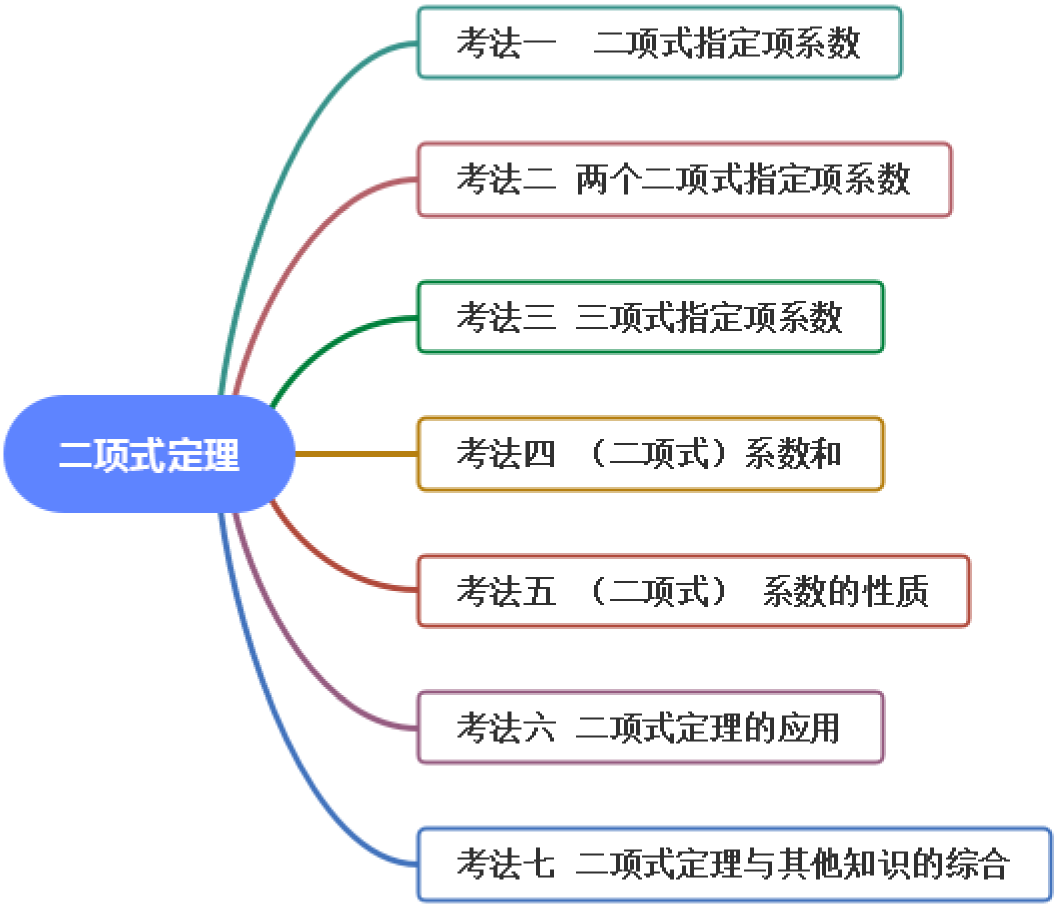
二项式定理（选填题 7 种考法）

考点呈现



例题剖析

考法一　二项式指定项系数

【例 1-1】（2023·山西临汾·统考一模）$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为（　　）

A．-160　　　　B．-64　　　　C．64　　　　D．160

【答案】C

【解析】$(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}(-\frac{1}{\sqrt{x}})^r=C_6^r2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{3-r}$，

令 $3-r=3$，则 $r=0$，故展开式中 x^3 的系数为 $C_6^02^6\cdot(-1)^0=64$.故选：C.

【例 1-2】（2022·天津·统考高考真题）$\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)^5$ 的展开式中的常数项为______.

【答案】15

【解析】由题意$\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{5-r}\cdot\left(\frac{3}{x^2}\right)^r=C_5^r\cdot 3^r\cdot x^{\frac{5-5r}{2}}$，

令$\frac{5-5r}{2}=0$即$r=1$，则$C_5^r\cdot 3^r=C_5^1\cdot 3=15$，所以$\left(\sqrt{x}+\frac{3}{x^2}\right)^5$的展开式中的常数项为$15$.故答案为：15.

