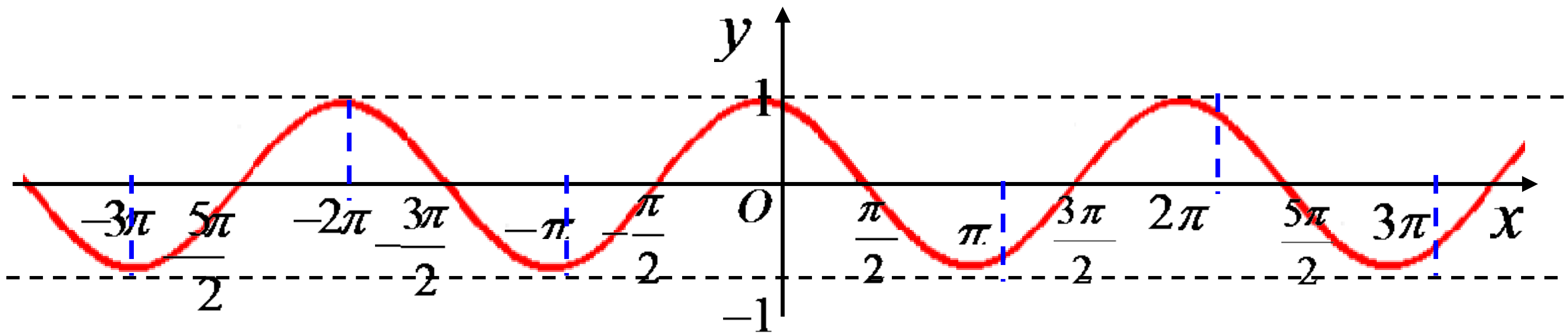
函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的周期是$\dfrac{2\pi}{\omega}$；

函数$y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的周期是$\dfrac{2\pi}{\omega}$。

