2024年新高考九省联考新题型——综合能力题

题目 1 (2024·全国·校联考模拟预测) 若项数为 $k(k\in\mathbf{N}^*, k\geqslant 3)$ 的有穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$，且对任意的 $\mathrm{i}, j(1\leqslant \mathrm{i}\leqslant j\leqslant k)$，$a_j+a_i$ 或 a_j-a_i 是数列 $\{a_n\}$ 中的项，则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P.

(1) 判断数列 0,1,2 是否具有性质 P，并说明理由；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，$a_i(\mathrm{i}=1, 2, \cdots, k)$ 是 $\{a_n\}$ 中的任意一项，证明：a_k-a_i 一定是 $\{a_n\}$ 中的项；

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 P，证明：当 $k\geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

题目 2 (2024·全国·校联考一模) 关于 x 的函数 $f(x)=\ln x+2x-b(b>2)$，我们曾在必修一中学习过"二分法"求其零点近似值. 现结合导函数，介绍另一种求零点近似值的方法——"牛顿切线法".

(1) 证明：$f(x)$ 有唯一零点 a，且 $a\in(1,b)$；

(2) 现在，我们任取 $x_1\in(1,a)$ 开始，实施如下步骤：

在 $(x_1,f(x_1))$ 处作曲线 $f(x)$ 的切线，交 x 轴于点 $(x_2,0)$；

在 $(x_2,f(x_2))$ 处作曲线 $f(x)$ 的切线，交 x 轴于点 $(x_3,0)$；

……

在 $(x_n,f(x_n))$ 处作曲线 $f(x)$ 的切线，交 x 轴于点 $(x_{n+1},0)$；

可以得到一个数列 $\{x_n\}$，它的各项都是 $f(x)$ 不同程度的零点近似值.

(i) 设 $x_{n+1}=g(x_n)$，求 $g(x_n)$ 的解析式 (用 x_n 表示 x_{n+1})；

(ii) 证明：当 $x_1\in(1,a)$，总有 $x_n<x_{n+1}<a$.

题目 3 (2024·全国·校联考模拟预测)“让式子丢掉次数”：伯努利不等式

伯努利不等式(*Bernoulli'sInequality*)，又称贝努利不等式，是高等数学的分析不等式中最常见的一种不等式，由瑞士数学家雅各布·伯努利提出：对实数 $x\in(-1,+\infty)$，在 $n\in[1,+\infty)$ 时，有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 成立；在 $n\in(0,1)$ 时，有不等式 $(1+x)^n\leqslant 1+nx$ 成立.

(1) 猜想伯努利不等式等号成立的条件；

(2) 当 $n\geqslant 1$ 时，对伯努利不等式进行证明；

(3) 考虑对多个变量的不等式问题. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\in N^*)$ 是大于 -1 的实数(全部同号)，证明 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$

题目 4 (2024·江苏南通·模拟预测) 已知 $A_m=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m}\end{pmatrix}(m\geqslant 2)$ 是 m^2 个正整数组成的 m 行 m 列的数表，当 $1\leqslant \mathrm{i}<s\leqslant m,1\leqslant j<t\leqslant m$ 时，记 $d(a_{i,j},a_{s,t})=|a_{i,j}-a_{s,j}|+|a_{s,j}-a_{s,t}|$. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，若 A_m 满足如下两个性质：

① $a_{i,j}\in\{1,2,3;\cdots,n\}(\mathrm{i}=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$；

②对任意 $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，存在 $\mathrm{i}\in\{1,2,\cdots,m\},j\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $a_{i,j}=k$，则称 A_m 为 Γ_n 数表.

(1) 判断 $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 是否为 Γ_3 数表，并求 $d(a_{1,1},a_{2,2})+d(a_{2,2},a_{3,3})$ 的值；

(2) 若 Γ_2 数表 A_4 满足 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=1(\mathrm{i}=1,2,3;j=1,2,3)$，求 A_4 中各数之和的最小值；

(3) 证明：对任意 Γ_4 数表 A_{10}，存在 $1\leqslant \mathrm{i}<s\leqslant 10,1\leqslant j<t\leqslant 10$，使得 $d(a_{i,j},a_{s,t})=0$.

题目 5 (2024·全国·校联考模拟预测) 设正整数数列 $A:a_1, a_2, \cdots, a_N(N>3)$ 满足 $a_i<a_j$，其中 $1\leqslant i<j\leqslant N$. 如果存在 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$，使得数列 A 中任意 k 项的算术平均值均为整数，则称 A 为“k 阶平衡数列”

(1) 判断数列 2，4，6，8，10 和数列 1，5，9，13，17 是否为“4 阶平衡数列”？

(2) 若 N 为偶数，证明：数列 $A:1, 2, 3, \cdots, N$ 不是“k 阶平衡数列”，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$

(3) 如果 $a_N\leqslant 2019$，且对于任意 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$，数列 A 均为“k 阶平衡数列”，求数列 A 中所有元素之和的最大值.

