【复试】2024年广西师范大学025200应用统计《复试:概率论与数理统计》考研复试仿真模拟5套卷

主编：掌心博阅电子书

青岛掌心博阅电子书 出品

特别说明

本书严格按照该科目考研复试最新题型、试题数量和复试考试难度出题，结合学长历年考研复试经验，整理编写了五套复试仿真模拟试题及答案解析并由学长严格审核校对。其内容涵盖了这一复试科目常出试题及重点试题，针对性强，是复试备考复习的重要资料。

版权声明

目录

【复试】2024 年广西师范大学 025200 应用统计《复试:概率论与数理统计》考研复试仿真模拟 5 套卷（一）

一、选择题

1. **设 A，B 为两个事件，且$A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$，则$(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})$表示__________.**

A.必然事件

B.不可能事件

C.A 与 B 不能同时发生

D.A 与 B 中恰有一个发生

【答案】D

【解析】$(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B}) = A\bar{A} \cup A\bar{B} \cup B\bar{A} \cup B\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{A}$，故选 D.

2. **设二维随机变量(X，Y)服从二维正态分布，则随机变量$\xi = X+Y$与$\eta = X-Y$不相关的充分必要条件为__________**

A.E(X)=E(Y)

B. $E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

C. $E(X^2) = E(Y^2)$

D. $E(X^2) + [E(X)]^2 = E(Y^2) + [E(Y)]^2$

【答案】B

【解析】由题设，ξ与η不相关，则$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = 0$，由协方差的定义，有

$$\begin{aligned}
&E\{[\xi - E(\xi)][\eta - E(\eta)]\}\\
&= E\{[X+Y-E(X+Y)][X-Y-E(X-Y)]\}\\
&= E\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))][(X-E(X))-(Y-E(Y))]\}\\
&= E[(X-E(X))^2-(Y-E(Y))^2]\\
&= E(X-E(X))^2 - E(Y-E(Y))^2\\
&= D(X) - D(Y) = 0,
\end{aligned}$$

因此$E(X^2) - [E(X)]^2 = E(Y^2) - [E(Y)]^2$，选 B

3. **设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布分别为**

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则$P\{X+Y=2\}=$__________

A.$\frac{1}{12}$

B.$\frac{1}{8}$

C.$\frac{1}{6}$

D.$\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】由题意得：

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}$$

又根据题意 X，Y 独立，故

$$\begin{aligned}P\{X+Y=2\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{12}-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

故答案选 C。

4．**设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布：**

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2},P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$$

则下列各式中成立的是__________

A. $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$

B. $P\{X=Y\}=1$

C. $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$

D. $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$

【答案】A

【解析】由于 $\{X=Y\}=\{X=1,Y=1\}\cup\{X=-1,Y=-1\}$，且由题设知 X 与 Y 独立同分布，则

$$\begin{aligned}P\{X=Y\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}\\&=P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}+P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X+Y=0\}&=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}\\&=2P\{X=1\}P\{Y=-1\}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\text{y}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{XY=1\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

故选 A

5．**设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，**

$$X_i=\begin{cases}1,\text{事件 }A\text{ 发生}\\0,\text{事件 }A\text{ 不发生}\end{cases},i=1,2,\cdots,100$$

且 $P(A)=0.8$，$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 相互独立。令 $Y=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则由中心极限定理知，Y 的分布函数 F(y)近似于__________.

A. $\Phi(y)$

B. $\Phi\left(\frac{y-80}{4}\right)$

C. $\Phi(16y+80)$

D. $\Phi(4y+80)$

【答案】B

6．**设二维随机变量 X∽N(0，1)，Y∽N(1,4),且相关系数 $\rho_{xy}=1$，则__________.**

A.P{Y=-2X-1}=1

B.P{Y=2X-1}=1

C.P{Y=-2X+1}=1

D.P{Y=2X+1}=1

【答案】D

【解析】由$\rho_n=1$可知 P{Y=aX+b}=1，且 a>0,故选项 A、C 不正确.

又 E(X)=0，E(Y)=1，若选项 B，E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=-1,则矛盾，故选项 B 也不正确，所以只有选项 D 正确.

