
行列式的计算及应用毕业论文

目录

1. 行列式的定义及性质.....	1
1.1 行列式的定义.....	1
1.1.1 排列.....	1
1.1.2 定义.....	1
1.2 行列式的相关性质.....	1
2. 行列式的计算方法.....	5
2.1 几种特殊行列式的结果.....	5
2.1.1 三角行列式.....	5
2.1.2 对角行列式.....	5
2.2 定义法.....	5
2.3 利用行列式的性质计算.....	5
2.4 降阶法.....	6
2.5 归纳法.....	7
2.6 递推法.....	8
2.7 拆项法.....	9
2.8 用德蒙德行列式计算.....	10
2.9 化三角形法.....	10
2.10 加边法.....	11
2.11 拉普拉斯定理的运用.....	12
2.12 行列式计算的 Matlab 实验.....	13
3. 行列式的应用.....	15
3.1 行列式应用在解析几何中.....	15
3.2 用行列式表示的三角形面积.....	15
3.3 应用行列式分解因式.....	16
3.4 利用行列式解代数不等式.....	17
3.5 利用行列式来证明拉格朗日中值定理.....	17
3.6 行列式在实际中的应用.....	18
总结.....	20
参考文献.....	21
附录 1.....	22
附录 2.....	22

附录 3	23
谢辞	24

1. 行列式的定义及性质

1.1 行列式的定义

1.1.1 排列^[1]

在任意一个排列中，若前面的数大于后面的数，则它们就叫做一个逆序，在任意一个排列中，逆序的总数就叫做这个排列的逆序数。

1.1.2 定义^[1]

n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

就相当于全部不同行、列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-1-1)$$

的代数和，这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，每一项 (1-1-1) 都按下列规则带有符号：当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，(1-1-1) 是正值，当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时，(1-1-1) 是负值。这一定义可以表述为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \quad (1-1-2)$$

这里 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和。

由于行列指标的地位是对称的，所以为了决定每一项的符号，我们也可以把每一项按照列指标排起来，所以定义又可以表述为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \quad (1-1-3)$$

1.2 行列式的相关性质

$$\text{记 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D' 叫做行列式 D 的转置行列式.

性质 1 行列式和它的转置行列式是相等的^[2]. 即 $D' = D$.

证明: 记 D 中的一项 n 个元素的乘积是

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

它处于 D 的不同行和不同列, 所以它也处于 D' 的不同行和不同列, 在 D' 中应是

$$a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n},$$

所以它也是 D' 中的一项. 反之, D' 的每一项也是 D 的一项, 即 D 和 D' 有相同的项. 再由上面 (1-2) 和 (1-3) 可知这两项的符号也相同, 所以 $D' = D$.

性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = ka_{i1} A_{i1} + ka_{i2} A_{i2} + \cdots + ka_{in} A_{in}$$

$$= k(a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in})$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 3 如果行列式的某行(列)的元素都为两个数之和^[2], 如

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

那么行列式 D 就等于下列两个行列式的和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

可以参照性质 2 的证明得出结论.

性质 4 对换行列式中任意两行的位置, 行列式值相反. 即若设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D_1 = -D$.

证明: 记 D 中的一项中的 n 个元素的乘积是

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}.$$

它在 D 中处于不同行、不同列, 因而在 D_1 中也处于不同行、不同的列, 所以它也是 D_1 的一项. 反之, D_1 中的每一项也是 D 中的一项, 所以 D 和 D_1 有相同的项, 且对应的项绝对值相同.

现在看该项的符号: 它在 D 中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)}.$$

由于 D_1 是由交换 D 的 i 、 k 两行而得到的, 所以行标的 n 级排列 $12 \cdots i \cdots k \cdots n$ 变为 n 级排列 $12 \cdots i \cdots k \cdots n$, 而列标的 n 级排列并没有发生变化. 因此 D 和 D_1 中每一对相应的项绝对值相等, 符号相反, 即 $D_1 = -D$.