题目 6 (2024·江苏·徐州市第一中学校联考模拟预测) 交比是射影几何中最基本的不变量，在欧氏几何中亦有应用. 设 A, B, C, D 是直线 l 上互异且非无穷远的四点，则称 $\frac{AC}{BC}\cdot\frac{BD}{AD}$(分式中各项均为有向线段长度，例如 $AB=-BA$) 为 A, B, C, D 四点的交比，记为 $(A,B;C,D)$.

(1) 证明：$1-(D,B;C,A)=\frac{1}{(B,A;C,D)}$；

(2) 若 l_1, l_2, l_3, l_4 为平面上过定点 P 且互异的四条直线，L_1, L_2 为不过点 P 且互异的两条直线，L_1 与 l_1, l_2, l_3, l_4 的交点分别为 A_1, B_1, C_1, D_1，L_2 与 l_1, l_2, l_3, l_4 的交点分别为 A_2, B_2, C_2, D_2，证明：$(A_1,B_1;C_1,D_1)=(A_2,B_2;C_2,D_2)$；

(3) 已知第 (2) 问的逆命题成立，证明：若 $\triangle EFG$ 与 $\triangle E'F'G'$ 的对应边不平行，对应顶点的连线交于同一点，则 $\triangle EFG$ 与 $\triangle E'F'G'$ 对应边的交点在一条直线上.

题目 7 (2024·河北·校联考一模) 已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$h(x)$满足:对于任意的$x\in\mathbf{R}$,都有$h(x+2\pi)=h(x)+h(2\pi)$,则称函数$h(x)$具有性质P.

(1) 判断函数$f(x)=2x,g(x)=\cos x$是否具有性质P;(直接写出结论)

(2) 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\frac{3}{2}<\omega<\frac{5}{2},|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$,判断是否存在$\omega,\varphi$,使函数$f(x)$具有性质$P$?若存在,求出$\omega,\varphi$的值;若不存在,说明理由;

(3) 设函数$f(x)$具有性质P,且在区间$[0,2\pi]$上的值域为$[f(0),f(2\pi)]$. 函数$g(x)=\sin(f(x))$,满足$g(x+2\pi)=g(x)$,且在区间$(0,2\pi)$上有且只有一个零点. 求证:$f(2\pi)=2\pi$.

题目 8 (2024·江西吉安·吉安一中校考一模) 对于无穷数列$\{a_n\}$,"若存在$a_m-a_k=t(m,k\in N^*,m>k)$,必有$a_{m+1}-a_{k+1}=t$",则称数列$\{a_n\}$具有$P(t)$性质.

(1) 若数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}2n(n=1,2)\\2n-5(n\geqslant 3,n\in N^*)\end{cases}$,判断数列$\{a_n\}$是否具有$P(1)$性质?是否具有$P(4)$性质?

(2) 对于无穷数列$\{a_n\}$,设$T=\{x|x=a_j-a_i,\mathrm{i}<j\}$,求证:若数列$\{a_n\}$具有$P(0)$性质,则$T$必为有限集;

(3) 已知$\{a_n\}$是各项均为正整数的数列,且$\{a_n\}$既具有$P(2)$性质,又具有$P(3)$性质,是否存在正整数N,k,使得a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, $\cdots$, a_{N+k}, $\cdots$ 成等差数列. 若存在,请加以证明;若不存在,说明理由.

题目 9 (2024·全国·校联考模拟预测) 已知有穷数列 $A:a_1, a_2, \cdots, a_n(n\geqslant 3)$ 中的每一项都是不大于 n 的正整数. 对于满足 $1\leqslant m\leqslant n$ 的整数 m，令集合 $A(m)=\left\{k \middle| a_k=m, k=1, 2, \cdots, n\right\}$. 记集合 $A(m)$ 中元素的个数为 $s(m)$ (约定空集的元素个数为0).

(1) 若 $A:6, 3, 2, 5, 3, 7, 5, 5$，求 $A(5)$ 及 $s(5)$；

(2) 若 $\dfrac{1}{s(a_1)}+\dfrac{1}{s(a_2)}+\cdots+\dfrac{1}{s(a_n)}=n$，求证：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互不相同；

(3) 已知 $a_1=a,a_2=b$，若对任意的正整数 $\mathrm{i}, j(\mathrm{i}\neq j, \mathrm{i}+j\leqslant n)$ 都有 $\mathrm{i}+j\in A(a_i)$ 或 $\mathrm{i}+j\in A(a_j)$，求 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的值.

题目 10 (2024·河南郑州·郑州外国语学校校考模拟预测) 记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$. 对数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 和 U 的子集 T，若 $T=\varnothing$，定义 $S_T=0$；若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$. 例如：$T=\{1,3,66\}$ 时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$. 现设 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 是公比为3的等比数列，且当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=30$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 对任意正整数 $k(1\leqslant k\leqslant 100)$，若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，求证：$S_T<a_{k+1}$；

(3) 设 $C\subseteq U,D\subseteq U,S_C\geqslant S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$.