【例 1-3】（2023·贵州毕节·统考一模）$(\sqrt{2}x-y)^5$展开式中x^2y^3的系数为_________（用数字作答）

【答案】-20

【解析】$(\sqrt{2}x-y)^5$的展开式的通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r\left(\sqrt{2}x\right)^{5-r}\cdot(-y)^r=\mathrm{C}_5^r\left(\sqrt{2}\right)^{5-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{5-r}y^r$，

取$r=3$得到$T_4=\mathrm{C}_5^3\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot(-1)^3\cdot x^2y^3=-20x^2y^3$.故答案为：$-20$

【例 1-4】（2023 春·河北邯郸·高三校联考开学考试）$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$的展开式中,有理项是______.（用关于$x$的式子表示）

【答案】$28x$和x^{-4}

【解析】由题知,记$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$展开式的通项为$T_{r+1}$,则

$T_{r+1}=\mathrm{C}_8^r\left(\sqrt[3]{x}\right)^{8-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=\mathrm{C}_8^r\cdot x^{\frac{16-5r}{6}}\left(0\le r\le 8\right)$,

由$\frac{16-5r}{6}\in\mathbf{Z}$,得$r=2$或 8,所以$T_{2+1}=\mathrm{C}_8^2\cdot x^{\frac{16-10}{6}}=28x, T_{8+1}=\mathrm{C}_8^8\cdot x^{\frac{16-40}{6}}=x^{-4}$,故有理项是$28x$和$x^{-4}$.故答案为: $28x$和x^{-4}

考法二　两个二项式指定项系数

【例 2-1】（2023·全国·模拟预测）$\left(\frac{1}{x^3}+2\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为（　　）

A．－20　　B．30　　C．－10　　D．10

【答案】D

【解析】因为$\left(\frac{1}{x^3}+2\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6=\frac{1}{x^3}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6+2\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\left(x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r\mathrm{C}_6^r x^{12-3r}$,

令$12-3r=3$,得$r=3$;令$12-3r=0$,得$r=4$,所以$\left(\frac{1}{x^3}+2\right)\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中的常数项为:

$\frac{1}{x^3}\times(-1)^3\mathrm{C}_6^3\times x^3+(-1)^4\mathrm{C}_6^4\times x^0\times 2=-20+30=10$.故选:D

【例 2-2】(2023·四川成都·统考二模)二项式$(1+x+x^2)(1-x)^{10}$展开式中x^4的系数为(　　)

A．120　　B．135　　C．140　　D．100

【答案】B

【解析】$(1-x)^{10}$的展开式通项公式为$T_{r+1}=\mathrm{C}_{10}^r(-x)^r=\mathrm{C}_{10}^r(-1)^r x^r$,

其中$T_3=\mathrm{C}_{10}^2x^2=45x^2$,$T_4=-\mathrm{C}_{10}^3x^3=-120x^3$,$T_5=\mathrm{C}_{10}^4x^4=210x^4$,

故二项式$(1+x+x^2)(1-x)^{10}$中x的四次方项为$45x^2\cdot x^2-120x^3\cdot x+210x^4\cdot 1=135x^4$,

即展开式中x^4的系数为135.故选:B

【例 2-3】(2023·安徽·校联考模拟预测)$\left(x-\frac{1}{xy^2}\right)\left(\frac{2}{x}+xy^2\right)^5$的展开式中$x^2y^6$的系数为

(　　)

A．30　　B．40　　C．70　　D．80

【答案】A

【解析】因为$\left(x-\frac{1}{xy^2}\right)\left(\frac{2}{x}+xy^2\right)^5$的展开式中含$x^2y^6$的项为

$xC_5^3(xy^2)^3(\frac{2}{x})^2+(-\frac{1}{xy^2})C_5^4(xy^2)^4\frac{2}{x}$,

所以x^2y^6的系数为$4C_5^3-2C_5^4=30$.故选:A.

【例 2-4】(2023·吉林通化·梅河口市第五中学校考一模)$\left(x-\frac{1}{x}\right)(a+y)^6$的展开式中,含$x^{-1}y^4$项的系数为$-15$,则$a=$(　　)

A．1　　B．-1　　C．±1　　D．±2

【答案】C

【解析】$(a+y)^6$的展开式的通项公式为$\mathrm{C}_6^ra^{6-r}y^r$,令$r=4$,可得$\mathrm{C}_6^ra^{6-r}y^r=15a^2y^4$;

所以含$x^{-1}y^4$项的系数为$-15a^2$,即$-15a^2=-15$,解得$a=\pm1$.故选:C.

