专题 05　九种函数与抽象函数模型归类

题型盘点·直击高考

目录

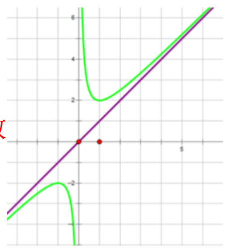
题型突围·精准提分

题型一：三大补充函数：对勾函数

指 | 点 | 迷 | 津

对勾函数：　$y=ax+\dfrac{b}{x}(a,b>0)$ 图像特征

形如 $y=ax+\dfrac{b}{x}(a,b>0)$ 称为对勾函数



1.有“渐近线”：y=ax

2.“拐点”：解方程 $\mathrm{ax}=\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}$（即第一象限均值不等式取等处）

1.（2022 秋·四川成都·高三成都七中校考阶段练习）若对任意的 $x\in[1,5]$，不等式 $2\le x+\dfrac{a}{x}+b\le 5$ 恒成立，则 $a-b$ 的最大值是________.

【答案】$4+4\sqrt{3}$

【分析】令 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}+b,x\in[1,5]$，讨论 a

的取值范围，确定函数的单调性，根据单调性确定函数的最大值与最小值，使 $f(x)_{\min}\ge 2$ 且 $f(x)_{\max}\le 5$ 恒成立，进而确定 a 的取值范围以及 b 的取值范围，即求.

【详解】令 $f(x)=x+\frac{a}{x}+b, x\in[1,5]$

I.当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 显然单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=1+a+b$， $f(x)_{\max}=5+\frac{a}{5}+b$，

由题意可得 $\begin{cases}1+a+b\ge 2\\ 5+\frac{a}{5}+b\le 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b\ge 1\\ \frac{a}{5}+b\le 0\end{cases}\Rightarrow 1-a\le b\le -\frac{a}{5}\Rightarrow a\ge\frac{5}{4}$，

这与 $a\le 0$ 矛盾，故舍去；

II，当 $a>0$ 时， $f(x)=x+\frac{a}{x}+b$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 单调递减，$[\sqrt{a},+\infty)$ 单调递增，

①.当 $a>25$ 时，即 $\sqrt{a}>5$，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1+a+b$， $f(x)_{\min}=f(5)=5+\frac{a}{5}+b$

由题意可得 $\begin{cases}1+a+b\le 5\\ 5+\frac{a}{5}+b\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b\le 4\\ \frac{a}{5}+b\ge -3\end{cases}\Rightarrow -3-\frac{a}{5}\le b\le 4-a\Rightarrow a\le\frac{35}{4}$，

这与 $a>25$ 矛盾（舍去）.

②. 当 $1\le a\le 25$ 时，即 $1\le\sqrt{a}\le 5$，

所以 $f(x)_{\max}=\max\{f(1),f(5)\}=\max\left\{1+a+b,5+\frac{a}{5}+b\right\}$，

$f(x)_{\min}=f(\sqrt{a})=2\sqrt{a}+b$，由题意得 $\begin{cases}1+a+b\le 5\\ 5+\frac{a}{5}+b\le 5\\ 2\sqrt{a}+b\ge 2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b\le 4-a\\ b\le -\frac{a}{5}\\ b\ge 2-2\sqrt{a}\end{cases}$，a.当 $5<a\le 25$ 时，此时 $4-a<-\frac{a}{5}$，

所以 $2-2\sqrt{a}\le b\le 4-a\Rightarrow 2-2\sqrt{a}\le 4-a\Rightarrow 0\le\sqrt{a}\le\sqrt{3}+1\Rightarrow 0\le a\le 4+2\sqrt{3}$，故 $5<a\le 4+2\sqrt{3}$，

而 $2a-4\le a-b\le a+2\sqrt{a}-2$，故 $a-b\le a+2\sqrt{a}-2\le 4+4\sqrt{3}$，b.当 $1\le a\le 5$ 时，此时 $4-a\ge -\frac{a}{5}$，所以

$2-2\sqrt{a}\le b\le -\frac{a}{5}\Rightarrow 2-2\sqrt{a}\le -\frac{a}{5}\Rightarrow 5-\sqrt{15}\le\sqrt{a}\le 5+\sqrt{15}\Rightarrow 40-10\sqrt{15}\le a\le 40+10\sqrt{15}$，

故 $40-10\sqrt{15}\le a\le 5$，而 $\frac{6a}{5}\le a-b\le a+2\sqrt{a}-2$，故 $a-b\le a+2\sqrt{a}-2\le 3+2\sqrt{5}$.

③. 当 $0<a<1$ 时，即 $0<\sqrt{a}<1$，所以 $f(x)_{\min}=1+a+b$， $f(x)_{\max}=5+\frac{a}{5}+b$，

由题意可得 $\begin{cases}1+a+b\ge 2\\ 5+\frac{a}{5}+b\le 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b\ge 1\\ \frac{a}{5}+b\le 0\end{cases}\Rightarrow 1-a\le b\le -\frac{a}{5}\Rightarrow a\ge\frac{5}{4}$，这与 $0<a<1$ 矛盾，

综上所述： $a-b\le 4+4\sqrt{3}$.故答案为： $4+4\sqrt{3}$

2.（2022·安徽合肥·高二校联考开学考试）已知函数 $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x}$，关于 x 的不等式 $f^2(x)<af(x)$ 只有一个整数解，则正数 a 的取值范围是______.

【答案】$(\frac{9}{2},5]$

【分析】将函数解析式变形，结合打勾函数的图像与性质可求得 $f(x)$ 的值域，进而结合不等式可知 $1+2\sqrt{3}\le f(x)<a$；因为不等式 $f^2(x)<af(x)$ 只有一个解，因而计算 $f(1),f(2),f(3)$ 后与 $1+2\sqrt{3}$ 比较即可确定这个解为 2；进而由不等式成立条件可得正数 a 的取值范围.

【详解】函数 $f(x)=\frac{x^2+x+3}{x}=x+\frac{3}{x}+1$，结合打勾函数性质可知，$f(x)\in\left(-\infty,1-2\sqrt{3}\right]\cup\left[1+2\sqrt{3},+\infty\right)$，关于 x 的不等式 $f^2(x)<af(x)$，因为求正数 a 的取值范围，因而 $0<f(x)$，化简不等式可得 $f(x)<a$，所以 $0<f(x)<a$，即 $1+2\sqrt{3}\le f(x)<a$ 则 $1+2\sqrt{3}\approx 1+2\times 1.7=4.4$，$f(1)=1+\frac{3}{1}+1=5,\ f(2)=2+\frac{3}{2}+1=\frac{9}{2}$，

$f(3)=3+\frac{3}{3}+1=5$，因为关于 x 的不等式 $f^2(x)<af(x)$ 只有一个整数解，

所以由以上数据可知整数解为 2，所以 $f(2)<a\le f(3)$，

解得 $\frac{9}{2}<a\le 5$，所以 $a\in\left(\frac{9}{2},5\right]$ 故答案为：$\left(\frac{9}{2},5\right]$.

3..（2023·高三单元测试）已知函数 $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1$，若存在 $x_1,x_2\cdots,x_n\in\left[\frac{1}{16},1\right]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})=f(x_n)$，则正整数 n 的最大值为__________.

【答案】4

【分析】根据单调性得到 $f(x)\in\left[1,3\frac{1}{4}\right]$，要使正整数 n 尽可能大，则可以是 $1+1+\frac{5}{4}=3\frac{1}{4}$，得到答案.

【详解】当 $x\in\left[\frac{1}{16},1\right]$ 时，$\sqrt{x}\in\left[\frac{1}{4},1\right]$，$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1$ 单调递减，故 $f(x)\in\left[1,3\frac{1}{4}\right]$，

要使正整数 n 尽可能大，则可以是 $1+1+\frac{5}{4}=3\frac{1}{4}$，故 n 的最大值为 4.

故答案为：4.

4.（2022·上海闵行·高三上海市七宝中学校考开学考试）已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$，若对任意的 m、n、$p\in\left[\frac{1}{3},1\right]$，长为 $f(m)$、$f(n)$、$f(p)$ 的三条线段均可以构成三角形，则正实数 a 的取值范围是_____.

【答案】$\left(\frac{1}{15},\frac{5}{3}\right)$

【分析】求出 $f(x)$ 的导数，分类讨论可得最小值和最大值，由题意可得最小值的 2 倍大于最大值，解不等式即可得到所求 a 的范围.

【详解】函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的导数为 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}$，

当 $x>\sqrt{a}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增；当 $x<\sqrt{a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减.

