福建省福州屏东中学2023-2024学年高一下学期期中考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．在$\triangle ABC$中,已知$a=\sqrt{3}$,$b=\sqrt{2}$,$B=45^{\circ}$,则A角的度数为（　）

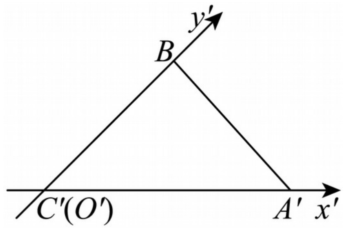
A．60°　　B．120°　　C．60°或120°　　D．30°

2．已知等腰梯形$ABCD$，现绕着它的较长底CD所在的直线旋转一周，所得的几何体包括（　）

A．一个圆台、两个圆锥　　B．一个圆柱、两个圆锥

C．两个圆台、一个圆柱　　D．两个圆柱、一个圆台

3．水平放置的$\triangle ABC$的斜二测直观图$\triangle A'B'C'$如图所示，已知$A'C'=3$，$B'C'=2$，则$\triangle ABC$的面积为（　）



A．6　　B．3　　C．$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$3\sqrt{2}$

4．在空间中，α，β表示平面，m表示直线，已知$\alpha\cap\beta=l$，则下列命题正确的是（　）

A．若$m//l$，则m与α，β都平行　　B．若m与α，β都平行，则$m//l$

C．若m与l异面，则m与α，β都相交　　D．若m与α，β都相交，则m与l异面

5．在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为内角A，B，C的对边，若$a^2-b^2=\sqrt{3}bc$，

$\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则A等于（　）

A．$\frac{5\pi}{6}$　　B．$\frac{2\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{3}$　　D．$\frac{\pi}{6}$

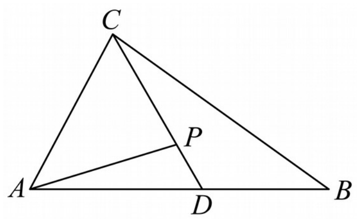
6．一个正方体的外接球的表面积为S_1，从正方体的八个顶点中任取四个两两距离相等的

点，以其中一点为球心O，另三点都在球O的表面，球O的表面积为S_2，则$\frac{S_1}{S_2}=$（　）

A．$\frac{8}{3}$　　B．$\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{\sqrt{6}}{4}$

7．如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$P$为$CD$上一点，且满足

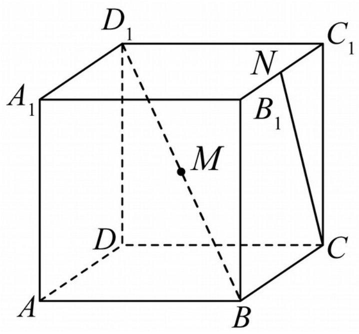
$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，若$|\overrightarrow{AC}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=4$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}$的值为（　）



A．-3　　B．$\frac{1}{12}$　　C．$-\frac{13}{12}$　　D．$\frac{13}{12}$

8．在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N分别为BD_1，B_1C_1的中点，点P在正方

体的表面上运动，且满足$MP//$平面CND_1，则下列说法正确的是（　）

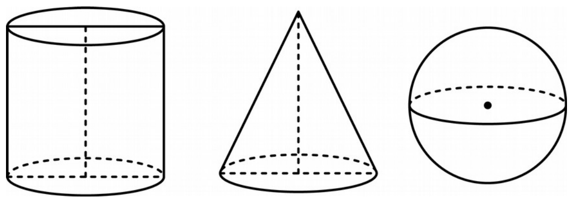


A．点 P 可以是棱 BB_1 的中点　　B．线段 MP 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C．点 P 的轨迹是正方形　　D．点 P 轨迹的长度为 $2+\sqrt{5}$

二、多选题

9．如图，一个圆柱和一个圆锥的底面直径和它们的高都与一个球的直径 $2R$ 相等，下列结论正确的是（　）



A．圆柱的侧面积为 $2\pi R^2$

B．圆锥的侧面积为 $2\pi R^2$

C．圆柱的侧面积与球面面积相等

D．圆柱、圆锥、球的体积之比为 $3:1:2$

10．已知 $\vec{a}=(t,1),\vec{b}=(2,t)$，则下列说法正确的是（　）

A．$|\vec{a}|$ 的最小值为 1

B．若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $t=0$

C．若 $t=1$，与 $\vec{a}$ 垂直的单位向量只能为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