二、计算题

7．设$X_1,X_2,\cdots,X_{n_1}$以及$Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2}$为分别来自总体$N(\mu_1,\sigma^2)$与$N(\mu_2,\sigma^2)$的样本,且它们相互独立，μ_1,μ_2,σ^2均未知，试求μ_1,μ_2,σ^2的最大似然估计量.

【答案】联合样本$(X_1,X_2,\cdots,X_{n_1},Y_1,Y_2,\cdots,Y_{n_2})$的联合概率密度，即似然函数为

$$L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n_1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_1)^2}{2\sigma^2}}\prod_{i=1}^{n_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y_i-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{n_1+n_2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2\right]}$$

对数似然函数为 $\ln L(\mu_1,\mu_2,\sigma^2)=-\frac{n_1+n_2}{2}\ln 2\pi-\frac{n_1+n_2}{2}\ln\sigma^2$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2\right]$$

则对数似然方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu_1}=\dfrac{2}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)=0\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\mu_2}=\dfrac{2}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)=0\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n_1+n_2}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\left[\sum\limits_{i=1}^{n_1}(x_i-\mu_1)^2+\sum\limits_{i=1}^{n_2}(y_i-\mu_2)^2\right]=0\end{cases}$$

解方程组得μ_1,μ_2,σ^2的最大似然估计值为

$$\hat{\mu}_1=\bar{x}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_i$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_1+n_2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(y_i-\bar{y})^2\right]$$

从而$\hat{\mu}_2=\bar{y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}y_i$

μ_1,μ_2,σ^2的最大似然估计量为

$$\hat{\mu}_1=\bar{X}=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$$

$$\hat{\mu}_2=\bar{Y}=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n_1+n_2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2\right]$$

8．有一种检验艾滋病毒的检验法，其结果有概率 0.005 报道为假阳性(即不带艾滋病毒者，经此检验法有 0.005 的概率被认为带艾滋病毒).今有 140 名不带艾滋病毒的正常人全部接受此种检验，被报道至少有一人带艾滋病毒的概率为多少?

【答案】在本题中，这 140 人检查结果是相互独立的，这一假定是合理的，将人编号，第 i 号人检验结果以A_i表示正常，则$\bar{A}_i$表示被报道为带艾滋病毒者，由题意知$P(\bar{A}_i)=0.005$，从而$P(A_i)=1-0.005=0.995$. 于是 140 人经检验至少有一人被报道呈阳性概率为

p=P(至少有一人呈阳性)=1-P(无人为阳性)

$$=1-P(\prod_{i=1}^{140}A_i)=1-\prod_{i=1}^{140}P(A_i)=1-0.995^{140}$$

=1-0.4957=0.5043.

这说明，即使无人带艾滋病毒，这样的检验法认为 140 人中至少有一人带艾滋病毒的概率大于$\frac{1}{2}$.

9．**从 1，2，3，4 中任意取出一个数字，记为 X.再从 1，2，…，X.中任意取出一个数字，记为 Y，求**$P\{Y=2\}$.

【答案】只有当 X 取得 2，3，4 中的一种情况时，Y 才有可能为 2.

$$P\{Y=2\}=P\{Y=2\mid X=2\}P\{X=2\}+P\{Y=2\mid X=3\}P\{X=3\}+P\{Y=2\mid X=4\}P\{X=4\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}$$

10．**将一颗骰子掷两次，考虑事件:A=“第一次掷得点数 2 或 5”,B=“两点数之和至少为 7”，求 P(A)，P(B),并问事件 A,B 是否相互独立.**

【答案】设A_i={第 1 次掷得数字” i” }，B_j={第 2 次掷出数字 j}，样本空间 S={(1，1)，…，(1，6)，...,(6，1)，…，(6,6)}，n=36

$$A=\{(2,1),\cdots,(2,6),(5,1),\cdots,(5,6)\},n_A=12$$
$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

则$P(A_iB_j)=P(A_i)P(B_j)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36},i,j=1,\cdots,6$

$$\begin{aligned}P(B)&=1-P(B)\\&=1-P(A_1B_1+A_1B_2+A_2B_1+A_1B_3+A_2B_2+A_3B_1+A_4B_1+A_3B_2+A_2B_3+A_1B_4\\&\quad+A_1B_5+A_2B_4+A_3B_3+A_4B_2+A_5B_1)\\&=1-\frac{15}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A_2B_5+A_2B_6+A_5B_2+A_5B_3+A_5B_4+A_5B_5+A_5B_6)\\&=\frac{7}{36}=\frac{1}{3}\times\frac{7}{12}=P(A)P(B)\end{aligned}$$

故 A 与 B 相互独立.