当 $\sqrt{a}\ldots 1$ 即 $a\ldots 1$ 时，$[\frac{1}{3}$，$1]$ 为减区间，即有 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{3}+3a$；

最小值为 $1+a$.

由题意可得只要满足 $2(1+a)>\frac{1}{3}+3a$，解得 $1„\ a<\frac{5}{3}$；

当 $\frac{1}{3}<\sqrt{a}<1$ 且 $f(\frac{1}{3})„\ f(1)$ 即 $\frac{1}{9}<a„\ \frac{1}{3}$ 时，$[\frac{1}{3}$，$\sqrt{a}]$ 为减区间，$(\sqrt{a}$，$1)$ 为增区间，

即有 $f(x)$ 的最大值为 $1+a$；最小值为 $2\sqrt{a}$.

由题意可得只要满足 $1+a<4\sqrt{a}$，解得 $a>7-4\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{9}<a„\ \frac{1}{3}$；

当 $\frac{1}{3}<\sqrt{a}<1$ 且 $f(\frac{1}{3})>f$ （1）即 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，$[\frac{1}{3}$，$\sqrt{a}]$ 为减区间，$(\sqrt{a}$，$1)$ 为增区间，

即有 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{3}+3a$；最小值为 $2\sqrt{a}$.

由题意可得只要满足 $\frac{1}{3}+3a<4\sqrt{a}$，解得 $\frac{2-\sqrt{3}}{3}<a<\frac{2+\sqrt{3}}{3}$，所以 $\frac{1}{9}<a„\ \frac{1}{3}$；

当 $\sqrt{a}\le\frac{1}{3}$，即 $0<a\le\frac{1}{9}$ 时，$[\frac{1}{3}$，$1]$ 为增区间，即有 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{3}+3a$；

最大值为$1+a$．

由题意可得只要满足$2(\frac{1}{3}+3a)>1+a$，解得$\frac{1}{15}<a\le\frac{1}{9}$．

综上可得，a的取值范围是$\left(\frac{1}{15},\frac{5}{3}\right)$.

故答案为：$\left(\frac{1}{15},\frac{5}{3}\right)$.

题型二：三大补充函数：复杂分式型“反比例”函数

指丨点丨迷丨津

反比例与分式型函数

解分式不等式，一般是移项（一侧为零），通分，化商为积，化为一元二次求解，或者高次不等式，再用穿线法求解

形如：$y=\frac{ax-b}{cx-d}$。对称中为P（x_0，y_0），其中

①$cx_0-d=0$；

②$y_0=\frac{ax}{cx}$

③一、三或者二、四象限．通过$x=0,1$ 计算判断

1.（2022·湖北武汉·高三校联考模拟）已知函数$y=f(x+1)-3$为奇函数，$g(x)=\frac{3x-2}{x-1}$,$f(x)$与$g(x)$的图像有8个交点，分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\cdots(x_8,y_8)$，则$(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8)-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)=$______.

【答案】16

【分析】由$y=f(x+1)-3$为奇函数可得函数$f(x)$关于点$(1,3)$对称，分离常数$g(x)=\frac{3x-2}{x-1}=\frac{3(x-1)+1}{x-1}=3+\frac{1}{x-1}$可知函数$g(x)$关于点$(1,3)$对称，继而可得$f(x)$与$g(x)$图像的8个交点关于点$(1,3)$对称，则$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8$， $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8$可求，结果可得.

【详解】$\because$ $y=f(x+1)-3$为奇函数$\therefore$函数$f(x)$关于点$(1,3)$对称$\because$ $g(x)=\frac{3x-2}{x-1}=\frac{3(x-1)+1}{x-1}=3+\frac{1}{x-1}$

$\therefore$函数$g(x)$关于点$(1,3)$对称$\therefore$ $f(x)$与$g(x)$图像的8个交点关于点$(1,3)$对称

$\therefore\frac{x_1+x_8}{2}=1$,$\frac{x_2+x_7}{2}=1$,$\frac{x_3+x_6}{2}=1$,$\frac{x_4+x_5}{2}=1$可得$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8=4\times2\times1=8$

同理可知$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8=4\times2\times3=24$

$(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6+y_7+y_8)-(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8)=16$故答案为：16.

2.（2023·全国·高三对口高考）函数$y=\frac{2x-5}{x-3}$的值域是$\{y\mid y\le0或y\ge4\}$，则此函数的定义域为_____.

【答案】$\left[\frac{5}{2},3\right)\cup\left(3,\frac{7}{2}\right]$

【分析】利用反函数,可将原函数化为$x=f(y)$,(其中$y\le0$或$y\ge4$),求出$f(y)$的值域即得x的定义域.

【详解】$\because y=\frac{2x-5}{x-3}, \therefore y(x-3)=2x-5, \therefore x=\frac{3y-5}{y-2}=3+\frac{1}{y-2}$，其中$(y\le 0$或$y\ge 4)$，

当$y\le 0$时，$x=3+\frac{1}{y-2}$是减函数，此时$\frac{5}{2}\le x<3$，

当$y\ge 4$时，$x=3+\frac{1}{y-2}$是减函数，此时$3<x\le\frac{7}{2}$，

∴函数y的定义域为$\left[\frac{5}{2},3\right)\cup\left(3,\frac{7}{2}\right]$.

故答案为：$\left[\frac{5}{2},3\right)\cup\left(3,\frac{7}{2}\right]$.

3.（2023·全国·高三专题练习）已知集合$A=\left[s,s+\frac{1}{6}\right]\cup[t,t+1]$，其中$1\notin A$且$s+\frac{1}{6}<t$，函数$f(x)=\frac{x}{x-1}$，且对任意$a\in A$，都有$f(a)\in A$，则$t$的值是________.

【答案】$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$或3.

【分析】先判断区间$[t,t+1]$与$x=1$的关系可得$t>1$，再分析$s+\frac{1}{6}<1$时定义域与值域的关系，根据函数的单调性可确定定义域与值域的区间端点的不等式，进而求得s和t即可.最后分析当$s>1$时，$f(x)\in\left[1+\frac{1}{t},1+\frac{1}{t-1}\right]\cup\left[1+\frac{1}{s-\frac{5}{6}},1+\frac{1}{s-1}\right]$，从而确定定义域与值域的关系，列不等式求解即可

【详解】先判断区间$[t,t+1]$与$x=1$的关系，因为$1\notin A$，故$t+1<1$或$t>1$.因为当$t+1<1$，即$t<0$时，由题意，当$t\in A$时，$\frac{t}{t-1}>0\notin A$，故不成立；故$t>1$.

再分析区间$\left[s,s+\frac{1}{6}\right]$与$x=1$的关系，因为$1\notin A$，故$s+\frac{1}{6}<1$或$s>1$.

①当$s+\frac{1}{6}<1$，即$s<\frac{5}{6}$时，因为$f(x)=\frac{x}{x-1}$在区间$\left[s,s+\frac{1}{6}\right]$上为减函数，故当$x\in\left[s,s+\frac{1}{6}\right]$，$f(x)\in\left[\frac{s+\frac{1}{6}}{s-\frac{5}{6}},\frac{s}{s-1}\right]$，因为$\frac{s}{s-1}<1$，而$t>1$，故此时$\left[\frac{s+\frac{1}{6}}{s-\frac{5}{6}},\frac{s}{s-1}\right]\subseteq\left[s,s+\frac{1}{6}\right]$，即$\begin{cases}\frac{s}{s-1}\le s+\frac{1}{6}\\ \frac{s+\frac{1}{6}}{s-\frac{5}{6}}\ge s\end{cases}$，因为$s<\frac{5}{6}$，故$\begin{cases}s\ge s^2-\frac{5}{6}s-\frac{1}{6}\\ s+\frac{1}{6}\le s^2-\frac{5}{6}s\end{cases}$即$\begin{cases}s^2-\frac{11}{6}s-\frac{1}{6}\le 0\\ s^2-\frac{11}{6}s-\frac{1}{6}\ge 0\end{cases}$，故$6s^2-11s-1=0$，解得$s=\frac{11\pm\sqrt{145}}{12}$，因为$s<\frac{5}{6}$，故$s=\frac{11-\sqrt{145}}{12}$.此时区间$\left[s,s+\frac{1}{6}\right]$在$x=1$左侧，$[t,t+1]$在$x=1$右侧.故当$x\in[t,t+1]$时，$f(x)\in\left[\frac{t+1}{t},\frac{t}{t-1}\right]$，因为$\frac{t+1}{t}>1$，故$\left[\frac{t+1}{t},\frac{t}{t-1}\right]\subseteq[t,t+1]$，所以$\begin{cases}\frac{t}{t-1}\le t+1\\ \frac{t+1}{t}\ge t\end{cases}$，此时$\begin{cases}t^2-t-1\ge 0\\ t^2-t-1\le 0\end{cases}$，故$t^2-t-1=0$，解得$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，因为$t>1$，故$t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；