D．若向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{b}$ 的夹角为钝角，则 t 的取值范围为 $(-\infty,0)$

11．在正方形 $ABCD$ 中，$BC=1$，点 E 满足 $\overrightarrow{DE}=t\overrightarrow{DC}(0<t<1)$，则下列说法正确的是（　）

A．当 $t=\frac{1}{3}$ 时，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

B．当 $t=\frac{2}{3}$ 时，$\cos\langle\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\rangle=\frac{\sqrt{35}}{10}$

C．存在 t，使得 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{BE}$

D．$\left|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}\right|$ 的最小值为 2

12．在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=4,CA=CB=8$，若 H、W、G、I 分别为 $\triangle ABC$ 的垂心、外心、重心和内心，则下列四种说法正确的有（　）

A．$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

B．$\overrightarrow{AW}\cdot\overrightarrow{BC}=24$

C．$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=16$

D．$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=12$

三、填空题

13．计算 $\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AB}=$______.

14．已知向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 方向上的投影向量为 $-2\vec{b}$，且 $|\vec{b}|=3$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$__.（结果用数值表示）

15．在 $\triangle ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{3}$, AB 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{3}AB$，则 $\cos C=$______.

16．平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2\vec{a}\cdot\vec{b}=1$，且$|\vec{c}-2\vec{a}|+|\vec{c}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则$|\vec{c}-\vec{a}|+|\vec{c}+\vec{a}|$的最小值为_____.

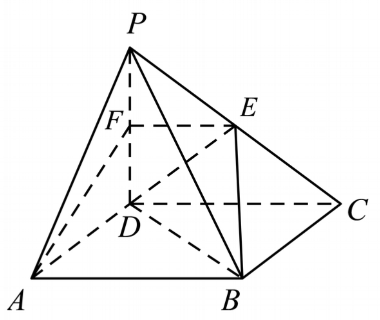
四、解答题

17．已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}|=2$，$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})=-12$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\sqrt{3}$．

(1)求向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角θ；

(2)求$|\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}|$．

18．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为平行四边形，E为棱PC的中点，平面ABE与棱PD交于点F.



(1)求证：$PA//$平面BDE；

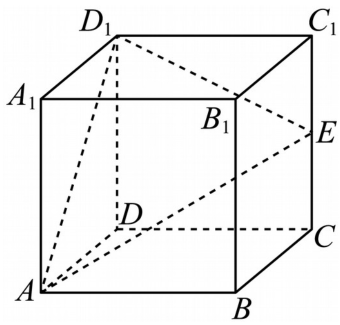
(2)求证：F为PD的中点；

19．已知$\triangle ABC$的内角A，B，C所对边分别为a，b，c，满足$c\tan A=2a\sin C$．

(1)求角A；

(2)若$b=2c$，点D为边BC的中点，且$AD=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积.

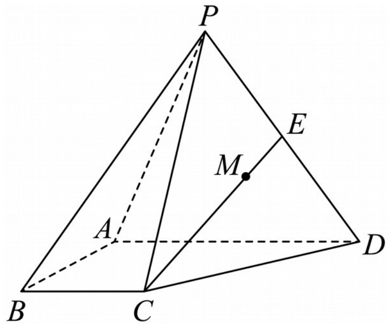
20．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为CC_1的中点.



（1）在图中作出平面 AD_1E 和底面 $ABCD$ 的交线，并说明理由；

（2）平面 AD_1E 将正方体分成两部分，求这两部分的体积之比.

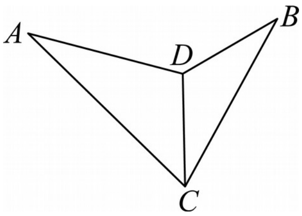
21．如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 是梯形，$BC//AD$，$BC=\frac{1}{2}AD$，E 是 PD 的中点.



(1)求证：$CE//$ 平面 PAB；

(2)若 M 是线段 CE 上一动点，则线段 AD 上是否存在点 N，使 $MN//$ 平面 PAB？说明理由.

22．某景区有一人工湖，湖面有 A,B 两点，湖边架有直线型栈道 CD，长为 50m，如图所示．现要测是 A,B 两点之间的距离，工作人员分别在 C,D 两点进行测量，在 C 点测得 $\angle ACD=45°$，$\angle BCD=30°$；在 D 点测得 $\angle ADB=135°,\angle BDC=120°$．（$A,B,C,D$ 在同一平面内）



(1)求 A,B 两点之间的距离；

(2)判断直线 CD 与直线 AB 是否垂直，并说明理由.