题目 11 (2024·江西南昌·南昌二中校联考模拟预测) 若存在 $x_0\in D$ 使得 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 对任意 $x\in D$ 恒成立，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 在 D 上的最大值点，记函数 $f(x)$ 在 D 上的所有最大值点所构成的集合为 M

(1) 若 $f(x)=-x^2+2x+1, D=R$，求集合 M；

(2) 若 $f(x)=\dfrac{(2^x-x)x}{4^x}, D=R$，求集合 M；

(3) 设 a 为大于 1 的常数，若 $f(x)=x+a\sin x, D=[0,b]$，证明，若集合 M 中有且仅有两个元素，则所有满足条件的 b 从小到大排列构成一个等差数列.

题目 12 (2024·江西抚州·临川一中校考一模) 若各项为正的无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}^2-a_n^2=d$，其中 d 为非零常数，则称数列 $\{a_n\}$ 为 D 数列. 记 $b_n=a_{n+1}-a_n$.

(1) 判断无穷数列 $a_n=\sqrt{n}$ 和 $a_n=2^n$ 是否是 D 数列，并说明理由；

(2) 若 $\{a_n\}$ 是 D 数列，证明：数列 $\{b_n\}$ 中存在小于 1 的项；

(3) 若 $\{a_n\}$ 是 D 数列，证明：存在正整数 n，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}>2024$.

题目 13 (2024·江西南昌·南昌二中校考一模) 若一个两位正整数 m 的个位数为 4，则称 m 为“好数”.

(1) 求证：对任意“好数” m, m^2-16 一定为 20 的倍数；

(2) 若 $m=p^2-q^2$，且 p,q 为正整数，则称数对 (p,q) 为“友好数对”，规定：$H(m)=\dfrac{q}{p}$，例如 $24=5^2-1^2$，称数对 $(5,1)$ 为“友好数对”，则 $H(24)=\dfrac{1}{5}$，求小于 70 的“好数”中，所有“友好数对”的 $H(m)$ 的最大值.

题目 14 (2024·全国·校联考模拟预测) 已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\max\{a_{n+1},a_{n+2}\}-\min\{a_{n+1},a_{n+2}\}(n=1,2,3,\cdots)$，其中 $\max\{x,y\}$ 表示 x，y 中最大的数，$\min\{x,y\}$ 表示 x，y 中最小的数.

(1) 当 $a_1=1$，$a_2=2$ 时，写出 a_4 的所有可能值；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 中的项存在最大值，证明：0 为数列 $\{a_n\}$ 中的项；

(3) 若 $a_n>0(n=1,2,3,\cdots)$，是否存在正实数 M，使得对任意的正整数 n，都有 $a_n\leqslant M$？如果存在，写出一个满足条件的 M；如果不存在，说明理由.

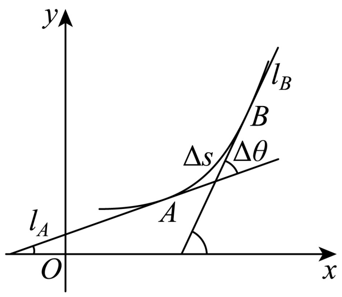
题目 15 (2024·河南·统考模拟预测) 离散对数在密码学中有重要的应用．设 p 是素数，集合 $X=\{1,2,\cdots,p-1\}$，若 $u,v\in X,m\in\mathbf{N}$，记 $u\otimes v$ 为 uv 除以 p 的余数，$u^{m,\otimes}$ 为 u^m 除以 p 的余数；设 $a\in X$，$1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，若 $a^{n,\otimes}=b(n\in\{0,1,\cdots,p-2\})$，则称 n 是以 a 为底 b 的离散对数，记为 $n=\log(p)_a b$．

(1) 若 $p=11,a=2$，求 $a^{p-1,\otimes}$；

(2) 对 $m_1,m_2\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，记 $m_1\oplus m_2$ 为 m_1+m_2 除以 $p-1$ 的余数（当 m_1+m_2 能被 $p-1$ 整除时，$m_1\oplus m_2=0$）．证明：$\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$，其中 $b,c\in X$；

(3) 已知 $n=\log(p)_a b$．对 $x\in X,k\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，令 $y_1=a^{k,\otimes},y_2=x\otimes b^{k,\otimes}$．证明：$x=y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}$．

题目 16 (2024上·浙江宁波·高三镇海中学校考期末) 在几何学常常需要考虑曲线的弯曲程度，为此我们需要刻画曲线的弯曲程度．考察如图所示的光滑曲线 C：$y=f(x)$ 上的曲线段 $\overset{\frown}{AB}$，其弧长为 Δs，当动点从 A 沿曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 运动到 B 点时，A 点的切线 l_A 也随着转动到 B 点的切线 l_B，记这两条切线之间的夹角为 $\Delta\theta$ (它等于 l_B 的倾斜角与 l_A 的倾斜角之差)．显然，当弧长固定时，夹角越大，曲线的弯曲程度就越大；当夹角固定时，弧长越小则弯曲程度越大，因此可以定义 $\bar{K}=\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$ 为曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率；显然当 B 越接近 A，即 Δs 越小，K 就越能精确刻画曲线 C 在点 A 处的弯曲程度，因此定义 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ (若极限存在) 为曲线 C 在点 A 处的曲率．(其中 y'，y'' 分别表示 $y=f(x)$ 在点 A 处的一阶、二阶导数)