②当 $s>1$ 时，$f\left(x\right)=1+\dfrac{1}{t-1}$ 在区间 $x\in\left[s,s+\dfrac{1}{6}\right]\cup[t,t+1]$ 上单调递减，易得

$f\left(x\right)\in\left[1+\dfrac{1}{t},1+\dfrac{1}{t-1}\right]\cup\left[1+\dfrac{1}{s-\frac{5}{6}},1+\dfrac{1}{s-1}\right]$，故此时 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{t}\ge s\\1+\dfrac{1}{t-1}\le s+\dfrac{1}{6}\end{cases}$ 且 $\begin{cases}1+\dfrac{1}{s-\frac{5}{6}}\ge t\\1+\dfrac{1}{s-1}\le t+1\end{cases}$，即 $\begin{cases}t\le\dfrac{1}{s-1}\\1+\dfrac{1}{s-\frac{5}{6}}\le t\end{cases}$ 且

$\begin{cases}1+\dfrac{1}{s-\frac{5}{6}}\ge t\\\dfrac{1}{s-1}\le t\end{cases}$，所以 $\begin{cases}t=\dfrac{1}{s-1}\\1+\dfrac{1}{s-\frac{5}{6}}=t\end{cases}$，故 $\begin{cases}s=\dfrac{1}{t}+1\\\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{5}{6}=s\end{cases}$，故 $\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{t}+1$，即 $\dfrac{1}{t-1}=\dfrac{t+6}{6t}$，$t^2-t-6=0$，因为 $t>1$，故 $t=3$；

综上所述，$t=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 3。故答案为：$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 3.

4.（2023·浙江·高二校联考开学考试）已知函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$，若函数 $y=\left|f\left(|x|\right)-t\right|$ 在 $\left[-1,2\right]$ 的最大值为 2，则实数 t 的值为______.

【答案】-1 或 2

【解析】由题意可得三个非负端点值 $y=\begin{cases}|\dfrac{1}{3}-t|,x=-1\\|1-t|,x=0\\|-t|,x=2\end{cases}$，分别令它们为最大值 2 求 t，再验证是否符合题设即可求 t 的值.

【详解】$f(x)=1-\dfrac{4}{x+2}$，由题意知：$y=\begin{cases}|\dfrac{4}{2-x}-1-t|,-1\le x<0\\|\dfrac{4}{x+2}-1-t|,0\le x\le 2\end{cases}$，

$\therefore x=-1$ 时，$y=|\dfrac{1}{3}-t|$；$x=0$ 时，$y=|1-t|$；$x=2$ 时，$y=|-t|$；

若 $y_{\max}=|\dfrac{1}{3}-t|=2$ 时，$t=\dfrac{7}{3}$ 或 $t=-\dfrac{5}{3}$，而 $t=\dfrac{7}{3}$ 有 $y=|-t|=\dfrac{7}{3}>2$，$t=-\dfrac{5}{3}$ 有 $y=|1-t|=\dfrac{8}{3}>2$，故与题设矛盾；

若 $y_{\max}=|1-t|=2$ 时，$t=-1$ 或 $t=3$，而 $t=3$ 有 $y=|-t|=3>2$，所以只有 $t=-1$ 时成立；

若 $y_{\max}=|-t|=2$ 时，$t=-2$ 或 $t=2$，而 $t=-2$ 有 $y=|1-t|=3>2$，所以只有 $t=2$ 时成立；

综上有：$t=-1$ 或 $t=2$，

故答案为：-1 或 2

题型三：三大补充函数：双曲函数（双刀函数）

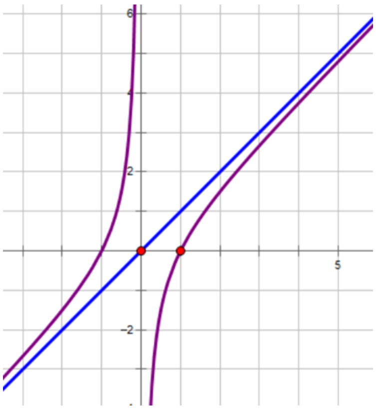
指 | 点 | 迷 | 津

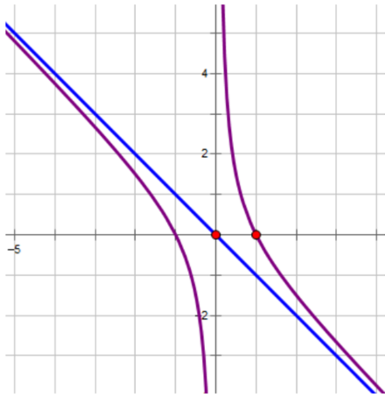
双刀函数

$y=ax-\dfrac{b}{x}$ （两支各自增），或者 $y=\dfrac{b}{x}-ax$ （两支各自减）$(a,b>0)$

1.有“渐近线”：y=ax 与 y=-ax

2. “零点”：解方程 $\mathrm{ax}=\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{x}}$ （即方程等 0 处）





1.（2023·江苏南通·高二统考期末）已知函数 $f(x)=2^{-x}-2^{x}$，则关于 x 的不等式 $f(\lg x)+f(1)>0$ 的解集是______.

【答案】$(0,\dfrac{1}{10})$

【分析】求出 $f(x)=2^{-x}-2^{x}$ 是奇函数，且在定义域上是单减函数，变形 $f(\lg x)>-f(1)=f(-1)$ 再利用单调性解不等式可得解.

【详解】Q $f(x)=2^{-x}-2^{x}$，$\therefore f(-x)=2^{x}-2^{-x}=-f(x)$

$\therefore f(x)=2^{-x}-2^{x}$ 是奇函数，又 $y=2^{-x}$ 是 R 上的减函数，$y=2^{x}$ 是 R 上的增函数，

由函数单调性质得 $f(x)=2^{-x}-2^{x}$ 是 R 上的减函数.

$f(\lg x)+f(1)>0$,则 $f(\lg x)>-f(1)$，由奇函数得 $f(-1)=-f(1)$

$\therefore f(\lg x)>f(-1)$ 且 $f(x)=2^{-x}-2^{x}$ 是 R 上的减函数. $\lg x<-1$ ，\ $x<\dfrac{1}{10}$ ，又 $x>0$

不等式 $f(\lg x)+f(1)>0$ 的解集是\ $(0,\dfrac{1}{10})$ 故答案为：$(0,\dfrac{1}{10})$

2.（2023 春·湖北·高二统考期末）已知奇函数 $f(x)=\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}+2tx(t>0)$，有三个零点，则 t 的取值范围为_____.

【答案】$(1,+\infty)$

【分析】由 $f(x)$ 为奇函数求出 a 的值，再利用导数研究函数和单调性和极值点，由 $f(x)$ 有三个零点，求 t 的取值范围.

【详解】若 $a=1$，$f(x)=2tx(t>0)$，函数没有三个零点，所以 $a\neq1$，

$f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)+f(-x)=0$，即 $\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^{x}+2tx+\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-x}-2tx=0$，

得 $\mathrm{e}^{ax}+\mathrm{e}^{-ax}=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$，

设 $g(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$，函数定义域为 R，$g(x)=g(-x)$，$g(x)$ 为偶函数，

$g'(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}$，$g'(x)$ 是 R 上的增函数，且 $g'(0)=0$，

则 $g'(x)<0$，解得 $x<0$；$g'(x)>0$，解得 $x>0$，

即 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$g(ax)=g(x)$，由 $a\neq1$，则有 $a=-1$，

所以 $f(x)=e^{-x}-e^{x}+2tx(t>0)$，$f'(x)=-e^{-x}-e^{x}+2t$，

由 $e^{-x}+e^{x}\geq2$，当且仅当 $x=0$ 时等号成立，则 $-e^{-x}-e^{x}\leq-2$，

若 $0<t\leq1$，则 $f'(x)=-e^{-x}-e^{x}+2t\leq0$，$f(x)$ 单调递减，没有三个零点；

若 $t>1$，令 $e^{x}=m$，则方程 $-\dfrac{1}{m}-m+2t=0$，即 $m^2-2tm+1=0$，

判别式 $\Delta=4t^2-4>0$，方程有两个不相等实数根，设两根为 m_1,m_2 且 $m_1<m_2$，则有 $m_1+m_2=2t>0$，$m_1m_2=1$，