性质 5 如果行列式中任有两行元素完全相同, 那么行列式为零.

证明: 设该行列式为 D , 交换 D 相同的那两行, 由性质 4 可得 $D = -D$, 故 $D = 0$.

性质 6 如若行列式中任有两行或者两列元素相互对应成比例, 则行列式为零.

证明: 设 n 阶行列式中第 i 行的各个元素为第 j 行的对应元素的 k 倍, 由性质 2, 可以把 k 提到行列式外, 然后相乘. 则剩下的行列式的第 i 行与第 j 行两行相同, 再由性质 5, 最后得到行列式为零.

性质 7 把任意一行的倍数加到另一行，行列式的值不改变.

$$\begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{i1} + ca_{k1} & a_{i2} + ca_{k2} & \square & a_{in} + ca_{kn} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{k1} & a_{k2} & \square & a_{kn} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{i1} & a_{i2} & \square & a_{in} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{k1} & a_{k2} & \square & a_{kn} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn}
 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\
 \square & \square & & \square \\
 ca_{k1} & ca_{k2} & \square & ca_{kn} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{k1} & a_{k2} & \square & a_{kn} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn}
 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{i1} & a_{i2} & \square & a_{in} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{k1} & a_{k2} & \square & a_{kn} \\
 \square & \square & & \square \\
 a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn}
 \end{vmatrix} .$$

2. 行列式的计算方法

2.1 几种特殊行列式的结果

2.1.1 三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \square & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \square & a_{2n} \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\square a_{nn} \quad (\text{上三角行列式}).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \square & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ a_{n1} & a_{n2} & \square & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\square a_{nn} \quad (\text{下三角行列式}).$$

2.1.2 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \square & 0 \\ 0 & a_{22} & \square & 0 \\ \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\square a_{nn}.$$

2.2 定义法

例 1 用定义法证明
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

证明：行列式的一般项可表成 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$ ，列标 j_3, j_4, j_5 只能在 1,2,3,4,5 中取不同的值，故 j_3, j_4, j_5 三个下标中至少有一个要取 3,4,5 中的一个数，则任意一项里至少有一个 0 为因子，故任一项必为零，即原行列式的值为零。

2.3 利用行列式的性质计算

例 2 一个 n 阶行列式 $D_n = |a_{ij}|$ 的元素都满足 $a_{ij} = -a_{ji}, i, j = 1, 2, \square, n$ ，那么 D_n 叫做反对称行列式，证明：奇数阶的反对称行列式的值等于 0。

证明：由 $a_{ij} = -a_{ji}$ 知 $a_{ii} = -a_{ii}$ ，即 $a_{ii} = 0, i = 1, 2, \square, n$

所以行列式 D_n 可写为 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \square & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \square & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \square & a_{3n} \\ \square & \square & \square & & \square \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \square & 0 \end{vmatrix}$ ，再由行列式的性

质 2， $|A| = |A'|$ 得到

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \square & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \square & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \square & a_{3n} \\ \square & \square & \square & & \square \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \square & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \square & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \square & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \square & -a_{3n} \\ \square & \square & \square & & \square \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \square & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \square & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \square & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \square & a_{3n} \\ \square & \square & \square & & \square \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \square & 0 \end{vmatrix} = (-1)^n D_n,$$

当 n 为奇数时，得 $D_n = -D_n$ ，因而得到 $D_n = 0$ 。

2.4 降阶法

例 3 计算 $n(n \geq 2)$ 级行列式 $d = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \square & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square & x & y \\ y & 0 & 0 & \square & 0 & x \end{vmatrix}$ 。

解：按第一列展开得到

$$\text{原式} = x \begin{vmatrix} x & y & 0 & \square & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & \square & & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square & x & y \\ 0 & 0 & 0 & \square & 0 & x \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}} + y \times (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} y & 0 & \square & 0 & 0 \\ x & y & \square & 0 & 0 \\ \square & \square & & \square & \square \\ 0 & 0 & \square & y & 0 \\ 0 & 0 & \square & x & y \end{vmatrix}_{(n-1)\text{阶}}$$

$$= x \times x^{n-1} + (-1)^{(n+1)} \times y \times y^{n-1}$$

$$= x^n + (-1)^{(n+1)} y^n (n \geq 2).$$

2.5 归纳法

形如行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \square & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \square & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \square & a_n^2 \\ \square & \square & \square & & \square \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \square & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

叫做 n 阶德蒙 (Vandermonde) 行列式.

