姓名__________准考证号__________

（在此卷上答题无效）

绝密★启用前

南阳市第一中学校2023-2024学年高三下学期4月模拟

数学

本试卷共8页，19小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑：如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

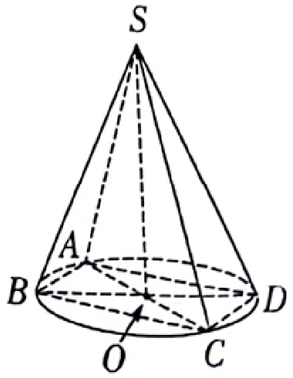
1.已知由小到大排列的5个样本数据$13,19,21,22,x$的极差是11，则x的值为（　　）

A.23　　B.24　　C.25　　D.26

2.若圆$C:(x-a)^2+(y-4a)^2=4$被直线$l:3x-y+2=0$平分，则$a=$（　　）

A.$\frac{1}{2}$　　B.1　　C.$\frac{3}{2}$　　D.2

3.如图，已知AC,BD为圆锥SO底面圆的两条互相垂直的直径，若$SO=\sqrt{3}$，四棱锥$S-ABCD$的体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则圆锥SO的轴截面面积为（　　）



A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{6}$

4.记等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$\frac{2a_2+a_{14}}{a_6^2}=\frac{1}{2}$，则$S_{11}=$（　　）

A.33　　B.44　　C.55　　D.66

5.已知$\alpha+3\beta=\pi$，设$p:3\tan\frac{\alpha}{3}\cdot\tan\beta=1,q:\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{6}$，则$p$是$q$的（　　）

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　D.既不充分也不必要条件

6.已知过抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F且倾斜角为$\frac{\pi}{4}$的直线交C于A,B两点，M是AB的中点，点P是C上一点，若点M的纵坐标为1，直线$l:3x+2y+3=0$，则P到C的准线的距离与P到l的距离之和的最小值为（　　）

A. $\frac{3\sqrt{13}}{26}$　　B. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$　　C. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$　　D. $\frac{9\sqrt{13}}{26}$

7.若函数$f\left(x\right)=\cos\left(\omega x+\varphi\right)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$中心对称，且$x=-\frac{\pi}{3}$是$f\left(x\right)$的极值点，$f\left(x\right)$在区间$\left(0,\frac{2\pi}{5}\right)$内有唯一的极大值点，则$\omega$的最大值为（　　）

A.8　　B.7　　C. $\frac{27}{4}$　　D. $\frac{25}{4}$

8.设$\ln\frac{5a}{4}=0.2,b=0.96,\mathrm{e}^{\frac{5c}{2}}=5$，则（　　）

A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$

C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9.已知复数$z=a-\mathrm{i}\left(a\in\mathbf{R}\right)$，且$\frac{6\mathrm{i}}{z}$的虚部为3，则（　　）

A. $a=1$

B. $\left|\frac{3}{z}\right|=2\sqrt{2}$

C. $\left(z+2\right)\cdot\left(1-3\mathrm{i}\right)$为纯虚数

D. $\frac{2+\mathrm{i}}{z+2}$在复平面内对应的点在第二象限

10.已知椭圆$W:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，点F_1,F_2分别为W的左、右焦点，点C,D分别为W的左、右顶点，过原点且斜率不为0的直线l与W交于A,B两点，直线AF_2与W交于另一点M，则（　　）

A.W的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B.$\left|AF_2\right|$的最小值为$2-\sqrt{3}$

C.W上存在一点P，使$\angle CPD=\dfrac{2\pi}{3}$

D.$\vee ABM$面积的最大值为2

11.已知函数$f\left(x\right)=x^2-2a\ln x-1$，则（　　）

A.若曲线$y=f\left(x\right)$在$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程为$y=2x-2$，则$a=2$

B.若$a=1$，则函数$f\left(x\right)$的单调递增区间为$\left(1,+\infty\right)$

C.若$a>0$，则函数$f\left(x\right)$在区间$\left[1,+\infty\right)$上的最小值为$a^2-2a\ln a-1$

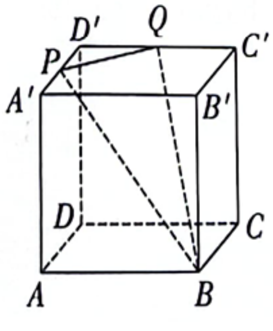
D.若$x\in\left[1,+\infty\right),f\left(x\right)\ldots 0$，则$a$的取值范围为$\left(-\infty,1\right]$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分.