考法三 三项式指定项系数

【例 3-1】(2023·全国·模拟预测)$\left(x+\frac{1}{x^2}+1\right)^6$展开式的常数项为(　　)

A．1　　B．15　　C．60　　D．76

【答案】D

【解析】由$(x+\frac{1}{x^2}+1)^6=\mathrm{C}_6^0(x+\frac{1}{x^2})^6+\mathrm{C}_6^1(x+\frac{1}{x^2})^5+\mathrm{C}_6^2(x+\frac{1}{x^2})^4+\mathrm{C}_6^3(x+\frac{1}{x^2})^3$

$+C_6^4(x+\frac{1}{x^2})^2+C_6^5(x+\frac{1}{x^2})^1+C_6^6(x+\frac{1}{x^2})^0$，

其中含有常数项的有$C_6^0(x+\frac{1}{x^2})^6$，$C_6^3(x+\frac{1}{x^2})^3$，$C_6^6(x+\frac{1}{x^2})^0$，

所以常数项为$C_6^0\cdot C_6^2+C_6^3\cdot C_3^1+C_6^6=15+60+1=76$，故选：D．

【例 3-2】（2023 秋·广东·高三统考期末）$(x-2y-1)^5$的展开式中含x^2y^2的项的系数为（　　）

A．-120　　B．60　　C．-60　　D．30

【答案】A

【解析】$\because\left(x-2y-1\right)^5=\left[\left(x-1\right)-2y\right]^5$的展开式中含$y^2$的项为$C_5^2\left(x-1\right)^3\left(-2y\right)^2$，

$(x-1)^3$的展开式中含x^2的项为$C_3^1\cdot x^2\cdot\left(-1\right)^1$，

$\therefore(x-2y-1)^5$的展开式中含x^2y^2的项的系数为$C_5^2\left(-2\right)^2\cdot C_3^1\cdot\left(-1\right)^1=-120$.

故选：A.

【例 3-3】（2023 春·河南开封·高三统考开学考试）已知$\left(2x-\frac{1}{mx}-1\right)^6$的展开式中$x^3$的系数为$-40$，则实数$m=$（　　）

A．4　　B．2　　C．-2　　D．-4

【答案】A

【解析】$\left(2x-\frac{1}{mx}-1\right)^6$展开式的通项为：$C_6^r\left(2x-\frac{1}{mx}\right)^{6-r}\cdot\left(-1\right)^r$，$r\in\left[0,6\right]$且$r\in\mathbf{N}$；

$\left(2x-\frac{1}{mx}\right)^{6-r}$展开式的通项为：$C_{6-r}^k\cdot\left(2x\right)^{6-r-k}\cdot\left(-\frac{1}{mx}\right)^k=\left(-\frac{1}{m}\right)^k\cdot 2^{6-r-k}C_{6-r}^k x^{6-r-2k}$，

$k\in\left[0,6-r\right]$且$r\in\mathbf{N}$；

令$6-r-2k=3$，则$\begin{cases}k=0\\r=3\end{cases}$或$\begin{cases}k=1\\r=1\end{cases}$，

$\therefore x^3$的系数为$\left(-\frac{1}{m}\right)^0\cdot 2^3C_3^0\cdot C_6^3\cdot\left(-1\right)^3+\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot 2^4C_5^1\cdot C_6^1\cdot\left(-1\right)=-160+\frac{480}{m}=-40$，解得：$m=4$.故选：A.