二、观察正余弦函数图像奇偶性



正弦函数的图像

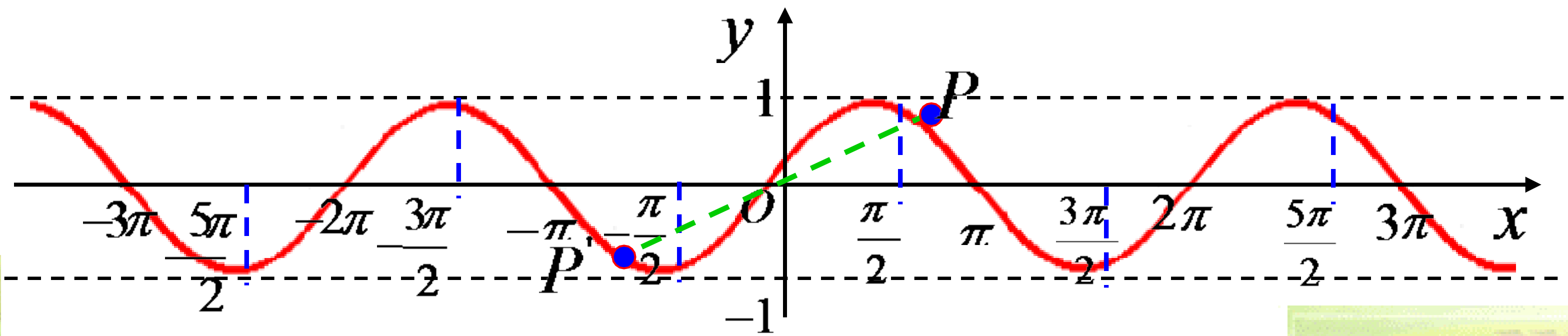


余弦函数的图像

问题：它们的图像有什么特征？

这阐明：将正弦函数曲线绕原点旋转180度后所得的曲线能够和原来的曲线重叠.即正弦函数有关原点对称。正弦函数是奇函数。

正弦函数的图像

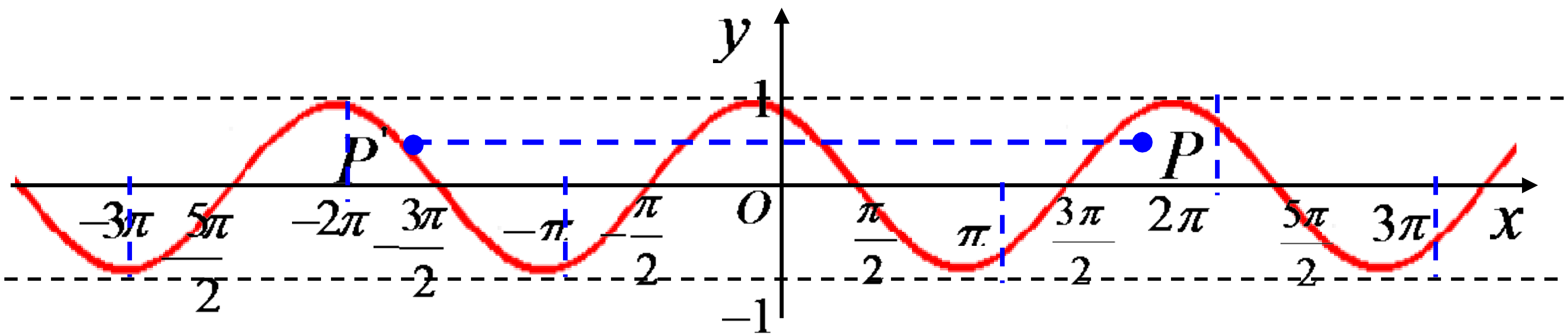


对称性

正弦曲线是中心对称图形，其全部的对称中心坐标为 $(k\pi, 0)\quad (k \in Z)$。

同步还是轴对称图形，其全部的对称轴方程是 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}\quad (k \in Z)$。

观察余弦函数的图像



这阐明若将余弦曲线延着 y轴折叠，y轴两旁的部分能够相互重叠 ，即余弦曲线有关y轴对称。

余弦函数是偶函数。

对称性

余弦曲线是中心对称图形，其全部的对称中心坐标为 $(k\pi+\frac{\pi}{2},0)\quad(k\in Z)$。

同步还是轴对称图形，其全部的对称轴方程是 $x=k\pi\quad(k\in Z)$。

三、复习函数的单调性

函数若在$y=f(x)$,指定区间任取x_1, x_2，

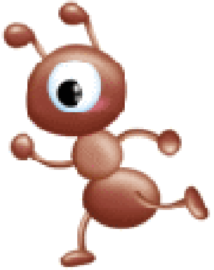
且$x_1<x_2$，都有:

1、$f(x_1)<f(x_2)$，则 **f(x)** 在这个区间上是<u>单增函数</u>;

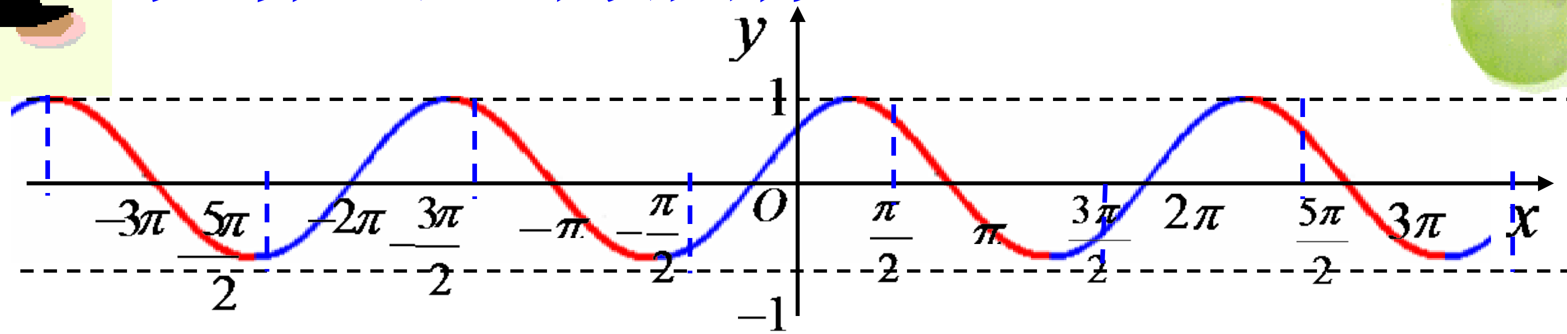
2、$f(x_1)>f(x_2)$，则f(x)在这个区间上是<u>单减函数</u>