所以 $0<m_1<m_2$，

令 $e^{x_1}=m_1$，$e^{x_2}=m_2$，由 $m_1m_2=1$，则 $x_1<0<x_2$ 且 $x_1=-x_2$，

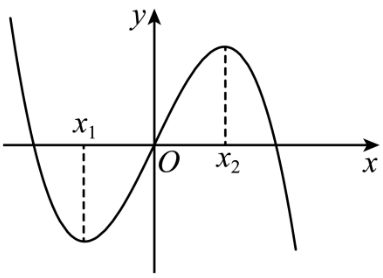
$f'(x)>0$，即 $-\dfrac{1}{m}-m+2t>0$，即 $m^2-2tm+1<0$，解得 $m_1<m<m_2$，得 $x_1<x<x_2$；

$f'(x)<0$，即 $-\dfrac{1}{m}-m+2t<0$，即 $m^2-2tm+1>0$，解得 $m<m_1$ 或 $m>m_2$，得 $x<x_1$ 或 $x>x_2$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增，由 $f(0)=0$，则有 $f(x_1)<0$，

$f(x_2)>0$，

由函数 $y=e^{x}$ 的单调性和递增速度可知，$x>0$ 时，存在 $f(x)<0$，$f(x)$ 的图像如图所示，



此时奇函数 $f(x)$ 有三个零点.综上可知，t 的取值范围为 $(1,+\infty)$.故答案为：$(1,+\infty)$

3.（2023 春·辽宁铁岭·高二校联考期末）已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}+3\sin x+2$ 若 $f(a)=1$，则 $f(-a)=$______.

【答案】3

【分析】利用 $f(x)+f(-x)=4$，求得 $f(-a)$ 的值.

【详解】根据题意，函数 $f(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}+3\sin x+2$，则 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}-3\sin x+2$，则 $f(x)+f(-x)=4$，

故有 $f(a)+f(-a)=4$，又由 $f(a)=1$，则 $f(-a)=3$，故答案为：3.

4...2023 春·上海黄浦·高三上海市大同中学校考）已知函数 $f(x)=2022^{x-3}+(x-3)^3-2022^{3-x}+2x$，则不等式 $f(x^2-4)+f(2-3x)\leq12$ 的解集为______.

【答案】$\left[\dfrac{3-\sqrt{41}}{2},\dfrac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$

【分析】令 $g(x)=2022^{x}-2022^{-x}+x^3+2x$，分析函数 $g(x)$ 的定义域、奇偶性与单调性，将所求不等式变形为 $g(x^2-7)\leq g(3x+1)$，结合函数 $g(x)$ 的单调性可得出关于 x 的不等式，解之即可.

【详解】设 $g(x)=2022^{x}-2022^{-x}+x^3+2x$，则函数 $g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$，

因为 $g(-x)=2022^{-x}-2022^{x}+(-x)^3-2x=-(2022^{x}-2022^{-x}+x^3+2x)=-g(x)$，故函数 $g(x)$ 为奇函数，

因为函数 $y=2022^{x}$、$y=-2022^{-x}$、$y=x^3$、$y=2x$ 均为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

故函数 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，

因为 $f(x)=2022^{x-3}-2022^{3-x}+(x-3)^3+2(x-3)+6=g(x-3)+6$，

由 $f(x^2-4)+f(2-3x)\le 12$ 可得 $g(x^2-4-3)+g(2-3x-3)+12\le 12$，

可得 $g(x^2-7)\le -g(-1-3x)=g(3x+1)$，

所以，$x^2-7\le 3x+1$，即 $x^2-3x-8\le 0$，解得 $\frac{3-\sqrt{41}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{41}}{2}$.

因此，不等式 $f(x^2-4)+f(2-3x)\le 12$ 的解集为 $\left[\frac{3-\sqrt{41}}{2},\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$.

故答案为：$\left[\frac{3-\sqrt{41}}{2},\frac{3+\sqrt{41}}{2}\right]$.

题型四：一元三次函数

指 | 点 | 迷 | 津

一元三次函数：

所有的三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne 0)$ 都有“拐点”，且该“拐点”也是函数 $y=f(x)$ 的图像的对称中心，设 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称点 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne 0)$ 的“拐点”.

1.. 给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是函数 $y=f'(x)$ 的导函数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 $x=x_0$，则称 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”．经研究发现所有的三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\ne 0)$ 都有“拐点”，且该“拐点”也是函数 $y=f(x)$ 的图像的对称中心．若函数 $f(x)=x^3-3x^2$，则 $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{4042}{2022}\right)+f\left(\frac{4043}{2022}\right)=$（　）

A．-8086　　B．-8082　　C．8084　　D．8088

【答案】A

【分析】利用题中给出的定义，得到 $f(x)$ 的拐点为 $(1,-2)$，从而得到 $f(x)$ 的对称中心为 $(1,-2)$，即 $f(2-x)+f(x)=-4$，由此分析计算即可．

【详解】解：因为函数 $f(x)=x^3-3x^2$，则 $f'(x)=3x^2-6x$，$f''(x)=6x-6$，

令 $f''(x)=0$，解得 $x=1$，且 $f(1)=-2$，由题意可知，$f(x)$ 的拐点为 $(1,-2)$，故 $f(x)$ 的对称中心为 $(1,-2)$，

所以 $f(2-x)+f(x)=-4$，

所以 $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{4042}{2021}\right)+f\left(\frac{4043}{2022}\right)=-4\times\frac{4043}{2}=-8086$．故选：A．

2.已知函数 $f(x)=ax^3+3x^2+1$，若至少存在两个实数 m，使得 $f(-m)$，$f(1)$，$f(m+2)$ 成等差数列，则过坐标原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线可以作（　）

A. 3 条　　B. 2 条　　C. 1 条　　D. 0 条

【答案】B　【解析】至少存在两个实数 m，使得 $f(-m)$，$f(1)$，$f(m+2)$ 成等差数列，

可得 $f(-m)+f(2+m)=2f(1)=2(a+4)$，即有 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,a+4)$ 对称，$f(x)$ 的导数为 $f'(x)=3ax^2+6x$，

$f''(x)=6ax+6$，由 $f''(x)=0$，可得 $x=-\frac{1}{a}$，由 $f\left(-\frac{1}{a}+x\right)+f\left(-\frac{1}{a}-x\right)$ 为常数，可得 $-\frac{1}{a}=1$，解得 $a=-1$.

即有 $f(x)=-x^3+3x^2+1$，$f'(x)=-3x^2+6x$，设切点为 $(t,-t^3+3t^2+1)$，可得切线的斜率为 $-3t^2+6t=\frac{-t^3+3t^2+1}{t}$，化为 $2t^3-3t^2+1=0$，设 $g(t)=2t^3-3t^2+1$，$g'(t)=6t^2-6t$，

当 $0<t<1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 递减；当 $t>1$ 或 $t<0$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 递增.
可得 $g(t)$ 在 $t=0$ 处取得极大值，且为 $1>0$；在 $t=1$ 处取得极小值，且为 0.
可知 $2t^3-3t^2+1=0$ 有两解，即过坐标原点作曲线 $y=f(x)$ 的切线可以作 2 条.

3.（多选）（全国名校大联考 2022-2023 学年高三上学期第三次联考数学试卷）对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$，给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”.某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心.若函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-12x+\frac{49}{6}$，则下列说法正确的是（　）

A．$f(x)$ 的极大值点为 $\left(-2,\frac{137}{6}\right)$

B．$f(x)$ 有且仅有 3 个零点

C．点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 是 $f(x)$ 的对称中心

D．$f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right)=4042$

【答案】BCD

【分析】求出 $f'(x)=2x^2-2x-12$，得到函数的单调区间，即可求得极值，要注意极值点是一个数，可判断 A 项；根据极大值、极小值的正负，可得到函数零点的个数，即判断 B 项；根据 $f''(x)=0$ 的解的情况，可判断 C 项；由对称中心可推得 $f(x)+f(1-x)=4$，用倒序相加法即可求得式子的和，判断 D 项.

【详解】由题意知 $f'(x)=2x^2-2x-12$.