11．**一复杂的系统由 100 个相互独立起作用的部件所组成.在整个运行期间每个部件损坏的概率为 0.10.为了使整个系统起作用，至少必须有 85 个部件正常工作，求整个系统起作用的概率.**

【答案】记 X 为正常工作的部件数，显然 X～b(100,0.9),由棣莫弗一拉普拉斯定理知$\frac{X-100\times0.90}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}}$近似地服从 N(0，1).从而

$$\begin{aligned}P\{X>85\}&=1-P\{X\leqslant85\}\\&=1-P\left\{\frac{X-100\times0.90}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}}\leqslant\frac{85-100\times0.9}{\sqrt{100\times0.9\times0.1}}\right\}\\&\approx1-\Phi\left(-\frac{5}{3}\right)=1-\left[1-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right]=\Phi\left(\frac{5}{3}\right)=0.9525\end{aligned}$$

即整个系统起作用的概率为 0.9525.

12．**一种混杂的小麦品种，株高的标准差为**$\sigma_0=14\text{ cm}$，**经提纯后随机抽取 10 株，它们的株高(以 cm 计)为**

90　105　101　95　100　100　101　105　93　97

考察提纯后群体是否比原群体整齐?取显著性水平$\alpha=0.01$，并设小麦株高服从$N(\mu,\sigma^2)$.

【答案】需检验假设(a=0.01)，

$$H_0:\sigma\geqslant\sigma_0,\quad H_1:\sigma<\sigma_0(\sigma_0=14)$$

采用χ^2检验法.拒绝域为

$$\chi^2=\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(9)$$

由题设有，$n=10,\chi^2_{1-0.01}(9)=2.088,s^2=24.233.$

落在拒绝域内，故拒绝H_0.认为提纯后的群体比原群体整齐.

三、证明题

13．**设$X_1,X_2,\cdots,X_9$是来自正态总体 X 的简单随机样本，**

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6),Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9),$$
$$s^2=\frac{1}{2}\sum_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2,Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{s}$$

证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

【答案】由题设，Y_1是样本$(X_1,\cdots,X_6)$的样本均值，Y_2是样本(X_7,X_8,X_9)的样本均值，s^2是样本(X_7,X_8,X_9)的样本方差，设$D(X)=\sigma^2,E(X)=\mu$，则$E(Y_1)=E(Y_2)=\mu$，且有$D(Y_1)=D\left[\frac{1}{6}(X_1+\cdots+X_6)\right]=\frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}D(X_i)=\frac{1}{6}\sigma^2,D(Y_2)=D\left[\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)\right]=\frac{1}{9}[D(X_7)+D(X_8)+D(X_9)]=\frac{1}{9}\times3\sigma^2=\frac{1}{3}\sigma^2$.已知$Y_1$与$Y_2$独立，且$E(Y_1-Y_2)=0$，从而

$$D(Y_1-Y_2)=D(Y_1)+D(Y_2)=\frac{1}{6}\sigma^2+\frac{1}{3}\sigma^2=\frac{1}{2}\sigma^2$$

因此$\dfrac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}\sim N(0,1)$.

又由正态总体样本方差的性质知$\chi^2=\frac{2s^2}{\sigma^2}$服从自由度为 2 的$\chi^2$分布，因为$Y_1$与$s^2$独立，$Y_2$与$s^2$独立，因而$Y_1-Y_2$也与$s^2$独立，由服从 t 分布的随机变量的结构可推知$\dfrac{\frac{Y_1-Y_2}{\frac{\sigma}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{2s^2}{\sigma^2}\Big/2}}\sim t(2)$

即$Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{s}\sim t(2)$.