参考答案：

1．C

【分析】根据正弦定理求得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,进而求得角$A$即可.

【详解】由题知$a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{2}$，$B=45^{\circ}$，

在$\triangle ABC$中,由正弦定理可得:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^{\circ}}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2=\frac{\sqrt{3}}{\sin A},$$

解得$\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,因为$a=\sqrt{3}>b=\sqrt{2}$,$45^{\circ}<A<180^{\circ}$,

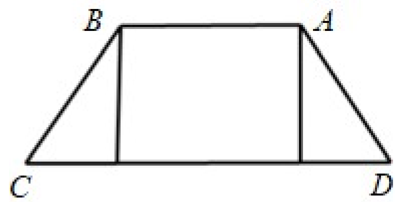
所以$A=60^{\circ}$或120°.

故选:C

2．B

【分析】画出简图，将等腰梯形分割成两个直角三角形和一个矩形，进而进行旋转，然后根据多面体的定义得到答案.

【详解】将等腰梯形分割成两个直角三角形和一个矩形，如图所示：



矩形绕其一边旋转一周得到圆柱，直角三角形绕其一条直角边旋转一周得到圆锥；
因此，将该等腰梯形绕它的较长的底边所在的直线旋转一周，可得几何体为：一个圆柱、两个圆锥.

故选：B.

3．A

【分析】将直观图还原成平面图，根据斜二测画法原理求出平面图形的边长，即可计算面

积.

【详解】直观图还原成平面图，则$\angle ACB = 90°, BC = 2B'C' = 4, AC = A'C' = 3$，

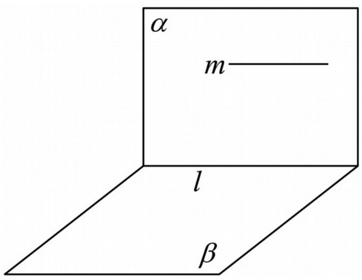
所以$\triangle ABC$的面积为$\frac{1}{2} \times AC \times AB = 6$，

故选：A.

4．B

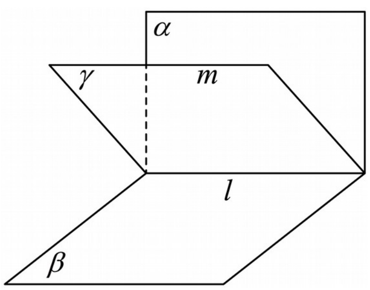
【分析】对于A项，可能直线$m \subset \alpha$；对于B项用线面平行的性质定理可得；对于C项m不在α，β内，m与α，β其中一个不相交；对于D项，直线m与l相交.

【详解】对于A项，如图直线$m \subset \alpha$，所以A错误；

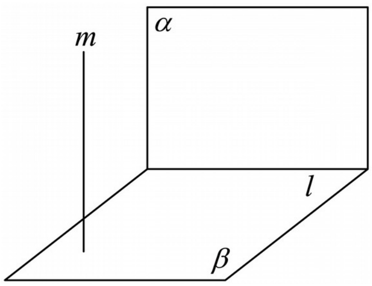


对于B项，如图，过直线m做平面$\gamma \cap \alpha = l$，且$\gamma \cap \beta = l$

$\because m // \alpha, m \subset \gamma, \alpha \cap \gamma = l \quad \therefore m // l$，故B正确；

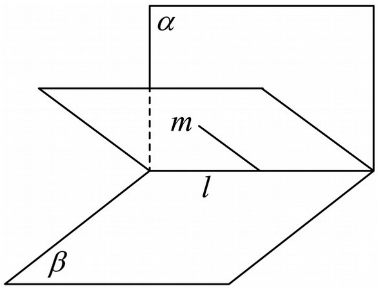


对于C项，画图为：



反例：m 不在 α，β 内，m 与 α，β 其中一个不相交，故C不正确.

对于D项，如图，$m\cap l$，则满足 m 与 α，β 都相交，但是 m 与 l 共面，故D错误.



故选：B

5．D

【分析】根据正弦定理把 $\sin C=2\sqrt{3}\sin B$ 化为 $c=2\sqrt{3}b$，再结合余弦定理求角即可

【详解】$\because \sin C=2\sqrt{3}\sin B$，$\therefore c=2\sqrt{3}b$，结合 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc$ 即可求得 $a=\sqrt{7}b$.