(1) 求单位圆上圆心角为 60° 的圆弧的平均曲率；

(2) 求椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 在 $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的曲率；

(3) 定义 $\varphi(y)=\dfrac{2\sqrt{2}|y''|}{(1+y')^3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的“柯西曲率”．已知在曲线 $f(x)=x\ln x-2x$ 上存在两点 $P(x_1,f(x_1))$ 和 $Q(x_2,f(x_2))$，且 P，Q 处的“柯西曲率”相同，求 $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ 的取值范围．

题目 17 (2024上·山东潍坊·高一统考期末) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^{2x}+a^{x}-2,x\geqslant 0,\\-a^{mx}-a^{-x}+2,x<0\end{cases}(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 为奇函数，且 $g(x)=|f(x)|$.

(1) 求实数 m 的值；

(2) 若对于函数 $y=m(x),x\in[p,q]$，用 $x_i(\mathrm{i}=0,1,2,\cdots,n,p=x_0<x_1<\cdots<x_n=q)$ 将区间 $[p,q]$ 任意划分成 n 个小区间，若存在常数 $M>0$，使得和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}|m(x_i)-m(x_{i-1})|\leqslant M$ 对任意的划分恒成立，则称函数 $m(x)$ 为 $[p,q]$ 上的有界变差函数．判断函数 $g(x)$ 是否为 $[-|\log_a 2|,|\log_a 4|]$ 上的有界变差函数？若是，求 M 的最小值；若不是，请说明理由．

2024年新高考九省联考新题型——综合能力题

题目 1 (2024·全国·校联考模拟预测)若项数为$k(k\in \mathbf{N}^*,k\geqslant 3)$的有穷数列$\{a_n\}$满足：$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$，且对任意的$i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$，$a_j+a_i$或$a_j-a_i$是数列$\{a_n\}$中的项，则称数列$\{a_n\}$具有性质$P$.

(1)判断数列0,1,2是否具有性质P，并说明理由；

(2)设数列$\{a_n\}$具有性质P，$a_i(i=1,2,\cdots,k)$是$\{a_n\}$中的任意一项，证明：a_k-a_i一定是$\{a_n\}$中的项；

(3)若数列$\{a_n\}$具有性质P，证明：当$k\geqslant 5$时，数列$\{a_n\}$是等差数列.

【答案】(1)数列0,1,2具有性质P，理由见解析；

(2)证明见解析

(3)证明见解析

【分析】(1)由数列0,1,2中，得到a_j-a_i，一定是数列$\{a_n\}$中的项，即可求解；

(2)根据题意，得到a_k+a_i一定不是数列$\{a_n\}$中的项，进而证得a_k-a_i一定是数列$\{a_n\}$中的项；

(3)根据题意得到$a_k+a_k\notin\{a_n\}$，且$a_k-a_k\in\{a_n\}$，进而得到$a_1=0$，得到$a_k-a_i\in\{a_n\}$，当$2\leqslant i\leqslant k$，证得$a_k-a_{k-i}=a_{i+1}$，当$3\leqslant i\leqslant k-2$，得到$a_{k-1}-a_{k-i}=a_i$，由$k\geqslant 5$时，得到$a_{k-1}-a_{k-i}=a_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$，两式相减得出$a_k-a_{k-1}=a_{i+1}-a_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$，结合等差中项公式，即可求解.

【详解】(1)解：数列0,1,2具有性质P.

理由：根据有穷数列$\{a_n\}$满足：$0\leqslant a_1<a_2<a_3<\cdots<a_k$，且对任意的$i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$，$a_j+a_i$或$a_j-a_i$是数列$\{a_n\}$中的项，则称数列$\{a_n\}$具有性质$P$，

对于数列0,1,2中，若对任意的$i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant k)$，可得$a_j-a_i=0$或1或2，

可得a_j-a_i一定是数列$\{a_n\}$中的项，所以数列0,1,2具有性质P.

(2)证明：由$a_i(i=1,2,\cdots,k)$是数列$\{a_n\}$中的任意一项，

因为数列$\{a_n\}$具有性质P，即a_j+a_i或a_j-a_i是数列$\{a_n\}$中的项，

令$j=k$，可得a_k+a_i或a_k-a_i是数列$\{a_n\}$中的项，

又因为$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_k$，可得$a_k+a_i$一定不是数列$\{a_n\}$中的项，

所以a_k-a_i一定是数列$\{a_n\}$中的项.