14．**设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从 N(0，1).证明：$U=X^2+Y^2$与$V=\dfrac{X}{Y}$相互独立.**

【答案】$F_U(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{X^2+Y^2\leqslant u\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant u}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^u\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}rdrd\theta=1-e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

$$f_V(v)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yv)f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(yv)^2}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$
$$=2\int_0^{+\infty}y\frac{1}{2\pi}e^{\frac{(yv)^2+y^2}{2}}dy=-\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+v^2}e^{-\frac{(yv)^2+y^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\pi(1+v^2)}»$$
$$F_V(v)=\int_{-\infty}^{v}\frac{1}{\pi(1+t^2)}dt=\frac{1}{\pi}\left(\arctan v+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$F(u,v)=P\left\{X^2+Y^2\leqslant u,\frac{X}{Y}\leqslant v\right\}=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant u,\frac{x}{y}\leqslant v}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\arctan v}^{\pi}\left[\int_0^u e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right]d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}-\arctan v}^{2\pi}\left[\int_0^u e^{-\frac{r^2}{2}}rdr\right]d\theta$$
$$=\frac{1}{\pi}(1-e^{-\frac{u^2}{2}})\left(\frac{\pi}{2}+\arctan v\right).$$

所以$F(u,v)=F_U(u)F_V(v)$，即 U 与 V 相互独立.

15．**设总体 X 服从参数为λ的泊松分布，$(X_1,\cdots,X_n)$是取自总体 X 的样本。**

(1)试证对任意常数C,$(\overline{X}+(1-C)S^2$均是λ的无偏估计；

(2)给出λ^2的一个无偏估计

$$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2>(E\overline{X})^2=\lambda^2$$

【答案】(1)由于$X\sim P(\lambda),EX=DX=\lambda$，故有

$$E\overline{X}=EX=\lambda,\quad ES^2=DX=\lambda$$

从而对于任意常数 C，有

$$E(C\overline{X}+(1-C)S^2)=CE\overline{X}+(1-C)ES^2=\lambda$$

即$C\overline{X}+(1-C)S^2$为λ的无偏估计;

(2)由于$E\overline{X}=\lambda$

$E\overline{X}^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\dfrac{DX}{n}+(EX)^2=\dfrac{\lambda}{n}+\lambda^2$,

取$\hat{\lambda}^2=\overline{X}^2-\dfrac{\overline{X}}{n}$,则有$E\hat{\lambda}^2=\lambda^2$,$\hat{\lambda}^2$即为$\lambda^2$的一个无偏估计。

16.**设随机变量X与Y相互独立且分别服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$与$N(\mu,2\sigma^2)$,其中σ是未知参数且$\sigma>0$,设Z=X-Y**

(1)求Z的概率密度$f(z,\sigma^2)$。

(2)设$Z_1,Z_2,\cdots,Z_N$为来自总体Z的简单随机样本,求σ^2的最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$

(3)证明$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量

【答案】$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$,X,Y独立,$\sigma>0$,已知Z=X-Y

(1)Z的密度为$f(z,\sigma^2)$,

$X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2),X,Y$独立。

$Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$

$\therefore f(z,\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{3\sigma^2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot3\sigma^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}}$

(2)设$Z_1,\cdots,Z_n$为来自总体Z的简单随机样本

似然函数$L(Z_1,\cdots,Z_n,\sigma^2)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{6\sigma^2}}$

$$\begin{aligned}\ln L(Z_1\cdots Z_n,\sigma^2)&=n\ln\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^n Z_i^2\\&=-n\ln\sqrt{6\pi}\sigma-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^n Z_i^2\\&=-n\ln\sqrt{6\pi}-n\ln\sigma-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^n Z_i^2\\&=-\ln\sqrt{6\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^n Z_i^2\end{aligned}$$

令$\sigma^2=t$,

则$\ln L(Z_1,Z_2,\cdots,Z_n,t)$

$=-\ln\sqrt{6\pi}-\dfrac{n}{2}\ln t-\dfrac{1}{6t}\sum_{i=1}^n Z_i^2$

令$\dfrac{d\ln L}{dt}=-\dfrac{n}{2t}+\dfrac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{6t^2}=0'$

则$t=\dfrac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{3n}$

即$\hat{\sigma}^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n Z_i^2}{3n}$

(3)即证$E\hat{\sigma}^2=\sigma^2$,

因为$Z_i\sim N(0,3\sigma^2)$,所以$\dfrac{Z_i-0}{\sqrt{3\sigma^2}}\sim N(0,1),Z_i$是简单随机样本。