考法四　（二项式）系数之和

【例 4-1】（2023·云南昆明）（多选）设$\left(x^2+1\right)(3x-1)^8=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{10}(x+2)^{10}$，则（　　）

A．$a_0=1$

B．$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}=2^{17}$

C． $a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}=10^9$

D． $\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)^2-\left(a_1+a_3+\cdots+a_9\right)^2=2^{17}\times10^9$

【答案】BCD

【解析】对于选项 A，令 $x=-2$ 得 $a_0=5\times7^8\neq1$，所以选项 A 错误；

分别令 $x=-1$ 和 $x=-3$ 得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}=2^{17}$ 和 $a_0-a_1+a_2-a_3\cdots-a_9+a_{10}=10^9$，所以选项 B 和选项 C 正确；

对于选项 D，$\left(a_0+a_2+\cdots+a_{10}\right)^2-\left(a_1+a_3+\cdots+a_9\right)^2$

$=\left(a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9+a_{10}\right)\left(a_0-a_1+a_2-\cdots-a_9+a_{10}\right)=2^{17}\times10^9$，选项 D 正确；故：BCD．

【例 4-2】（2023·全国·高三专题练习）（多选）对任意实数 x，有

$\left(2x-3\right)^9=a_0+a_1\left(x-1\right)+a_2\left(x-1\right)^2+a_3\left(x-1\right)^3+\cdots+a_9\left(x-1\right)^9$．则下列结论成立的是（　）

A． $a_2=144$

B． $a_0=1$

C． $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=1$

D． $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=-3^9$

【答案】CD

【解析】对任意实数 x 有

$\left(2x-3\right)^9=a_0+a_1\left(x-1\right)+a_2\left(x-1\right)^2+a_3\left(x-1\right)^3+\cdots+a_9\left(x-1\right)^9=\left[-1+2\left(x-1\right)\right]^9$，

所以 $a_2=-\mathrm{C}_9^2\times2^2=-144$，故 A 不正确；

令 $x=1$，可得 $a_0=-1$，故 B 不正确；

令 $x=2$，可得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=1$，故 C 正确；

令 $x=0$，可得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=-3^9$，故 D 正确．

故选：CD．

【例 4-3】（2023·全国·高三专题练习）（多选）已知

$\left(x-2\right)^{10}=a_0+a_1\left(x-1\right)+a_2\left(x-1\right)^2+\cdots+a_{10}\left(x-1\right)^{10}$，则下列结论正确的有（　）

A． $a_0=1$　　　　B． $a_6=210$

C． $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{10}}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$　　　　D． $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=512$

【答案】ABD

【解析】对于 A，取 $x=1$ 得 $(1-2)^{10}=a_0+a_1(1-1)+a_2(1-1)^2+\cdots+a(1-1)^{10}$，所以 $a_0=1$，故 A 正确；

对于 B，$(x-2)^{10}=[1-(x-1)]^{10}$ 的展开式中第 7 项为 $\mathrm{C}_{10}^6[-(x-1)]^6$，所以 $a_6=\mathrm{C}_{10}^6=210$

，故 B 正确；

对于 C，取 $x=\frac{3}{2}$ 得 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{10}}{2^{10}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}-a_0=-\frac{1023}{1024}$，故 C 错误；

对于 D，由 $(x-2)^{10}=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_{10}(x-1)^{10}$，

取 $x=0$ 得 $\left(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}\right)-\left(a_1+a_1+a_5+a_1+a_9\right)=2^{10}$，

取 $x=2$ 得 $\left(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}\right)+\left(a_1+a_3+a_5+a_1+a_9\right)=0$，

所以 $a_0+a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=2^9=512$，故 D 正确.故选：ABD.

考法五 （二项式）系数的性质

【例 5-1】（2023·河南信阳·河南省信阳市第二高级中学校联考一模）若 $\left(1-2x\right)^n$ 的展开式有且只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式中 x^3 项的系数为（　）

A．-960　　B．960　　C．448　　D．-448

【答案】D

【解析】依题意只有 $n=8$ 时第 5 项的二项式系数最大，x^3 项的系数为 $\mathrm{C}_8^5\left(-2\right)^3=-448$.故选：D

【例 5-2】（2023 秋·浙江宁波·高三期末）若二项式 $(1+2x)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的展开式中第 6 项与第 7 项的系数相等，则此展开式中二项式系数最大的项是（　）

A．$448x^3$　　B．$1120x^4$　　C．$1792x^5$　　D．$1792x^6$

【答案】B

【解析】$T_6=\mathrm{C}_n^5(2x)^5,T_7=\mathrm{C}_n^6(2x)^6$，所以 $\mathrm{C}_n^5\cdot2^5=\mathrm{C}_n^6\cdot2^6$，所以 $\mathrm{C}_n^5=2\mathrm{C}_n^6$，即

$$\frac{n!}{(n-5)!5!}=\frac{2\cdot n!}{6!(n-6)!},$$

所以 $6=2(n-5)\Rightarrow 2n=16\Rightarrow n=8$，所以二项式系数最大项为 $T_5=\mathrm{C}_8^4(2x)^4=1120x^4$.