(3)解：由数列$\{a_n\}$具有性质P，可得$a_k+a_k\notin\{a_n\}$，所以$a_k-a_k\in\{a_n\}$，

则$0\in\{a_n\}$，且$a_1=0$，

又由$a_k+a_i\notin\{a_n\}$，所以$a_k-a_i\in\{a_n\}$，

又由$0=a_k-a_k<a_k-a_{k-1}<a_k-a_{k-2}<\cdots<a_k-a_2<a_k-a_1$，

①设$2\leqslant i\leqslant k$，因为$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_k$

可得$a_k-a_k=0,a_k-a_{k-1}=a_2,a_k-a_{k-2}=a_3,\cdots,a_k-a_2=a_{k-1},a_k-a_1=a_k$，

当$k\geqslant 5$时，可得$a_k-a_{k-i}=a_{i+1}(1\leqslant i\leqslant k-1)$，　(*)

②设$3\leqslant i\leqslant k-2$，则$a_{k-1}+a_i>a_{k-1}+a_2=a_k$，所以$a_{k-1}+a_i\notin\{a_n\}$，

由$0=a_{k-1}-a_{k-1}<a_{k-1}-a_{k-2}<\cdots<a_{k-1}-a_3<a_k-a_3=a_{k-2}$，

又由$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_{k-3}<a_{k-2}$，

可得$a_{k-1}-a_{k-1}=a_1,a_{k-1}-a_{k-2}=a_2\cdots<a_{k-1}-a_{k-3}=a_3,a_{k-1}-a_3=a_{k-3}$，

所以$a_{k-1}-a_{k-i}=a_i(1\leqslant i\leqslant k-3)$，

因为$k\geqslant 5$，由以上可知：$a_{k-1}-a_{k-1}=a_1$且$a_{k-1}-a_{k-2}=a_2$，

所以$a_{k-1}-a_1=a_{k-1}$且$a_{k-1}-a_2=a_{k-2}$，所以$a_{k-1}-a_{k-i}=a_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$，(**)

由(*)知，$a_k-a_{k-i}=a_{i+1}(1\leqslant i\leqslant k-1)$

两式相减，可得$a_k-a_{k-1}=a_{i+1}-a_i(1\leqslant i\leqslant k-1)$，

所以当 $k \geqslant 5$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

题目 2 (2024·全国·校联考一模) 关于 x 的函数 $f(x)=\ln x+2x-b(b>2)$，我们曾在必修一中学习过“二分法”求其零点近似值. 现结合导函数，介绍另一种求零点近似值的方法——“牛顿切线法”.

(1) 证明：$f(x)$ 有唯一零点 a，且 $a \in (1,b)$；

(2) 现在，我们任取 $x_1 \in (1,a)$ 开始，实施如下步骤：

在 $(x_1,f(x_1))$ 处作曲线 $f(x)$ 的切线，交 x 轴于点 $(x_2,0)$；

在 $(x_2,f(x_2))$ 处作曲线 $f(x)$ 的切线，交 x 轴于点 $(x_3,0)$；

……

在 $(x_n,f(x_n))$ 处作曲线 $f(x)$ 的切线，交 x 轴于点 $(x_{n+1},0)$；

可以得到一个数列 $\{x_n\}$，它的各项都是 $f(x)$ 不同程度的零点近似值.

(i) 设 $x_{n+1}=g(x_n)$，求 $g(x_n)$ 的解析式 (用 x_n 表示 x_{n+1})；

(ii) 证明：当 $x_1 \in (1,a)$，总有 $x_n<x_{n+1}<a$.

【答案】(1) 证明见解析；

(2) (i) $g(x_n)=\dfrac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$；(ii) 证明见解析.

【分析】(1) 根据函数的单调性，结合零点存在性定理证明即可；

(2) (i) 由导数的几何意义得曲线 $f(x)$ 在 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为 $y=\dfrac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，进而得 $g(x_n)=\dfrac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$；

(ii) 令 $h(x)=\dfrac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，进而构造函数 $F(x)=f(x)-h(x)=\ln x-\dfrac{1}{x_n}x-\ln x_n+1$，结合函数单调性证明 $x_{n+1}<a$，再根据 $f'(x_n)>0, f(x_n)<f(a)=0$ 证明 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}>x_n$ 即可得答案.

【详解】(1) 证明：$f(x)=\ln x+2x-b(b>2)$，定义域为 $(0,+\infty)$，

所以，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(1)=\ln 1+2-b=2-b<0(b>2)$，$f(b)=\ln b+2b-b=\ln b+b>0(b>2)$，

所以，存在唯一 $a \in (1,b)$，使得 $f(a)=0$，即：$f(x)$ 有唯一零点 a，且 $a \in (1,b)$.

(2) 解：(i) 由 (1) 知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2$，

所以，曲线 $f(x)$ 在 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线斜率为 $k_n=\dfrac{1}{x_n}+2$，

所以，曲线 $f(x)$ 在 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，即 $y=\dfrac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$

令 $y=0$ 得 $x=\dfrac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$

所以，切线与 x 轴的交点 $\left(\dfrac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n},0\right)$，即 $x_{n+1}=\dfrac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$，

所以，$g(x_n)=\dfrac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$.

(ii) 对任意的 $x_n \in (0,+\infty)$，由 (i) 知，曲线 $f(x)$ 在 $(x_n,f(x_n))$ 处的切线方程为：

$y=\dfrac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，故令 $h(x)=\dfrac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，

令 $F(x)=f(x)-h(x)=\ln x-\dfrac{1}{x_n}x-\ln x_n+1$.