$\sum_{i=1}^n\left(\dfrac{Z_i}{\sqrt{3}\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$。故$E\dfrac{\sum Z_i^2}{3\sigma^2}=n,E\sum Z_i^2=3\sigma^2 n$

【复试】2024年广西师范大学025200应用统计《复试:概率论与数理统计》考研复试仿真模拟5套卷（二）

一、选择题

1. **设随机变量X和Y相互独立,X和Y的概率分布分别为**

X	0	1	2	3
Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

X	-1	0	1
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则$P\{X+Y=2\}=$__________

A.$\frac{1}{12}$

B.$\frac{1}{8}$

C.$\frac{1}{6}$

D.$-\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】由于X，Y相互独立，所以

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}$$
$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{6}$$

故选C.

2. **设随机变量X和Y独立同分布，记U=X-Y,V=X+Y，则随机变量U和V必然**__________

A.不独立

B.独立

C.相关系数不为零

D.相关系数为零

【答案】D

【解析】由题设X与Y独立同分布，则$E(X)=E(Y),E(X^2)=E(Y^2)$，则

$$E(U)=E(X-Y)=E(X)-E(Y)=0,$$
$$E(V)=E(X+Y)=E(X)+E(Y),$$
$$E(UV)=E[(X-Y)(X+Y)]=E[X^2-Y^2]$$
$$=E(X^2)-E(Y^2)=0.$$

综上$\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-E(U)\cdot E(V)=0-0=0$，所以$\rho_{UV}=0$，故选D.

3. **设随机变量**$X_i\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}(i=1,2)$，**且满足**$P\{X_1X_2=0\}=1$，**则**$P\{X_1=X_2\}$**等于**__________

A.0
B.1/4
C.1/2

D.1

【答案】A

【解析】设(X_1,X_2)的联合分布如下表所示：

表

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\frac{1}{4}$
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\frac{1}{2}$
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

由$P\{X_1X_2=0\}=P\{X_1=0,X_2=-1\}+P\{X_1=0,X_2=1\}+P\{X_1=-1,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=0\}+P\{X_1=0,X_2=0\}=p_{21}+p_{23}+p_{12}+p_{32}+p_{22}=1$，知$p_{11}=p_{13}=p_{31}=p_{33}=0$,从而有$p_{21}=\frac{1}{4}-p_{11}-p_{31}=\frac{1}{4}-0-0=\frac{1}{4}$，$p_{23}=\frac{1}{4}-p_{13}-p_{33}=\frac{1}{4}-0-0=\frac{1}{4}$，$p_{12}=p_{1\cdot}-p_{11}-p_{13}=\frac{1}{4}-0-0=\frac{1}{4}$，$p_{32}=p_{3\cdot}-p_{31}-p_{33}=\frac{1}{4}-0-0=\frac{1}{4}$，此外$p_{22}=\frac{1}{2}-p_{12}-p_{32}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$，即$p_{11}=p_{22}=p_{33}=0$，所以

$$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=p_{11}+p_{22}+p_{33}=0.$$

故选 A

4． **设随机变量$X\sim f_x(x)$，则 y=—2x+3 的概率密度函数为__________.**

A,$-\frac{1}{2}f_x\left(-\frac{y-3}{2}\right)$

B.$\frac{1}{2}f_x\left(-\frac{y-3}{2}\right)$

C. $\frac{1}{2}f_x\left(-\frac{y+3}{2}\right)$

D.$\frac{1}{2}f_x\left(-\frac{y+3}{2}\right)$

【答案】B

5． **设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X∽Y(0，1)，Y 具有分布律**

$$P(Y=0)=P(Y=1)=\frac{1}{2}$$

记$F_Z(z)$为随机变量 Z=XY 的分布函数，则函数$F_Z(z)$的间断点个数为__________

A.0

B.1

C.2

D.3

【答案】B

【解析】$F_Z(z)=P(XY\leqslant z)$

$$=P(XY\leqslant z|Y=0)P(Y=0)+P(XY\leqslant z|Y=1)P(Y=1)$$
$$=\frac{1}{2}(XY\leqslant z|Y=0)+\frac{1}{2}P(XY|\leqslant z|Y=1)$$
$$=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\leqslant z|Y=0]+P(X\leqslant z|Y=1)],$$