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>3$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增；

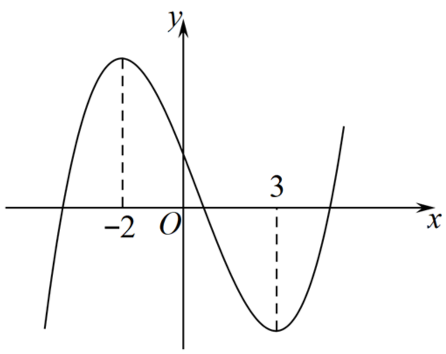
令 $f'(x)<0$，解得 $-2<x<3$，所以在 $(-2,3)$ 上单调递减.

又 $f(-2)=\frac{2}{3}\times(-2)^3-(-2)^2-12\times(-2)+\frac{49}{6}=\frac{137}{6}$，$f(3)=\frac{2}{3}\times 3^3-3^2-12\times 3+\frac{49}{6}=-\frac{113}{6}$.

所以，$f(x)$ 在 $x=-2$ 处有极大值 $f(-2)=\frac{137}{6}$，在 $x=3$ 处有极小值 $f(3)=-\frac{113}{6}$.

所以 $f(x)$ 的极大值点为-2，A 项错误；

又极大值 $f(-2)=\frac{137}{6}>0$，极小值 $f(3)=-\frac{113}{6}<0$，作出 $f(x)$ 的图象，



有图象可知，$f(x)$ 有且仅有 3 个零点，故 B 正确；

$f''(x)=4x-2$，令 $f''(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^2-12\times\frac{1}{2}+\frac{49}{6}=2$，由题意可知，点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 是 $f(x)$ 的对称中心，故 C 正确；

因为点$\left(\frac{1}{2},2\right)$是$f(x)$的对称中心，所以有$f\left(\frac{1}{2}-x\right)+f\left(\frac{1}{2}+x\right)=4$，即$f(x)+f(1-x)=4$.

令$S=f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right)$，

又$S=f\left(\frac{2021}{2022}\right)+f\left(\frac{2020}{2022}\right)+f\left(\frac{2019}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2022}\right)$，

所以$2S=\left[f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{2020}{2022}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2021}{2022}\right)+f\left(\frac{1}{2022}\right)\right]$

$=2021\times 4=8084$，，所以$S=4042$.故 D 正确.

故选：BCD.

4. （多选）（江苏省苏州市常熟市 2022-2023 学年高三上学期 12 月抽测二数学试题）对于三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\neq 0)$,给出定义:设$f'(x)$是函数$y=f(x)$的导数,$f''(x)$是$f'(x)$的导数,若方程$f''(x)=0$有实数解$x_0$,则称点$(x_0,f(x_0))$为函数的"拐点".经过探究发现:任何一个三次函数都有"拐点",任何一个三次函数都有对称中心,且"拐点"就是对称中心.设函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-a$,则以下说法正确的是（　　）

A．$f(x)+f(2-x)=-\frac{4}{3}$

B．当$a<0$时,$f(x)$有三个零点

C．$f(-2019)+f(-2020)+f(2021)+f(2022)=4$

D．当$f(x)$有两个极值点x_1,x_2时,过$A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$的直线必过点$\left(1,-\frac{4}{3}\right)$

【答案】AB

【分析】根据题意令$f(x)$二次导数为零即可求出拐点,即对称中心,即可得选项 A 的正误,先讨论$x=1$时是否为零点,然后进行全分离,设新函数求导求单调性,求特殊值,画函数图象即可判断选项 B 的正误,根据选项 A,将$x=2022,x=2021$代入再相加即可得选项 C 的正误,两点在一条直线上,则中点也在直线上,根据x_1,x_2为极值点,令$f(x)$导函数为 0,用韦达定理即可得$x_1+x_2=2$,根据选项 A,可得$f(x_1)+f(x_2)=-\frac{4}{3}$,即可求出$A,B$中点坐标,即可判断选项 D 的正误.

【详解】解:由题知$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-a$,

关于选项 A:

$\because f'(x)=x^2-2x+a,\therefore f''(x)=2x-2$,令$f''(x)=0$可得$x=1$,$\therefore$ $f(x)$的拐点为$(1,f(1))$,$\because f(1)=-\frac{2}{3}$,

$\therefore$ $f(x)$对称中心为$\left(1,-\frac{2}{3}\right)$,即$f(x)+f(2-x)=-\frac{4}{3}$成立,-故选项 A 正确;

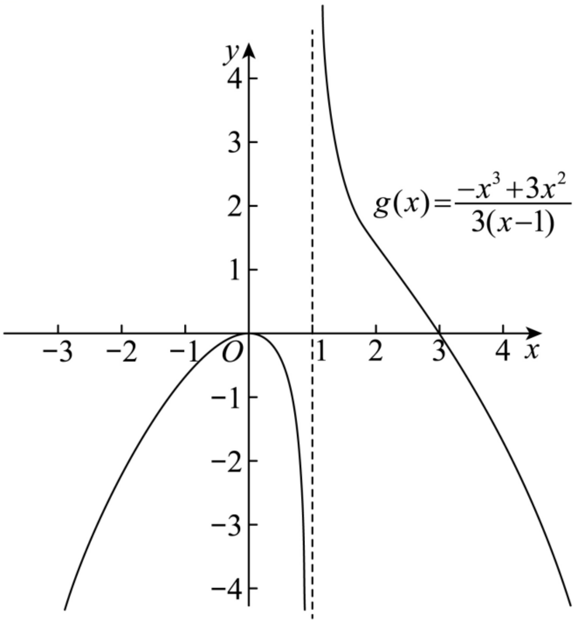
关于选项 B:

当$x=1$时,$f(x)=-\frac{2}{3}$,$\therefore x=0$不是$f(x)$的零点,令$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-a=0$,即$a=\frac{-x^3+3x^2}{3(x-1)}$有三个根,

令$g(x)=\frac{-x^3+3x^2}{3(x-1)}$,$\because g'(x)=\frac{3(-3x^2+6x)(x-1)-3(-x^3+3x^2)}{3(x-1)^2}=\frac{-2x\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)}{(x-1)^2}$,

$\therefore x\in(-\infty,0)$时,$g(x)$单调递增,$x\in(0,1)$时,$g(x)$单调递减,$x\in(1,+\infty)$时,$g(x)$单调递减,

$g(0)=0$,$\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^3+3x^2}{3(x-1)}=-\infty$,$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{-x^3+3x^2}{3(x-1)}=+\infty$,$g(3)=0$,$\therefore$画$g(x)$图象如下:



由图可知: $a<0$ 时, $y=a$ 与 $y=g(x)$ 有三个交点,

即 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax-a=0$ 有三个零点,故选项 B 正确;

关于选项 C:

由选项 A 可知: $f(x)+f(2-x)=-\frac{4}{3}$, $\therefore f(2022)+f(-2020)=-\frac{4}{3}$, $f(2021)+f(-2019)=-\frac{4}{3}$,

两式相加可得 $f(-2019)+f(-2020)+f(2021)+f(2022)=-\frac{8}{3}$,故选项 C 错误;

关于选项 D:

由于 $f(x)$ 有两个极值点 x_1,x_2 $\therefore f'(x)=x^2-2x+a=0$ 有两根 x_1,x_2, $\therefore \begin{cases}\Delta=4-4a>0\\ x_1+x_2=2\\ x_1\cdot x_2=a\end{cases}$,

由于直线过 $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$,则直线一定过 A,B 中点,

由选项 A 知 $f(x)+f(2-x)=-\frac{4}{3}$,且有 $x_1+x_2=2$, $\therefore f(x_1)+f(x_2)=f(2-x_2)+f(x_2)=-\frac{4}{3}$

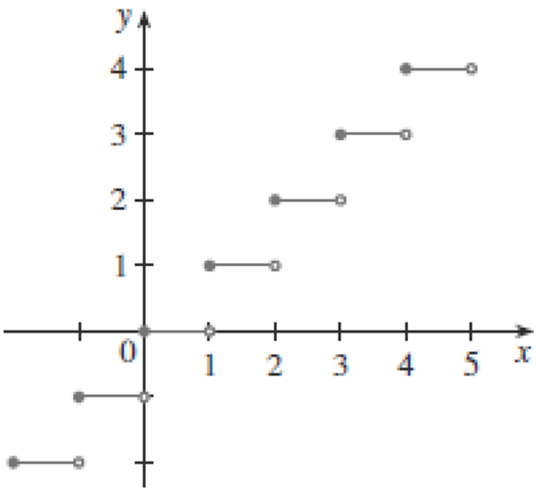
$\therefore A,B$ 中点坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)=\left(1,-\frac{2}{3}\right)$,则直线一定过 $\left(1,-\frac{2}{3}\right)$,故选项 D 错误.