函数的单调性反应了函数在一种区间上的走向。

请仔细观察正余弦函数的图像，看看其是否具有此类性质？



先看正弦函数图像



当 x 在区间 $\cdots\left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right],\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\cdots$ 上时，曲线逐渐上升，sin α 的值由 -1 增大到 1。

当 x 在区间 $\cdots\left[-\frac{7\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}\right],\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\left[\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right]\cdots$ 上时，曲线逐渐下降，sin α 的值由 1 减小到 -1。

由正弦函数的周期性知：

正弦函数在每个闭区间 $[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi](k \in Z)$

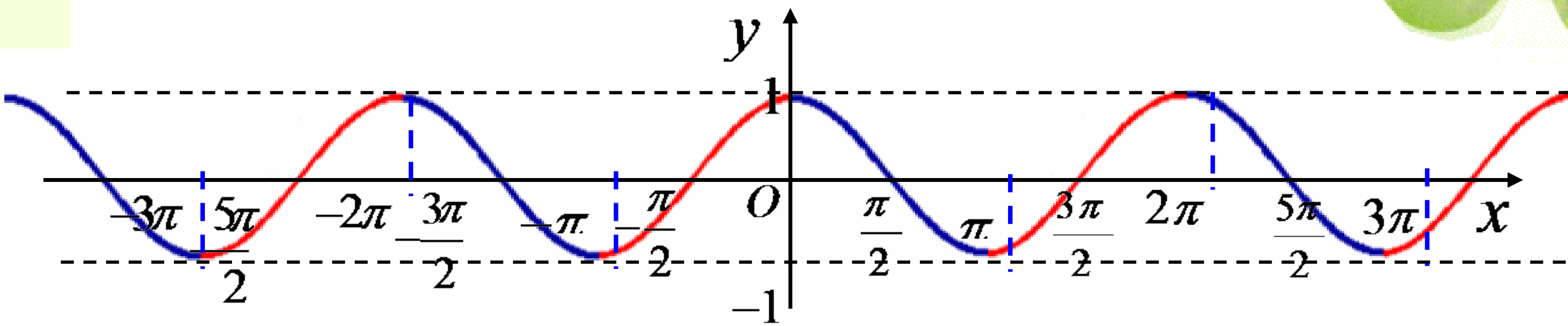
都是**增函数**，其值从－1增大到1；

而在每个闭区间 $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi](k \in Z)$ 上都是

减函数，其值从1减小到－1。

我们在来观察余弦函数的图像，看看是否有类似的特征。

再来观察余弦函数图像



当 x 在区间 $\ldots[-3\pi,-2\pi]、[-\pi,0]、[\pi,2\pi][3\pi,4\pi]\ldots$ 上时，

曲线逐渐上升，$\cos\alpha$ 的值由 -1 增大到 1 。

当 x 在区间 $\ldots[-2\pi,-\pi]、[0,\ \pi]、[2\pi,3\pi]\ldots$ 上时，

曲线逐渐下降， $\sin\alpha$ 的值由 1 减小到 -1 。

由余弦函数的周期性知：

在每个闭区间 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 都是增函数，其值从－1增大到1 ；

而在每个闭区间 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上都是减函数，其值从1减小到－1。

当x∈R时，即在整个定义域内并不单调，图像时而上升，时而下降，存在规范的单调区间. 因为它们是周期函数，所以在考虑函数增减的问题时，只要研究一种周期即可。

四、函数的最大值与最小值

正弦函数当且仅当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$时取得最大值1，正弦函数当且仅当$x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)$时取得最小值-1。