由于 X，Y 独立，所以有

$$F_Z(z)=\frac{1}{2}[P(X\cdot 0\leqslant z)+P(X\leqslant z)]$$

故当 z<0 时，有$F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi_0(z)$；

当$z\geqslant 0$时，有$F_Z(z)=\frac{1}{2}[1+\Phi_0(z)]$；

于是有$\lim\limits_{z\to 0^-}F_Z(z)=\frac{1}{4}\neq\frac{3}{4}=\lim\limits_{z\to 0^+}F_Z(z)$，

所以 z=0 为间断点，故选 B

6．**若两个随机变量 X 和 Y 满足 D(X+Y)=D(X-Y)，则必有_________.**

A.X 与 Y 相互独立

B.X 与 Y 不相关

C.D(Y)=0

D.D(X)D(Y)=0

【答案】B

【解析】$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$，$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=0$，即$\rho_{XY}=0$，故 x 与 y 不相关，选 B

二、计算题

7．**设总体 X 服从自由度为 m 的χ^2分布，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其一个样本，试求该样本的样本均值$\overline{X}$的密度函数.**

【答案】由于总体$X\sim\chi^2(m)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为样本，故$X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\chi^2(mn)$，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$的密度函数为 f(x)，则$\overline{X}$的密度函数为

$$f_{\overline{X}}(x)=f(nx)\cdot n=\begin{cases}\dfrac{n}{2^{\frac{mn}{2}}\Gamma\left(\dfrac{mn}{2}\right)}(nx)^{\frac{mn}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n^{\frac{mn}{2}}}{2^{\frac{mn}{2}}\Gamma\left(\dfrac{mn}{2}\right)}x^{\frac{mn}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}.$$

8．**设随机变量 X∽U(0，1)，当给定 X=x 时.随机变量 Y 的条件概率密度为**

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)求 X 和 Y 的联合概率密度 f(x，y).

(2)求边缘密度$f_Y(y)$,并画出它的图形.

(3)求$P\{X>Y\}$.

【答案】(1)因 f(x.y)=$f_{Y|X}(y|x)f_X(x)$,

由于

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故

$$f(x,y)=\begin{cases}x, & 0<y<\dfrac{1}{x},0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

f(x,y)仅在区域$D:\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<\frac{1}{x}\}$上不等于零，如下图 1 所示.

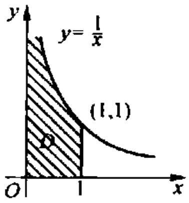

图 1

(2)$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}, & 0<y<1,\\ \int_0^{1/y} x\mathrm{d}x=\frac{1}{2y^2}, & 1\leqslant y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

即

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1,\\ \frac{1}{2y^2}, & 1\leqslant y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其图形如下图 2 所示.

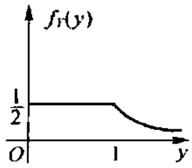

图 2

(3)$P\{X>Y\}=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1 x\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{2}(1-y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$

9. **设二维随机变量(X,Y)的概率密度为**

$$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

求常数 A 及条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$.

【答案】由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$=A\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}\mathrm{d}x=A\cdot\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=A\pi=1$$

$\therefore A=\frac{1}{\pi}$

当$-\infty<x<+\infty$时,

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(y-x)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-x^2}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},-\infty<x<+\infty$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{1}{\pi}e^{-2x^2+2xy-y^2}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x-y)^2},-\infty<y<+\infty$$

10．**设 X，Y 是相互独立的随机变量，它们都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$.试验证随机变量 Z= $\sqrt{X^2+Y^2}$ 的概率密度为**

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2}, & z\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

我们称 Z 服从参数为$\sigma(\sigma>0)$的瑞利(Rayleigh)分布.

【答案】由 X，Y 独立同分布有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}$$

而$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$

当 z<0 时，$\{Z\leqslant z\}$是不可能事件，此时

$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=0$，从而$f_Z(z)=0$.