由余弦定理可得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{b^2+12b^2-7b^2}{2\times b\times 2\sqrt{3}b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

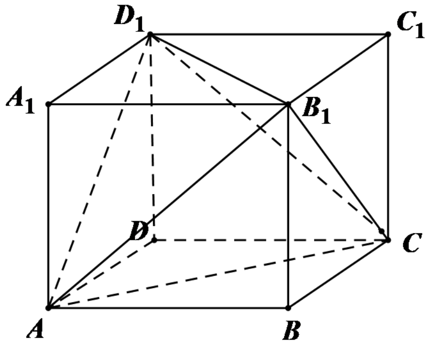
又 $\because A\in(0,\pi)$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{6}$.

故选：D

6．C

【分析】设正方体的棱长为1，易知正方体的外接球的直径为正方体的体对角线的长,从正方体的八个顶点中任取四个两两距离相等的点为正四面体，分别求得表面积即可.

【详解】如图所示：



设正方体的棱长为1，则正方体的外接球的直径为正方体的体对角线的长，

所以外接球的半径为$R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以外接球的表面积为$S_1=4\pi R^2=3\pi$，

从正方体的八个顶点中任取四个两两距离相等的点为正四面体B_1-ACD_1，

以其中一点为球心O，另三点都在球O的表面，则球OS的半径为$R=\sqrt{2}$，

所以球O的表面积为$S_2=4\pi R^2=8\pi$，

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{3}{8}$，

故选：C

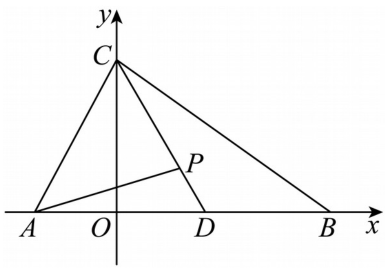
7．D

【分析】建立平面直角坐标系，因为点P在CD上，则

$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，利用平面向量的基本定

理求出m的值，然后利用平面向量数量积的坐标运算可求得$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}$的值.

【详解】建立如图所示平面直角坐标系.



已知$|\overrightarrow{AC}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，得$|\overrightarrow{OA}|=\frac{3}{2}$，$|\overrightarrow{OC}|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore A(-\frac{3}{2},0)$，$C\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(\frac{5}{2},0)$，

$\because \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{8}{3},0\right)$，

$\therefore \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\left(\frac{7}{6},0\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{7}{6},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，

因为点P在CD上，则$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AC}+(1-\lambda)\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，

又$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，且$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$不共线，

可得$m=\lambda$，且$\frac{2(1-\lambda)}{3}=\frac{1}{2}$，解得$m=\frac{1}{4}$.

$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{1}{2}(4,0)=\left(\frac{19}{8},\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{7}{6}\times\frac{19}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{13}{12}$.

故选：D.

8．B

【分析】如图，取棱BC的中点E，连接DE,B_1E,ME，进而证明平面$B_1EM//$平面CND_1，

再结合题意可知直线B_1M必过D点，进而取A_1D_1中点F，连接B_1F,FD,DE，证明$F\in$平面B_1EM即可得四边形B_1EDF为点P的轨迹，再根据几何关系依次判断各选项即可.

【详解】解：如图，取棱BC的中点E，连接DE,B_1E,ME，

因为M,N分别为BD_1，B_1C_1的中点，

所以，在$\triangle BCD_1$中，$ME//CD_1$，由于$ME\not\subset$平面CND_1，$CD_1\subset$平面CND_1，

所以$ME//$平面CND_1，

因为$B_1N//CE,B_1N=CE$，所以，四边形CNB_1E为平行四边形，

所以$CN//B_1E$，因为$CN\subset$平面CND_1，$B_1E\not\subset$平面CND_1，

所以，$B_1E//$平面CND_1，

因为$B_1E\cap ME=E$，$B_1E,ME\subset$平面B_1EM，

所以，平面$B_1EM//$平面CND_1，

由于M为体对角线BD_1的中点，

所以，连接B_1M并延长，直线B_1M必过D点，

故取A_1D_1中点F，连接B_1F,FD,DE，

所以，由正方体的性质易知$FD_1//CE,FD_1=CE$，

所以，四边形CD_1FE是平行四边形，$EF//CD_1$，$EF=CD_1$，

因为，$ME//CD_1$，$ME=\frac{1}{2}CD_1$，