故选:AB

题型五：高斯取整函数

指丨点丨迷丨津

取整函数 $y=[x],[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，又叫做“高斯函数”，



1.（黑龙江省大庆市铁人中学 2022-2023 学年高三月考数学试题）**符号** $[x]$ **表示不超过** x **的最大整数，如** $[2,3]=2$，$[\pi]=3$，$[-2,1]=-3$，**定义函数** $f(x)=x-[x]$ **则下列说法正确的个数是（　　）**

①函数 $f(x)$ **的定义域为** ***R***

②函数 $f(x)$ **的值域为** $[0,1]$

③函数 $f(x)$ **是增函数**

④函数 $f(x)$ **是奇函数**

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

【答案】A

【分析】

根据题中定义、增函数的性质、奇函数的性质，结合特例法进行判断即可.

【详解】

①：函数 $f(x)=x-[x]$ 的定义域为全体实数，故本说法正确；

②：因为 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，所以 $f(x)=x-[x]<1$，因此本说法不正确；

③：因为 $f(0)=0-[0]=0, f(1)=1-[1]=0$，显然函数在整个实数集上不是增函数，所以本说法不正确；

④：因为 $f(-2.1)=-2.1-[-2.1]=-2.1-(-3)=0.9$，$f(2.1)=2.1-[2.1]=2.1-2=0.1$，

所以 $f(-2.1)+f(2.1)\neq 0$，因此本函数不是奇函数，所以本说法不正确，

故选：A

2.（广东省广州市第四中学 2021-2022 学年高三上学期月考数学试题）**高斯（1777-1855）是德国著名数学家，物理学家，天文学家，大地测量学家，近代数学奠基者之一，并享有“数学王子”之称，高斯一生的数学成就很多，其中：设** $x\in\mathbf{R}$，**用** $[x]$ **表示不超过** x **的最大整数，则** $y=[x]$ **称为高斯函数，例如：**$[2.3]=2$，$[-2.1]=-3$，**已知函数** $f(x)=2x^2-x-2$，$x\in(0,2)$，**设函数** $y=[f(x)]$ **的值域为集合** D，**则** D **中所有负整数元素个数为（　　）**

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【答案】B

【分析】

根据二次函数的性质求出函数的值域，然后再进行判断即可.

【详解】

函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=\frac{1}{4}$，当 $x\in(0,2)$ 时，易知 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{17}{8}$，$f(x)\in\left[-\frac{17}{8},4\right)$，所以 $y=[f(x)]$ 的值域 $D=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，故其值域中所有负整数元素为 -1，-2，-3，个数为 3.

故选：B.

3.（百师联盟 2020-2021 学年高三上学期一轮复习联考（四）全国卷 I 理科数学试题）**高斯 $(1777-1855)$ 是德国著名数学家，物理学家，天文学家，大地测量学家，近代数学奠基者之一.高斯被认为是历史上最重要的数学家之一，并享有“数学王子”之称，用其名字命名的高斯函数为：设 $x\in R$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $y=[x]$ 称为高斯函数，例如：$[2.3]=2,[-2.1]=-3$，已知函数 $f(x)=2x^2-x-2,x\in(0,2)$.设函数 $y=[f(x)]$ 的值域为集合 D，则 D 中所有正整数元素个数为（　　）**

A. 3　　　　**B.** 4　　　　**C.** 5　　　　**D.** 6

【答案】A

【分析】

先求解出二次函数 $f(x)=2x^2-x-2,x\in(0,2)$ 的值域，然后根据高斯函数的定义确定出集合 D，从而 D 中所有正整数元素个数可知.

【详解】

函数 $f(x)$ 图象的对称轴为 $x=\frac{1}{4}$，

当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{17}{8}$，$f(2)=8-2-2=4$，

所以 $f(x)\in\left[-\frac{17}{8},4\right)$，

所以 $y=[f(x)]$ 的值域 $D=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，

故其值域中所有正整数元素为 $1,2,3$ 个数为 3，

故选：A.

4.**高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的称号.设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，$y=[x]$ 也被称为“高斯函数”，例如：$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$.已知函数 $f(x)=[x+1]-x$，下列说法中正确的是（　　）**

A. $f(x)$ 是周期函数　　　　**B.** $f(x)$ 的值域是 $[0,1]$

C. $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是减函数　　　　**D.** $\forall x\in\mathbf{R}$，$[f(x)]=0$

【答案】AC

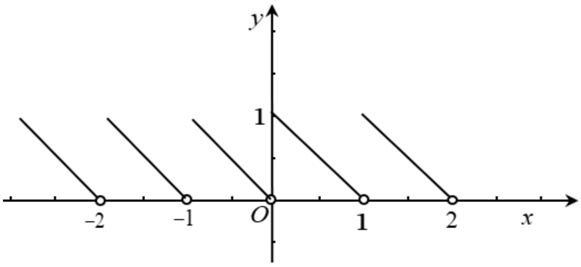
【分析】

根据 $[x]$ 定义将函数 $f(x)$ 写成分段函数的形式，再画出函数的图象，根据图象判断函数的性质.

【详解】

由题意可知 $[x+1]=\begin{cases}-1,-2\le x<-1\\0,-1\le x<0\\1,0\le x<1\\2,1\le x<2\\\cdots\end{cases}$，$\therefore f(x)=[x+1]-x=\begin{cases}-1-x,-2\le x<-1\\-x,-1\le x<0\\1-x,0\le x<1\\2-x,1\le x<2\\\cdots\end{cases}$，

可画出函数图像，如图：

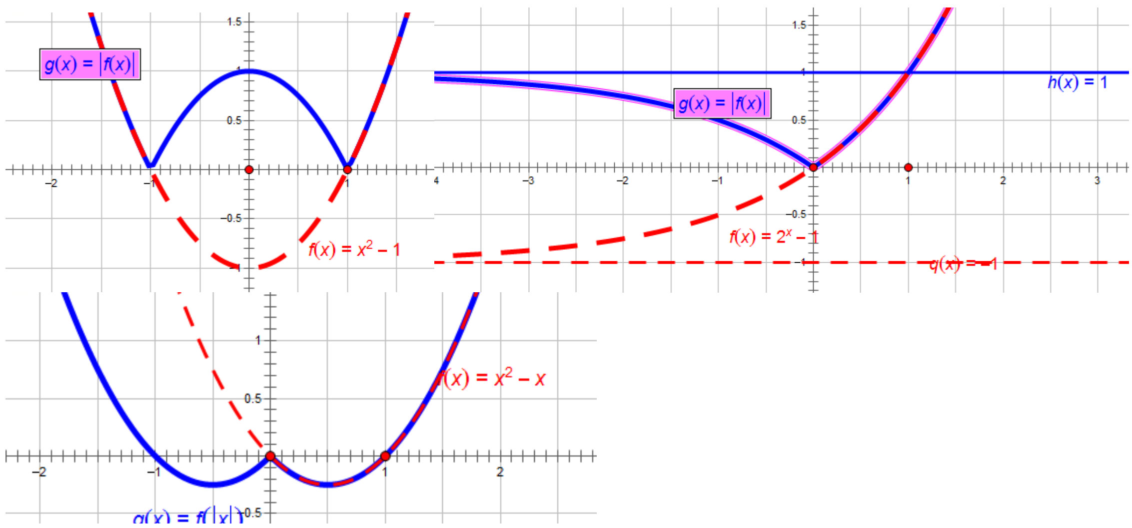


可得到函数 $f(x)$ 是周期为 1 的函数，且值域为 $(0,1]$，在 $(0,1)$ 上单调递减，故选项 AC 正确，B 错误；对于 D，取 $x=-1$　$f(-1)=1$，则 $[f(-1)]=1$，故 D 错误.
故选：AC.

题型六：绝对值函数

指 | 点 | 迷 | 津

绝对值函数：
（1）分类讨论去掉绝对值；（2）大部分绝对值函数，可以遵循翻折变换
翻折变换：x轴翻折，　y轴翻折，y=x翻折
1、f（x）⇒|f（x）|　　x轴翻折：x轴下方（负的）翻上去
2、f（x）⇒f（|x|）　　y轴翻折：y轴左侧擦除。右侧翻到左侧，成为偶函数



1.（2023春·湖南长沙·高二长沙一中校考阶段练习）定义 $\|x\|(x\in\mathbf{R})$ 为与 x 距离最近的整数，令函数 $F(x)=\|x\|$，如：$F\left(\frac{4}{3}\right)=1, F\left(\sqrt{2}\right)=1$，则 $\frac{1}{F(1)}+\frac{1}{F\left(\sqrt{2}\right)}+\frac{1}{F\left(\sqrt{3}\right)}+\frac{1}{F(2)}\cdots+\frac{1}{F\left(\sqrt{99}\right)}+\frac{1}{F(10)}=$ ________.