当$z\geqslant 0$时，记$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant z^2\}$，则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\sqrt{X^2+Y^2}\leqslant z\}=P\{X^2+Y^2\leqslant z^2\}\\&=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}\cdot r\mathrm{d}r=1-e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\end{aligned}$$

从而$f_Z(z)=F'_Z(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2}$.故 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

11．**下面列出了自 1952∽2004 年各届奥林匹克运动会男子 10000 米赛跑的冠军的成绩(时间以 min 计).**

年份(x)	1952	1956	1960	1964	1968	1972	1976
成绩(y)	29.3	28.8	28.5	28.4	29.4	27.6	27.7
年份(x)	1980	1984	1988	1992	1996	2000	2004
成绩(y)	27.7	27.8	27.4	27.8	27.1	27.3	27.1

(1)求 Y 关于 x 的线性回归方程$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$.

(2)检验假设$H_0:b=0,H_1:b\neq 0$(显著性水平α=0.05).

(3)求 2008 年冠军成绩的预测值.

【答案】(一)成绩关于奥运届次数的回归方程

对数据作变换，①时间 x 取值改为 1，2，3，...(即自 1952 年算作奥运万米的第一次记录，其后第二次，第三次等).②把万米记录均减去 20(分)来算(这样在使用经验回归方程时，得到的时间加上 20 就是实际所需求的时间).得经整理的数据及计算如下表：

	x	y	x^2	y^2	xy
	1	9.3	1	86.49	9.3
	2	8.8	4	77.44	17.6
	3	8.5	9	72.25	25.5
	4	8.4	16	70.56	33.6
	5	9.4	25	88.36	47
	6	7.6	36	57.76	45.6
	7	7.7	49	59.29	53.9
	8	7.7	64	59.29	61.6
	9	7.8	81	60.84	70.2
	10	7.4	100	54.76	74
	11	7.8	121	60.84	85.8
	12	7.1	144	50.41	85.2
	13	7.3	169	53.29	94.9
	14	7.1	196	50.41	99.4
$\sum$		111.9	1 015	901.99	803.6

$$S_{xx}=\sum x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)^2=1\,015-\frac{1}{14}\times105^2=227.5$$

$$S_{xy}=\sum x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)$$

$$=803.6-\frac{1}{14}\times105\times111.9=-35.65$$

$$S_{yy}=\sum y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2=901.99-\frac{1}{14}\times111.9^2=7.589\,285\,7$$

(1)设所要求的回归函数为$\hat{a}+\hat{b}x$，则

$$\hat{b}=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=-0.156\,7,$$

$$\hat{a}=\frac{1}{n}\sum y_i-\frac{\hat{b}}{n}\sum x_i=9.168$$

故线性回归方程为

$$\hat{y}=9.168-0.156\,7x$$

(2)需在显著性水平 0.05 下检验假设

$$H_0:b=0;H_1:b\neq0$$

为此先计算

$$Q_e=S_{yy}-\hat{b}S_{xy}=7.589\,285\,7-(-0.156\,7)(-35.65)=2.002\,93$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{Q_e}{n-2}=0.166\,910$$

查表得知$t_{0.025}(12)=2.178\,8$，观察值为

$$|t|=\frac{|\hat{b}|}{\hat{\sigma}}\sqrt{S_{xx}}=5.785\,2>2.178\,8.$$

故在显著性水平α=0.05 下拒绝H_0，认为回归效果是显著的.

(3)预测值.2008 年相当于第 15 次，即在$\hat{y}$=9.168-0.1567x 中令 x=15 得

$$\hat{y}\Big|_{x=15}=9.168-0.156\,7\times15=6.82(\mathrm{min})$$

注意，我们在以上作计算时，将历届记录的成绩都减去 20min，因此，2008 年万米冠军成绩的预测值是 6.82+20=26.82(min).

(二)成绩关于年份的回归方程

此时，$S_{xx}=3\,640, S_{xy}=-142.6$.

回归方程 $\hat{y}=105.482\,6-0.039\,18x$.

12．**对于一元线性回归模型**

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i \quad (i=1,\cdots,n),$$

$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$且相互独立，试求$\beta_0,\beta_1$以及$\sigma^2$的最大似然估计.