所以, $F'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{x_n-x}{x_nx}$,

所以,当 $x\in(0,x_n)$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增,当 $x\in(x_n,+\infty)$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减;

所以,恒有 $F(x)\leqslant F(x_n)=0$,即 $f(x)\leqslant h(x)$ 恒成立,当且仅当 $x=x_n$ 时等号成立,

另一方面,由 (i) 知, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$,且当 $x_n\neq a$ 时, $x_{n+1}\neq x_n$,

(若 $x_n=a$,则 $f(x_n)=f(a)=0$,故任意 $x_{n+1}=x_n=\ldots=x_1=a$,显然矛盾)

因为 x_{n+1} 是 $h(x)$ 的零点,

所以 $f(x_{n+1})<h(x_{n+1})=f(a)=0$,

因为 $f(x)$ 为单调递增函数,

所以,对任意的 $x_n\neq a$ 时,总有 $x_{n+1}<a$.

又因为 $x_1<a$,

所以,对于任意 $n\in N^*$,均有 $x_n<a$,

所以, $f'(x_n)>0, f(x_n)<f(a)=0$.

所以 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}>x_n$,

综上,当 $x_1\in(1,a)$,总有 $x_n<x_{n+1}<a$

【点睛】本题考查利用导数的几何意义,不等式的证明,考查运算求解能力,逻辑推理能力,是难题. 本题第二问解题的关键在于结合切线方程,构造函数 $F(x)=f(x)-h(x)=\ln x-\dfrac{1}{x_n}x-\ln x_n+1$,进而结合函数的单调性证明不等式.

题目 3 (2024·全国·校联考模拟预测)“让式子丢掉次数”:伯努利不等式

伯努利不等式(*Bernoulli'sInequality*),又称贝努利不等式,是高等数学的分析不等式中最常见的一种不等式,由瑞士数学家雅各布·伯努利提出:对实数 $x\in(-1,+\infty)$,在 $n\in[1,+\infty)$ 时,有不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 成立;在 $n\in(0,1)$ 时,有不等式 $(1+x)^n\leqslant 1+nx$ 成立.

(1) 猜想伯努利不等式等号成立的条件;

(2) 当 $n\geqslant 1$ 时,对伯努利不等式进行证明;

(3) 考虑对多个变量的不等式问题. 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\in N^*)$ 是大于 -1 的实数(全部同号),证明 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n$

【答案】(1) $n=0,1$,或 $x=0$

(2) 证明见解析

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据不等式特征猜想出等号成立的条件;

(2) 设 $f(x)=(1+x)^n-nx-1(x<-1,a\geqslant 1)$,注意到 $f(0)=0$,求导得到 $f'(0)=0$,二次求导,得到函数的单调性和极值最值情况,证明出结论;

(3) 当 $n=1$ 时,显然成立,当 $n\geqslant 2$ 时,构造数列 $\{x_n\}$: $x_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$,作差法得到 $\{x_n\}$ 是一个单调递增的数列 $(n\geqslant 2)$,结合 $x_2>0$,得到 $x_n>x_2>0(\forall n>2)$,证明出结论.

【详解】(1) 猜想:伯努利不等式等号成立的充要条件是 $n=0,1$,或 $x=0$.

当 $n=0$ 时, $(1+x)^0=1+0x$,当 $n=1$ 时, $(1+x)^1=1+x$,

当 $x=0$ 时，$(1+0)^n=1+0n$，其他值均不能保证等号成立，
猜想，伯努利不等式等号成立的充要条件是 $n=0,1$，或 $x=0$；
(2) 当 $n\geqslant 1$ 时，我们需证 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$，
设 $f(x)=(1+x)^n-nx-1(x<-1,a\geqslant 1)$，注意到 $f(0)=0$，
$f'(x)=n(1+x)^{n-1}-n=n[(1+x)^{n-1}-1]$，令 $(1+x)^{n-1}-1=0$ 得 $x=0$，
即 $f'(0)=0$，$x=0$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.
令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}>0$，
所以 $f'(x)$ 单调递增.
当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<f(0)=0$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>f(0)=0$，
故 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
所以在 $x=0$ 处 $f(x)$ 取得极小值 $f(0)=0$，
即 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，$(1+x)^n\geqslant nx+1$.
伯努利不等式对 $n\geqslant 1$ 得证.
(3) 当 $n=1$ 时，原不等式即 $1+a_1\geqslant 1+a_1$，显然成立.
当 $n\geqslant 2$ 时，构造数列 $\{x_n\}$：$x_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$，
则 $x_{n+1}-x_n=a_{n+1}[(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1]$，
若 $a_i>0(\mathrm{i}=1,2,\cdots,n+1)$，由上式易得 $x_{n+1}-x_n>0$，即 $x_{n+1}>x_n$；
若 $-1<a_i\leqslant 0(\mathrm{i}=1,2,\cdots,n+1)$，则 $0<1+a_i<1$，所以 $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1<0$，
故 $x_{n+1}-x_n=a_{n+1}[(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)-1]>0$，
即此时 $x_{n+1}>x_n$ 也成立.
所以 $\{x_n\}$ 是一个单调递增的数列 $(n\geqslant 2)$，
由于 $x_2=(1+a_1)(1+a_2)-(1+a_1+a_2)=a_1a_2>0$，所以 $x_n>x_2>0(\forall n>2)$，
故原不等式成立.
【点睛】关键点点睛：函数新定义问题，命题新颖，常常考虑函数的性质，包括单调性，奇偶性，值域等，且存在知识点交叉，会和导函数，数列等知识进行结合，很好的考虑了知识迁移，综合运用能力，对于此类问题，一定要解读出题干中的信息，正确理解问题的本质，转化为熟悉的问题来进行解决.