【答案】19

【分析】令 $F\left(\sqrt{x}\right)=k, k\in\mathbf{N}^*$，则 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<k+\frac{1}{2}$，即 $k^2-k+\frac{1}{4}<x<k^2+k+\frac{1}{4}$，所以 $k^2-k+1\le x\le k^2+k$，满足此不等式的正整数 x 的个数有 $k^2+k-\left(k^2-k+1\right)+1=2k$，即 $F\left(\sqrt{x}\right)=k, k\in\mathbf{N}^*$ 共有 $2k$ 个数，由此求解即可得出答案.

【详解】令 $F\left(\sqrt{x}\right)=k, k\in\mathbf{N}^*$，则 $k-\frac{1}{2}<\sqrt{x}<k+\frac{1}{2}$，即 $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2<x<\left(k+\frac{1}{2}\right)^2$，即 $k^2-k+\frac{1}{4}<x<k^2+k+\frac{1}{4}$，

所以 $k^2-k+1\le x\le k^2+k$，满足此不等式的正整数 x 的个数有 $k^2+k-\left(k^2-k+1\right)+1=2k$，

即 $F\left(\sqrt{x}\right)=k,k\in\mathbf{N}^{*}$ 共有 $2k$ 个数；

$k=1$ 时则有 2 个，即 $F(1)=1,F\left(\sqrt{2}\right)=1$；

$k=2$ 时则有 4 个，即 $F\left(\sqrt{3}\right)=2,F\left(\sqrt{4}\right)=2,F\left(\sqrt{5}\right)=2,F\left(\sqrt{6}\right)=2$；

$k=3$ 时则有 6 个，即 $F\left(\sqrt{7}\right)=3,F\left(\sqrt{8}\right)=3,F\left(\sqrt{9}\right)=3,F\left(\sqrt{10}\right)=3,F\left(\sqrt{11}\right)=3,F\left(\sqrt{12}\right)=3$；

$k=9$ 时则有 18 个，即 $F\left(\sqrt{73}\right)=9,F\left(\sqrt{74}\right)=9,\cdots\ F\left(\sqrt{90}\right)=9$，（其中 $8.5^2=72.25,9.5^2=90.25$）；

又 $9.5^2=90.25$，所以 $F\left(\sqrt{91}\right)=10,F\left(\sqrt{92}\right)=10,\cdots,F\left(\sqrt{100}\right)=10$，

其中 $91:100$ 共有 10 个数；

所以 $\dfrac{1}{F(1)}+\dfrac{1}{F\left(\sqrt{2}\right)}+\dfrac{1}{F\left(\sqrt{3}\right)}+\dfrac{1}{F(2)}+\cdots+\dfrac{1}{F\left(\sqrt{99}\right)}+\dfrac{1}{F(10)}$

$=2\times\dfrac{1}{1}+4\times\dfrac{1}{2}+6\times\dfrac{1}{3}+\cdots+18\times\dfrac{1}{9}+10\times\dfrac{1}{10}=19$.

故答案为：19.

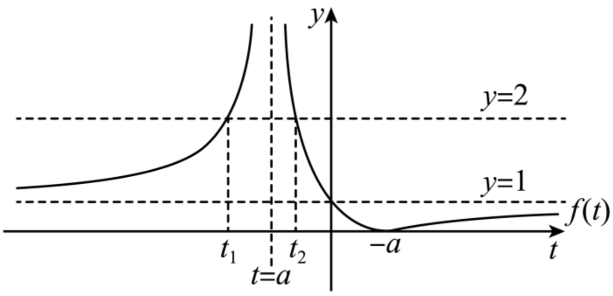
2.（2023·天津和平·统考三模）已知函数 $f(x)=\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|(x\neq a)$，若关于 x 的方程 $f\left(f(x)\right)=2$ 恰有三个不相等的实数解，则实数 a 的取值集合为_________.

【答案】$\left\{\dfrac{1}{3},3\right\}$

【分析】分类讨论 a 的不同取值，并作出 $f(x)$ 的图象，利用数形结合的思想，结合函数图象确定两个函数图象的交点的个数即可求解.

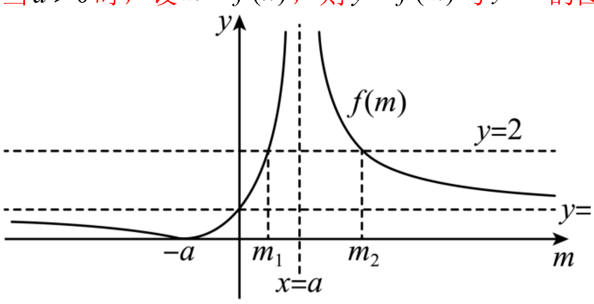
【详解】$f(x)=\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right|=\left|1+\dfrac{2a}{x-a}\right|(x\neq a)$，当 $a=0$ 时，$f(x)=1(x\neq 0)$，此时 $f\left(f(x)\right)=2$ 无解，不满足题意；

当 $a<0$ 时，设 $t=f(x)$，则 $y=f(t)$ 与 $y=2$ 的图象大致如下，



则 $f(t)=2$ 对应的 2 个根为 $t_1<a<t_2<0$，此时方程 $f(x)=t_1,f(x)=t_2$ 均无解，即方程 $f\left(f(x)\right)=2$ 无解，不满足题意；

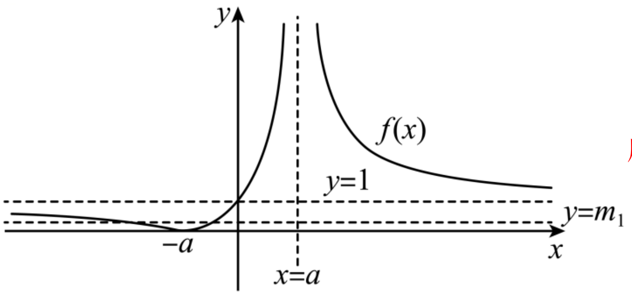
当 $a>0$ 时，设 $m=f(x)$，则 $y=f(m)$ 与 $y=2$ 的图象大致如下，



则则 $f(m)=2$ 对应的 2 个根为 $0<m_1<a<m_2$，若方程 $f\left(f(x)\right)=2$ 恰有三个不相等的实数解，

则 $y=m_1,y=m_2$ 与函数 $y=f(x)$ 的图象共有 3 个不同的交点，

① 当 $0<a<1$ 时，$y=m_1$ 与函数 $f(x)$ 的图象共有 2 个交点，如图所示，

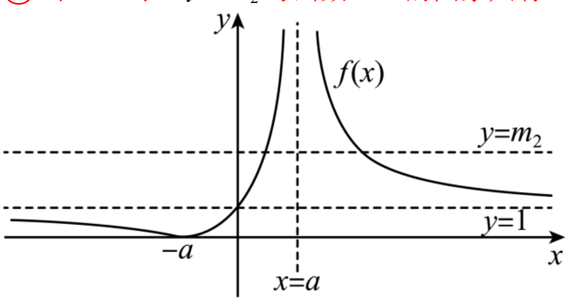


所以 $y=m_2$ 与函数 $f(x)$ 的图象只有 1 个交点，

则 $m_2=1$，所以 $\left|\dfrac{1+a}{1-a}\right|=2$，解得 $a=\dfrac{1}{3}$；②当 $a=1$ 时，$y=m_1$ 与函数 $f(x)$ 的图象共有 2 个交点，

所以 $y=m_2$ 与函数 $f(x)$ 的图象只有 1 个交点，则 $m_2=1$，与 $m_2>a$ 矛盾，不合题意；

③当 $a>1$ 时，$y=m_2$ 与函数 $f(x)$ 的图象共有 2 个交点，如图所示，



所以 $y=m_1$ 与函数 $f(x)$ 的图象只有 1 个交点，则 $m_1=1$，所以 $\left|\dfrac{1+a}{1-a}\right|=2$，解得 $a=3$；

综上，a 的取值集合为 $\left\{\dfrac{1}{3},3\right\}$，故答案为: $\left\{\dfrac{1}{3},3\right\}$.