【答案】由于$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$且相互独立，则$Y_i \sim N(\beta_0+\beta_1 x_i,\sigma^2)$且相互独立(i=1，…，n)，似然函数为

$$L(\beta_0,\beta_1,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2\right\}$$

$$=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2\right\},$$

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$$

似然方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta_0}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)=0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta_1}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)x_i=0\\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta_2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2=0\end{cases},$$

容易解得

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{x},\quad \hat{\beta}_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iY_i-n\bar{x}\bar{Y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}=l_{xY}/l_{xx},$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i)^2=SSE/n=(l_{YY}-\hat{\beta}_1 l_{xY})/n$$

显然，$\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$的最大似然估计即为其最小二乘估计。

三、证明题

13．**设随机变量 X 服从指数分布，即 X 的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$,证明:对于任意的 s>0，t>0,有 P(X>s+t|X>s)=P(X>t).**

【答案】$P(X>s+t\mid X>s)=\dfrac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\dfrac{\int_{s+t}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}{\int_{s}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx}$

$$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P(X>t)$$

14．**验收某种发电机组时，规定需要进行多次启动，要求连续启动成功 2 次才能接收。设各次启动试验的结果是相互独立的，且各次启动试验成功的概率为 p，以 X 表示被接收之前需进行的启动试验的次数，记 X 的概率分布为$P\{X=k\}=p_k, k=2,3,\cdots$.证明：当$k\geqslant 5$时，**

$$p_k=\left(1-\sum_{i=2}^{k-3}p_i\right)(1-p)p^2$$

【答案】由于事件{X>k-3}表示在启动试验的次数 k-3 中没有连续启动成功 2 次(记为{Y=k-3})，故

$$P\{Y=k-3\}=P\{X>k-3\}=1-P\{X\leqslant k-3\}=1-\sum_{i=2}^{k-3}p_i$$

当 k≥5 时，$\{X=k\}$表示第 k-1，k 次启动成功，第 k-2 次启动不成功，且 k-3 中没有连续启动成功 2 次，

故

$$P\{X=k\}=P\{Y=k-3\}\cdot(1-p)p^2=\left(1-\sum_{i=2}^{k-3}p^i\right)(1-p)p^2$$

15．**(1)设$\hat{\theta}$是参数θ的无偏估计，且有$D(\hat{\theta})>0$，试证$\hat{\theta}^2=(\hat{\theta})^2$不是$\theta^2$的无偏估计。**

(2)试证明均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x\leqslant\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

中未知参数θ的最大似然估计量不是无偏的。

【答案】(1) $E(\hat{\theta}^2)=D(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})]^2=D(\hat{\theta})+\theta^2>\theta^2\quad(D(\hat{\theta})>0)$

所以$\hat{\theta}^2$不是θ^2的无偏估计量。

(2)总体 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x}{\theta}, & 0\leqslant x<\theta,\\ 1, & x\geqslant\theta.\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & 0<x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

对数似然函数为

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{n}{\theta}<0$$

故$\ln L(\theta)$单调减，因此$X_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}X_i$的概率密度为

$$f_{X_n}(x)=\begin{cases}n[F(x)]^{n-1}f(x), & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$E[X(n)]=\int_0^\theta\frac{nx^n}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{n+1}\theta\neq\theta$$

故 X(n)不是θ的无偏估计量。

16．**设 A 和 B 是试验 E 的两个事件，且 P(A)>0，P(B)>0,并定义随机变量:如下:**

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 }A\text{ 发生},\\ 0, & \text{若 }A\text{ 不发生}.\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & \text{若 }B\text{ 发生},\\ 0, & \text{若 }B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

证明若$\rho_{XY}=0$，则 X 和 Y 必定相互独立.

【答案】设 X,Y 分布律为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-P(A) & P(A)\end{pmatrix},Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-P(B) & P(B)\end{pmatrix}$$

于是 XY 也只能取 0 及 1 这两个值，从而

E(X)=0×[1-P(A)]+1×P(A)=P(A)，同理，E(Y)=P(B)，E(XY)=P{X=1,Y=1}

即 E(XY)=E(X).EY

从而 P{X=1,Y=1}=P{X=1}.P{Y=1}.

$$\begin{aligned}P\{X=0,Y=1\}&=P\{Y=1\}-P\{X=1,Y=1\}\\&=P\{Y=1\}-P\{X=1\}P\{Y=1\}\\&=P\{Y=1\}(1-P\{X=1\})\\&=P\{Y=1\}P\{X=0\}\\&=P\{X=0\}P\{Y=1\}\end{aligned}$$

同理可证，

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}\cdot P\{Y=0\}$$

所以 X 和 Y 必定相互独立.