12.已知集合$A=\left\{0,1,2,3,4\right\},B=\left\{x\middle|-x^2+2x+3>0\right\}$，则$A\cap B$中的元素个数为__________.

13.北京时间2023年10月26日，驾乘神舟十七号载人飞船的三名航天员成功入驻中国空间站，与神舟十六号航天员乘组聚首，浩瀚宇宙再现中国人太空“会师”的经典场面.某校计划开展“学习航天精神”的讲座，讲座内容包括航天史讲解、航天精神的形成与发展、现代前沿科学技术知识的普及、“我”的航天梦四个方面，根据安排讲座分为三次（同一次讲座不分先后顺序，每个方面只讲解一次），其中航天史讲解必须安排在第一次讲座，则不同的安排方案共有__________种

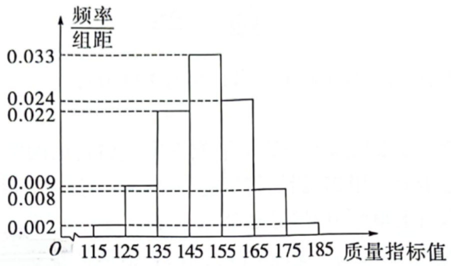
14.如图，在棱长为$2a$的正方体$ABCD-A'B'C'D'$中，P,Q分别为$A'D',C'D'$的中点，过P,Q,B三点的截面将正方体分为两部分，则这两部分几何体的体积比（小于1）为__________.



四、解答题：本题共5小题，共77分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）

为贯彻落实2024年中央一号文件，甲地现推进农产品转型升级，对农产品进行深加工以提高产品附加值.某帮扶单位考察甲地的加工方式后随机抽取某生产线上一段时间内生产的500件产品，对其质量指标值进行打分并整理，得到如下频率分布直方图：



规定：该产品的质量指标值在$[125,175)$内的为合格品，其余为不合格品.

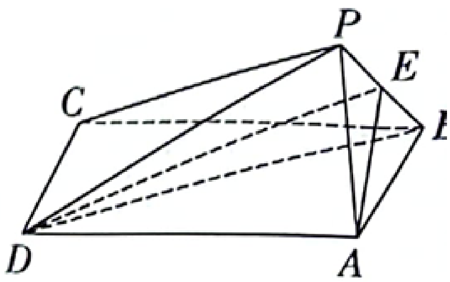
（1）当不合格品所占比例超过3%时，该生产线需要停机调试.用样本估计总体，试判断该生产线是否需要停机调试；

（2）用频率估计概率，从该生产线上随机抽取3件产品，求抽取到的产品中至少有2件合格品的概率.（精确到0.001）

16.（15分）

如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，E为PB的中点，

$AB=AP=4,\sin\angle BPD=\sin\angle DBP$.



（1）证明：$BP\perp$平面ADE；

（2）若$AB\perp BC,\angle PAB=60^\circ$，直线$PC$与平面$ABCD$所成角为$30^\circ$，求二面角$A-BD\text{.}E$的正弦值.

17.（15分）

已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{2}$，点$P\left(4,\sqrt{3}\right)$是$C$上一点.

（1）求C的方程；

（2）设M是直线$x=1$上的动点，A,B分别是C的左、右顶点，且直线MA,MB分别与C的右支交于R,Q两点（均异于点B），证明：直线RQ过定点.

18.（17分）

若正整数数列$\{a_n\}$满足：①$\{a_n\}$为有穷数列：$a_1,a_2,\cdots,a_n$；②$\sum_{i=1}^{n}a_i=m$；③当$1\leq i<j\leq n$时，满足

$a_i > a_j$ 的正整数对 (i, j) 有且仅有 k 个.称该数列 $\{a_n\}$ 为 m 的 k 减数列.