3.（2022·浙江·高三模拟）已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{2-|x|}(x\in(-2,2))$，有下列结论：

①$\forall x\in(-2,2)$，等式 $f(-x)+f(x)=0$ 恒成立；

②$\forall m\in[0,+\infty)$，方程 $|f(x)|=m$ 有两个不等实根；

③$\forall x_1$、$x_2\in(-2,2)$，若 $x_1\neq x_2$，则一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

④存在无数多个实数 k，使得方程 $f(x)=kx$ 在 $(-2,2)$ 上有三个不同的实数根.

则其中正确结论序号为__________.

【答案】①③④

【分析】①根据函数表达式计算判断；②举反例判断；③根据函数单调性判断；④用数形结合法判断.

【详解】已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{2-|x|}(x\in(-2,2))$，有下列结论：

对于①，因为 $\forall x\in(-2,2)$，$f(-x)+f(x)=\dfrac{-x}{2-|-x|}+\dfrac{x}{2-|x|}=\dfrac{-x}{2-|x|}+\dfrac{x}{2-|x|}=0$，所以①对；

对于②，因为当 $m=0\in[0,+\infty)$ 时，方程 $|f(x)|=0$，只有一个实根 $x=0$，所以②错；

对于③，因为当 $x\in(-2,0]$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{x+2}=1-\dfrac{2}{x+2}$，单调递增，

当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=\dfrac{x}{2-x}=-1-\dfrac{2}{x-2}$，单调递增，

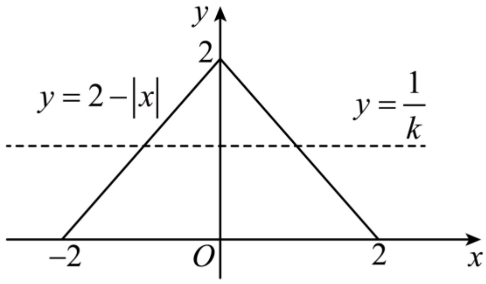
所以 $f(x)$ 在 $(-2,2)$ 上单调递增，

所以 $\forall x_1$、$x_2\in(-2,2)$，若 $x_1\neq x_2$，则一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，所以③对；

对于④，方程 $f(x)=kx$ 在 $(-2,2)$ 上有三个不同的实数根，

即方程 $\dfrac{x}{2-|x|}=kx$ 在 $(-2,2)$ 上有三个不同的实数根，

因为 $x=0$ 必为一根，只要方程 $\dfrac{1}{2-|x|}=k$ 有两个不同的实数根，即只要 $2-|x|=\dfrac{1}{k}$ 有两个不同的实数根，



由函数图像知 $\dfrac{1}{k}\in(0,2)$，即 $k\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ ，所以④对.

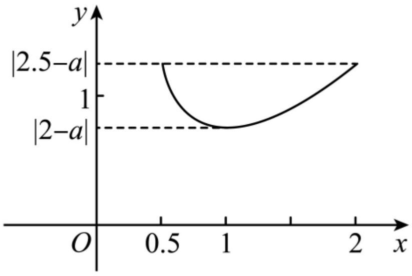
故答案为：①③④.

4.（2023春·上海松江·高三上海市松江一中校考阶段练习）已知 $f(x)=\left|x+\dfrac{1}{x}-a\right|(a\in R)$，若存在 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n\in[\dfrac{1}{2},2]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})=f(x_n)$ 成立的最大正整数 n 为6，则 a 的取值范围为_______.

【答案】$[\dfrac{15}{8},\dfrac{19}{10})\cup(\dfrac{13}{5},\dfrac{21}{8}]$

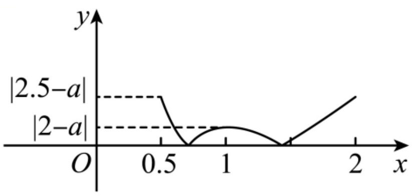
【分析】由题意得 $\begin{cases}5f(x)_{\min}\le f(x)_{\max}\\6f(x)_{\min}>f(x)_{\max}\end{cases}$ ，分类讨论作出函数图象，求得最值解不等式组即可.

【详解】原问题等价于 $\begin{cases}5f(x)_{\min}\le f(x)_{\max}\\6f(x)_{\min}>f(x)_{\max}\end{cases}$ ，当 $a<2$ 时，函数图象如图



此时 $f(x)_{\min}=2-a$，$f(x)_{\max}=\dfrac{5}{2}-a$ ，则 $\begin{cases}5(2-a)\le\dfrac{5}{2}-a\\6(2-a)>\dfrac{5}{2}-a\end{cases}$ ，解得：$\dfrac{15}{8}\le a<\dfrac{19}{10}$；

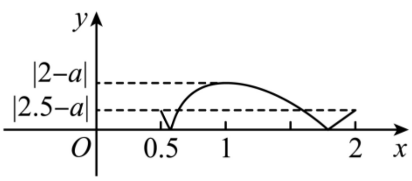
当 $2\le a<\dfrac{9}{4}$ 时，函数图象如图



此时 $f(x)_{\min}=0$，$f(x)_{\max}=\dfrac{5}{2}-a$，

则 $\begin{cases}5\times0\le\dfrac{5}{2}-a\\6\times0>\dfrac{5}{2}-a\end{cases}$ ，解得：$a\in\varnothing$；

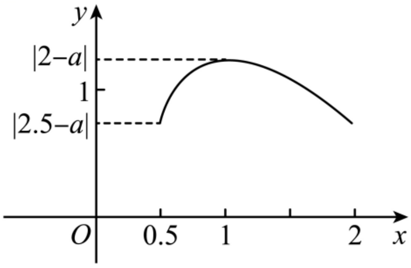
当 $\dfrac{9}{4}\le a<\dfrac{5}{2}$ 时，函数图象如图



此时 $f(x)_{\min}=0$，$f(x)_{\max}=a-2$，

则$\begin{cases}5\times 0\le a-2\\6\times 0>a-2\end{cases}$，解得：$a\in\varnothing$；

当$a\ge\dfrac{5}{2}$时，函数图象如图



此时$f\left(x\right)_{\min}=a-\dfrac{5}{2}$，$f\left(x\right)_{\max}=a-2$，

则$\begin{cases}5\left(a-\dfrac{5}{2}\right)\le a-2\\6\left(a-\dfrac{5}{2}\right)>a-2\end{cases}$，解得：$\dfrac{13}{5}<a\le\dfrac{21}{8}$；综上，满足条件$a$的取值范围为$[\dfrac{15}{8},\dfrac{19}{10})\cup(\dfrac{13}{5},\dfrac{21}{8}]$.

故答案为：$[\dfrac{15}{8},\dfrac{19}{10})\cup(\dfrac{13}{5},\dfrac{21}{8}]$

题型七：对数绝对值型

指｜点｜迷｜津

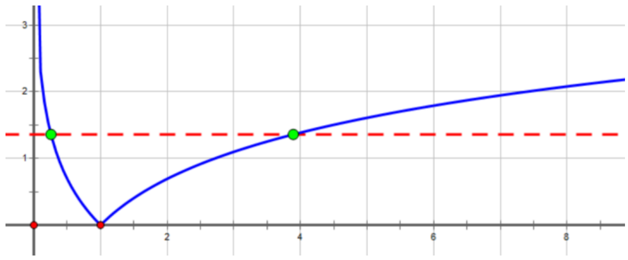
对数绝对值型函数

对于f（x）=$|\log_a x|$，$|\log_a x|=a$ **若有两个零点，则满足**

1. $0<x_1<1<x_2$

2. $x_1x_2=1$

3.要注意上述结论在对称轴作用下的“变与不变”



1.（2022·吉林白山·抚松县第一中学校考二模）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}\left|x+1\right|,x\le 0\\\left|\log_4 x\right|,x>0\end{cases}$，若方程$f\left(x\right)=k$有4个不同的根$x_1$，$x_2$，$x_3$，$x_4$，且$x_1<x_2<x_3<x_4$，则$\dfrac{4}{x_3x_4^2}-x_4\left(x_1+x_2\right)$的取值范围是（　）

A．$\left[4\sqrt{2},6\right)$　　B．$\left[2,4\sqrt{2}\right)$　　C．$\left(2,4\sqrt{2}\right]$　　D．$\left[4\sqrt{2},9\right]$

【答案】D

【分析】作出函数$y=f(x)$与$y=k$的图像，得到x_1,x_2关于$x=-1$对称，$x_3x_4=1$化简条件，利用对勾函数的性质可求解.

【详解】作函数$y=f(x)$与$y=k$的图像如下：