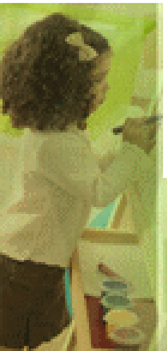
余弦函数当且仅当$x=2k\pi(k\in Z)$时取得最大值1，余弦函数当且仅当$x=\pi+2k\pi(k\in Z)$时取得最小值-1。

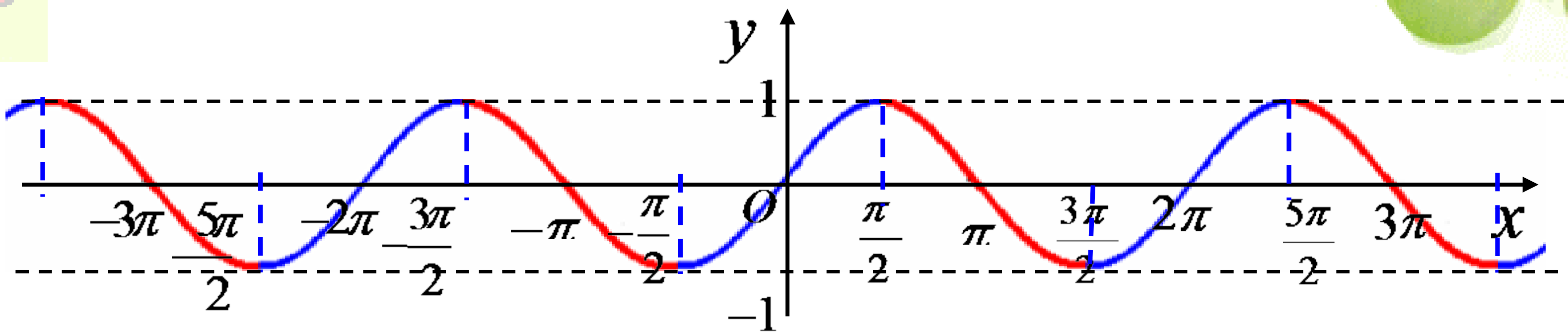
例2：不求值，判断下列各式的符号.

$$1、\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$$

$$2、\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)-\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$$

分析：比较同名函数值的大小，往往能够利用函数的单调性，但需要考虑它是否在同一单调区间上，若是，即可判断，若不是，需化成同一单调区间后再作判断。





解：（1）$\because -\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{10}<-\frac{\pi}{18}<\frac{\pi}{2}$，且 $y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上增函数.

$\therefore \sin(-\frac{\pi}{10})<\sin(-\frac{\pi}{18})$ 即 $\sin(-\frac{\pi}{18})-\sin(-\frac{\pi}{10})>0$.

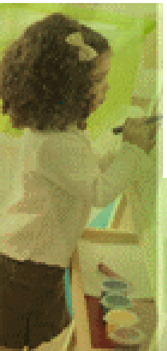
$$(2)\cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)=\cos\frac{23\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{5}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)=\cos\frac{17\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\because 0<\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{5}<\pi,\ \text{且}y=\cos x\text{在}[0,\pi]\text{上是减函数},$$

$$\therefore \cos\frac{3\pi}{5}<\cos\frac{\pi}{4}\text{即}\cos\frac{3\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{4}<0,$$

$$\therefore \cos\left(-\frac{23\pi}{5}\right)-\cos\left(-\frac{17\pi}{4}\right)<0\text{。}$$



例3 求函数

$$y=\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right), x\in[-2\pi, 2\pi]$$的单调增区间

解:令$z=\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}$.函数$y=\sin z$的单调递增区间是

$$\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$$

由$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$得:

$$-\frac{5\pi}{3}+4k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+4k\pi, k\in Z$$