题目 4 (2024·江苏南通·模拟预测) 已知 $A_m=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{pmatrix}(m\geqslant 2)$ 是 m^2 个正整数组成的 m 行 m 列的数表，当 $1\leqslant \mathrm{i}<s\leqslant m,1\leqslant j<t\leqslant m$ 时，记 $d(a_{i,j},a_{s,t})=|a_{i,j}-a_{s,j}|+|a_{s,j}-a_{s,t}|$. 设 $n\in\mathbf{N}^*$，若 A_m 满足如下两个性质：
① $a_{i,j}\in\{1,2,3;\cdots,n\}(\mathrm{i}=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,m)$；
②对任意 $k\in\{1,2,3,\cdots,n\}$，存在 $\mathrm{i}\in\{1,2,\cdots,m\},j\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $a_{i,j}=k$，则称 A_m 为 Γ_n 数表.
(1) 判断 $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是否为 Γ_3 数表，并求 $d(a_{1,1},a_{2,2})+d(a_{2,2},a_{3,3})$ 的值；
(2) 若 Γ_2 数表 A_4 满足 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=1(\mathrm{i}=1,2,3;j=1,2,3)$，求 A_4 中各数之和的最小值；
(3) 证明：对任意 Γ_4 数表 A_{10}，存在 $1\leqslant \mathrm{i}<s\leqslant 10,1\leqslant j<t\leqslant 10$，使得 $d(a_{i,j},a_{s,t})=0$.
【答案】(1) 是；5
(2)22

(3) 证明见详解

【分析】(1) 根据题中条件可判断结果,根据题中公式进行计算即可;

(2) 根据条件讨论 $a_{i+1,j}$ 的值,根据 $d(a_{i,j},a_{s,t})=|a_{i,j}-a_{s,j}|+|a_{s,j}-a_{s,t}|$,得到相关的值,

进行最小值求和即可;

(3) 当 $r_i\geqslant 2$ 时,将横向相邻两个 k 用从左向右的有向线段连接,则该行有 r_i-1 条有向线段,得到横向有向线段的起点总数,同样的方法得到纵向有向线段的起点总数,根据条件建立不等关系,即可证明.

【详解】(1) $A_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{pmatrix}$ 是 Γ_3 数表,

$d(a_{1,1},a_{2,2})+d(a_{2,2},a_{3,3})=2+3=5$.

(2) 由题可知 $d(a_{i,j},a_{s,t})=|a_{i,j}-a_{s,j}|+|a_{s,j}-a_{s,t}|=1(\mathrm{i}=1,2,3;j=1,2,3)$.

当 $a_{i+1,j}=1$ 时,有 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=(a_{i,j}-1)(a_{i+1,j+1}-1)=1$,

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3$.

当 $a_{i+1,j}=2$ 时,有 $d(a_{i,j},a_{i+1,j+1})=(2-a_{i,j})(2-a_{i+1,j+1})=1$,

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3$.

所以 $a_{i,j}+a_{i+1,j+1}=3(\mathrm{i}=1,2,3;j=1,2,3)$.

所以 $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}+a_{4,4}=3+3=6,a_{1,3}+a_{2,4}=3,a_{3,1}+a_{4,2}=3$.

$a_{1,2}+a_{2,3}+a_{3,4}=3+1=4$ 或者 $a_{1,2}+a_{2,3}+a_{3,4}=3+2=5$,

$a_{2,1}+a_{3,2}+a_{4,3}=3+1=4$ 或者 $a_{2,1}+a_{3,2}+a_{4,3}=3+2=5$,

$a_{1,4}=1$ 或 $a_{1,4}=2$, $a_{4,1}=1$ 或 $a_{4,1}=2$,

故各数之和 $\geqslant 6+3+3+4+4+1+1=22$,

当 $A_4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&1&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$ 时,

各数之和取得最小值 22.

(3) 由于 Γ_4 数表 A_{10} 中共 100 个数字,

必然存在 $k\in\{1,2,3,4\}$,使得数表中 k 的个数满足 $T\geqslant 25$.

设第 i 行中 k 的个数为 $r_i(\mathrm{i}=1,2,\cdots,10)$.