（1）写出 5 的 2 减数列的所有情况；

（2）若存在 100 的 k 减数列，求正整数 k 的最大值.

19.（17 分）

已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}+a\mathrm{e}^{x}-x+1\right)\mathrm{e}^{x}$.

（1）设 $g(x)=f(x)+(x-1)\mathrm{e}^{x}$，讨论函数 $g(x)$ 的单调性；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2\ (x_1 < x_2)$，证明：$x_1+x_2+\mathrm{e}^{x_1+x_2}>1$.

参考答案及评分标准

一、选择题（共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	A	D	B	D	C	A

二、多选题（共 18 分）

题号	9	10	11
答案	AC	ACD	BD

三、填空题（共 15 分）

12.3　　13.12　　14. $\dfrac{25}{47}$

详解详析

1.由题知最小的数据是 13，最大的数据是 x，则极差为

$x-13=11$，

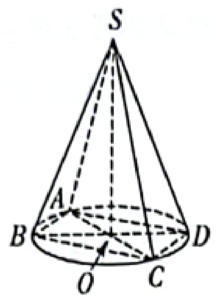
解得 $x=24$.

2.由题意得圆心 $\left(a,4a\right)$ 在直线 $l;3x-y+2=0$ 上，

则 $3a-4a+2=0$，

解得 $a=2$.

3.设圆锥底而圆的半径为 R，易知四边形 $ABCD$ 为正方形，且边长为 $\sqrt{2}R$，



则四棱锥 $S-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times(\sqrt{2}R)^2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

解得 $R=1$（负值舍去），

所以圆锥 SO 的轴截面面积为 $\frac{1}{2}\times 2R\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

4.设等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

由 $\dfrac{2a_2+a_{14}}{a_6^2}=\dfrac{1}{2}$，得 $\dfrac{2\left(a_1+d\right)+a_1+13d}{a_6^2}=\dfrac{1}{2}$，

即$\dfrac{3a_1+15d}{a_6^2}=\dfrac{1}{2}$，

则$\dfrac{3a_6}{a_6^2}=\dfrac{1}{2}$，解得$a_6=6$，

故$S_{11}=\dfrac{11\left(a_1+a_{11}\right)}{2}=11a_6=66$.

5.回归教材

本题与教材必修第一册试题情境相同，均为考查两角和的正切公式，属于三角恒等变换相关问题.

充分性：由$\alpha+3\beta=\pi$得$\dfrac{\alpha}{3}+\beta=\dfrac{\pi}{3}$，

$\tan\left(\dfrac{\alpha}{3}+\beta\right)=\dfrac{\tan\dfrac{\alpha}{3}+\tan\beta}{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$，

得$\tan\dfrac{\alpha}{3}+\tan\beta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

又$3\tan\dfrac{\alpha}{3}\cdot\tan\beta=1$，

联立解得$\tan\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\tan\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

故$\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{\pi}{6}+k_1\pi,k_1\in\mathbf{Z},\beta=\dfrac{\pi}{6}+k_2\pi,k_2\in\mathbf{Z},\alpha+3\beta=\dfrac{\pi}{2}$

$+3k_1\pi+\dfrac{\pi}{2}+3k_2\pi=\pi+3\pi\left(k_1+k_2\right),k_1,k_2\in\boldsymbol{Z}$，

又$\alpha+3\beta=\pi$，即只需要$k_1+k_2=0,k_1,k_2\in\mathrm{Z}$即可，充分性不成立；

必要性：当$\alpha=\dfrac{\pi}{2},\beta=\dfrac{\pi}{6}$时，代入易得$3\tan\dfrac{\alpha}{3}\cdot\tan\beta=1$，必要性成立.

故p是q的必要不充分条件.