下面证明, 对每一个 $n(n \geq 2)$, n 阶德蒙行列式就等于

a_1, a_2, \square, a_n 这 n 个数的所有可能的差 $a_i - a_j (1 \leq j < i \leq n)$ 的乘积.

用数学归纳法证明德蒙德行列式

我们对 n 作归纳法.

(1) 当 $n=2$ 时, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$, 结果是对的.

(2) 设对于 $n-1$ 级的德蒙行列式, 结论是成立的, 先来看 n 级的情况. 在

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \square & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \square & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \square & a_n^2 \\ \square & \square & \square & & \square \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \square & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

中, 第 n 行减第 $n-1$ 行的 a_1 倍, 第 $n-1$ 行减第 $n-2$ 行的 a_1 倍, 即由下而上逐次地从每一行减它上一行的 a_1 倍, 得到

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \square & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \square & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \square & a_n^2 - a_1 a_n \\ \square & \square & \square & & \square \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \square & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \square & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \square & a_n^2 - a_1 a_n \\ \square & \square & & \square \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \square & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

最后面这个行列式是 $n-1$ 级德蒙德行列式，再由归纳法假设，它的值就是 $a_i - a_j (1 \leq j < i \leq n)$ ；而所有带有 a_1 的差即为上式最后等式行列式的前面。所以，结论对 n 级德蒙德行列式也是成立的。由数学归纳法，证明了结论。

用连乘号，这个结果可以简写为

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j). \quad (2-5-1)$$

2.6 递推法

给定一个递推关系式，再给定某一个较低阶初始行列式的值，就可递推求得所给 n 阶行列式的值，运用这种方法计算的方法就叫做递推法。

一个典型的例子是德蒙德行列式。 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

分析：如果第一行全是 1 把第一行变出一排 0 其他位置将会变得不好掌握，所以通过把第一列变出一排 0 来降阶；并且，为了使降阶后的行列式仍然具有原来的形式，不能用第一行的若干倍加到其他各行的办法，而用逐行变零的方法。

解：同上题，第 n 行减第 $n-1$ 行的 a_1 倍，第 $n-1$ 行减第 $n-2$ 行的 a_1 倍，即由下而上逐次地从每一行减它上一行的 a_1 倍，有

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) D_{n-1}.
\end{aligned}$$

其中行列式 D_{n-1} 仍然是同样形式的但阶数少 1 的德蒙德行列式, 所以可以按同样的办法反复降阶. 从上面的计算知道, 这样的办法做一次, 出现的因式是第一列后面的每列的字母 a_j 减去第一列的字母的差之积. 因此得

$$\begin{aligned}
D_n &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) D_{n-1} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \times (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_n - a_2) D_{n-2} \\
&= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \times (a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \cdots (a_n - a_2) \times \cdots \times (a_n - a_{n-1})
\end{aligned}$$

所以阶德蒙德行列式为 $D_n = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$.

2.7 拆项法

把给定的行列式的某一行或者某一列的元素表述为两数之和的形式, 再根据行列式的性质把原行列式表示为两行列式的和的方法叫做拆项法. 把一个繁琐的行列式化简为两个简单的行列式, 把问题简单化以便于计算.

例 4 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1 + \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix}$.

解: $D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_2 + \lambda_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & \cdots & a_n + \lambda_n \end{vmatrix}$

化简 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} + \lambda_1 D_{n-1}$

$$= a_1 \lambda_2 \square \lambda_n + \lambda_1 D_{n-1}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/328057047137006065>