当 $r_i\geqslant 2$ 时,将横向相邻两个 k 用从左向右的有向线段连接,

则该行有 r_i-1 条有向线段,

所以横向有向线段的起点总数 $R=\sum\limits_{r_i\geqslant 2}(r_i-1)\geqslant\sum\limits_{10}^{i=1}(r_i-1)=T-10$.

设第 j 列中 k 的个数为 $c_j(j=1,2,\cdots,10)$.

当 $c_j\geqslant 2$ 时,将纵向相邻两个 k 用从上到下的有向线段连接,

则该列有 c_j-1 条有向线段,

所以纵向有向线段的起点总数 $C=\sum\limits_{c_j\geqslant 2}(c_j-1)\geqslant\sum\limits_{10}^{j=1}(c_j-1)=T-10$.

所以 $R+C\geqslant 2T-20$,

因为 $T\geqslant 25$, 所以 $R+C-T\geqslant 2T-20-T=T-20>0$.

所以必存在某个 k 既是横向有向线段的起点,又是纵向有向线段的终点,

即存在 $1<u<v\leqslant 10$，$1<p<q\leqslant 10$，
使得 $a_{u,p}=a_{v,p}=a_{v,q}=k$，
所以 $d(a_{u,p},a_{v,q})=|a_{u,p}-a_{v,p}|+|a_{v,p}-a_{v,q}|=0$，
则命题得证.

题目 5 (2024·全国·校联考模拟预测) 设正整数数列 A:a_1，a_2，$\cdots$，$a_N(N>3)$ 满足 $a_i<a_j$，其中 $1\leqslant i<j\leqslant N$. 如果存在 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$，使得数列 A 中任意 k 项的算术平均值均为整数，则称 A 为"k 阶平衡数列"
(1) 判断数列 2，4，6，8，10 和数列 1，5，9，13，17 是否为"4 阶平衡数列"？
(2) 若 N 为偶数，证明：数列 A:1，2，3，$\cdots$，N 不是"k 阶平衡数列"，其中 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$
(3) 如果 $a_N\leqslant 2019$，且对于任意 $k\in\{2,3,\cdots,N\}$，数列 A 均为"k 阶平衡数列"，求数列 A 中所有元素之和的最大值.

【答案】(1)2，4，6，8，10 不是 4 阶平衡数列；1，5，9，13，17 是 4 阶平衡数列；
(2) 证明见解析
(3)12873.

【分析】(1) 由 $\dfrac{2+6+8+10}{4}$ 不为整数，数列 1，5，9，13，17 为等差数列，结合新定义即可得到结论；
(2) 讨论 k 为偶数或奇数，结合新定义即可得证；
(3) 在数列 A 中任意两项 a_s，a_t，$(s\neq t)$，作差可得数列中任意两项之差都是 k 的倍数，$k\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，讨论数列 A 的项数超过 8，推得数列 A 的项数至多 7 项. 讨论数列 A 的项数为 7，数列的项数小于或等于 6，奇数可得所求最大值.

【详解】(1) 由 $\dfrac{2+6+8+10}{4}$ 不为整数，
可得数列 2，4，6，8，10 不是 4 阶平衡数列；
数列 1，5，9，13，17 为首项为 1，公差为 4 的等差数列，
则数列 1，5，9，13，17 是 4 阶平衡数列；
(2) 证明：若 N 为偶数，设 $k=2m(m\in N^*)$，
考虑 1，2，3，$\cdots$，k 这 k 项，其和为 $S=\dfrac{k(k+1)}{2}$.
所以这 k 项的算术平均值为：$\dfrac{S}{k}=\dfrac{k+1}{2}=\dfrac{2m+1}{2}$，此数不是整数；
若 k 为奇数，设 $k=2m+1$，$m\in N^*$，考虑 1，2，3，4，5，$\cdots k-2$，$k-1$，$k+1$；
这 k 项，其和为 $S'=\dfrac{k(k+1)}{2}+1$，
所以这 k 项的算术平均数为：$\dfrac{S'}{k}=\dfrac{k+1}{2}+\dfrac{1}{k}=m+1+\dfrac{1}{2m+1}$，
此数不是整数；
故数列 A：1，2，3，4，$\cdots$，N 不是"k 阶平衡数列"，其中 $k\in\{2,3,4,\cdots N\}$；
(3) 在数列 A 中任意两项 a_s，a_t，$(s\neq t)$，
对于任意 $k\in\{2,3,4,5,\cdots,N\}$，在 A 中任意取两项 a_s，a_t，相异的 $k-1$ 项，
并设这 $k-1$ 项和为 S_n. 由题意可得 S_n+a_s，S_n+a_t 都是 k 的倍数，
即 $S_n+a_s=pk$，$S_n+a_t=qk$，$(p$，q 为整数$)$，可得 $a_s-a_t=(p-q)k$，
即数列中任意两项之差都是 k 的倍数，$k\in\{2,3,\cdots,N-1\}$，
因此所求数列 A 的任意两项之差都是 2，3，$\cdots$，$N-1$ 的倍数，
如果数列 A 的项数超过 8，
那么 a_2-a_1，a_3-a_2，$\cdots$，a_8-a_7 均为 2，3，4，5，6，7 的倍数，