6.由题得C的焦点为$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，

故设倾斜角为$\dfrac{\pi}{4}$的直线AB的方程为$y=x-\dfrac{p}{2}$，

与C的方程联立得$y^2-2py-p^2=0$，

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则$y_1+y_2=2p=2,p=1$，

故C的方程为$y^2=2x,F\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

由抛物线定义可知点 P 到准线的距离等于点 P 到焦点 F 的距离，

联立抛物线 $C: y^2 = 2x$ 与直线 $l: 3x+2y+3=0$，化简得 $9x^2+10x+9=0$，

由 $\Delta = 100-4\times 9\times 9 = -224 < 0$ 得 C 与 l 相离.

所以点 P 到 C 的准线的距离与点 P 到直线 l 的距离之和的最小值为点 $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 到直线 $l: 3x+2y+3=0$ 的

距离，即 $\frac{\left|3\times\frac{1}{2}+0+3\right|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{9\sqrt{13}}{26}$.

7.由题意得 $\begin{cases} \frac{\pi}{3}\omega+\varphi = k_1\pi+\frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{3}\omega+\varphi = k_2\pi, \end{cases}$

则 $\begin{cases} \omega = \frac{3(2k+1)}{4}, \\ \varphi = \frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, \end{cases} k, k' \in \mathbf{Z}$，

其中 $k = k_1-k_2, k' = k_1+k_2 = 2k_1-k$.

因为 $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$，当 $k'=-1$ 时，$\varphi = -\frac{\pi}{4}, k = 2k_1+1, k_1\in\mathbf{Z}$，

当 $k'=0$ 时，$\varphi = \frac{\pi}{4}, k = 2k_1, k_1\in\mathbf{Z}$.

因为 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{2\pi}{5}\right)$ 内有唯一的极大值点，

故 $\frac{2\pi}{5}-0 = \frac{2\pi}{5} \leq 2T = \frac{4\pi}{\omega}$，解得 $0<\omega\leq 10$，

即 $0<\frac{3(2k+1)}{4}\leq 10$，所以 $-\frac{1}{2}<k\leq\frac{37}{6}$.

当 $k=6$ 时，$\omega = \frac{39}{4}, \varphi = \frac{\pi}{4}$，

此时 $\frac{39}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4}, \frac{83\pi}{20}\right)$，

此时有两个极大值点，舍去；

当 $k=5$ 时，$\omega = \frac{33}{4}, \varphi = -\frac{\pi}{4}$，

此时 $\frac{33}{4}x-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{61\pi}{20}\right)$，

此时有两个极大值点，舍去；

当$k=4$时，$\omega=\frac{27}{4},\varphi=\frac{\pi}{4}$，

此时$\frac{27}{4}x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{59\pi}{20}\right)$，

此时有一个极大值点，所以ω的最大值为$\frac{27}{4}$.

8.由$\ln\frac{5a}{4}=0.2$得$a=0.8\mathrm{e}^{0.2}=\left(1-0.2\right)\mathrm{e}^{0.2}$.

由$\mathrm{e}^{\frac{5c}{2}}=5$得$c=-2\times0.2\ln0.2$，

又$b=0.96=1-0.2^2$.

取$x=0.2$，则$a=\left(1-x\right)\mathrm{e}^x,b=1-x^2,c=-2x\ln x$.

设$f\left(x\right)=x-\frac{1}{x}-2\ln x(0<x<1)$，

[难点]观察式子b,c的特征且为了构造的新函数方便求导，故联想到利用$\frac{c-b}{x}$构造函数判断b,c大小关系.

则$f'\left(x\right)=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0$，

所以$f\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$内单调递增，

又$f\left(1\right)=0$，则$x-\frac{1}{x}-2\ln x<0$，

即$-2x\ln x<1-x^2$，所以$c<b$.

令$g\left(x\right)=\mathrm{e}^x-x-1(0<x<1)$，

则$g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-1>0$，

所以$g\left(x\right)$在区间$\left(0,1\right)$内单调递增，

则$g\left(x\right)>g\left(0\right)=0$，

故$\mathrm{e}^x>x+1$，则$\left(1-x\right)\mathrm{e}^x>1-x^2$，即$b<a$，

所以$c<b<a$.

9.回归教材

本题与教材必修第二册试题情境相同，均为已知复数虚部求其他的相关问题，考查学生对复数相关概念及复数几何意义的理解.