故选：B.

【例 5-3】（2023·全国·模拟预测）已知二项式 $\left(x+a\right)^6$，$a\in\mathrm{N}^*$ 的展开式中第四项的系数最大，则 a 的值为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

【答案】A

【解析】二项式 $\left(x+a\right)^6$ 展开式的通项公式为 $\mathrm{C}_6^r\cdot x^{6-r}\cdot a^r,a^r\cdot\mathrm{C}_6^r\cdot x^{6-r}$，其中 $a\in\mathrm{N}^*$，

由 $\begin{cases}\dfrac{a^r\cdot\mathrm{C}_6^r}{a^{r-1}\cdot\mathrm{C}_6^{r-1}}\geq1\\ \dfrac{a^r\cdot\mathrm{C}_6^r}{a^{r+1}\cdot\mathrm{C}_6^{r+1}}\geq1\end{cases}$（其中 $r\geq1$），即 $\begin{cases}a\cdot\mathrm{C}_6^r\geq\mathrm{C}_6^{r-1}\\ \mathrm{C}_6^r\geq a\cdot\mathrm{C}_6^{r+1}\end{cases}$，

$$\begin{cases} a\cdot\dfrac{6!}{r!(6-r)!}\geq\dfrac{6!}{(r-1)!(7-r)!} \\ \dfrac{6!}{r!(6-r)!}\geq a\cdot\dfrac{6!}{(r+1)!(5-r)!}\end{cases}，\ \frac{r}{7-r}\leq a\leq\frac{r+1}{6-r}，$$

依题意可知$r=3$使上式成立，即$\frac{3}{4}\leq a\leq\frac{4}{3}$，所以$a=1$.故选：A

考法六 二项式定理的应用

【例 6−1】（2022·潍坊模拟）$2^{50}-1$除以 7 的余数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

【答案】D

【解析】$2^{50}=4\times2^{48}=4\times\left(2^3\right)^{16}=4\times\left(7+1\right)^{16}$

$=4\times\left(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7+C_{16}^{16}\right)$

$=4\times\left(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7\right)+4$，则

$2^{50}-1=4\times\left(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7\right)+3$，

又$4\times\left(C_{16}^0\cdot7^{16}+C_{16}^1\cdot7^{15}+\cdots+C_{16}^{15}\cdot7\right)$是 7 的倍数，故余数为 3.故答案为：D.

【例 6-2】（2022 广东）1.95^7的计算结果精确到个位的近似值为

A．106　　B．107　　C．108　　D．109

【答案】B

【解析】$\because1.95^7=\left(2-0.05\right)^7=2^7-C_7^1\times2^6\times0.05+C_7^2\times2^5\times0.05^2-\cdots\approx107.28$，$\therefore$ $1.95^7\approx107$．故选 B

【例 6-3】（2023·全国·高三专题练习）若$(3x+2)^{2020}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2020}x^{2020}$，则$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}$被 12 整除的余数为______.

【答案】0

【解析】在已知等式中，取$x=1$得$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2020}=5^{2020}$，①

取$x=-1$得$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2020}=1$，②

①−②得：$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}=\frac{1}{2}\times(5^{2020}-1)=\frac{25^{1010}-1}{2}$，

因为$25^{1010}=(24+1)^{1010}=C_{1010}^0\,24^{1010}+C_{1010}^1 24^{1009}+\cdots+C_{1010}^{1009}24^1+C_{1010}^{1010}$

$=24C_{1010}^0 24^{1009}+24C_{1010}^1 24^{1008}+\cdots+24C_{1010}^{1009}+1$

所以$\frac{25^{1010}-1}{2}=12C_{1010}^0 24^{1009}+12C_{1010}^1 24^{1008}+\cdots+12C_{1010}^{1009}=12(C_{1010}^0 24^{1009}+C_{1010}^1 24^{1008}+\cdots+C_{1010}^{1009})$，

所以$\frac{25^{1010}-1}{2}$能被 12 整除，所以$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2019}$被 12 整除的余数为0.故答案为：0.

【例 6-4】（2023·全国·高三校联考阶段练习）写出一个可以使得$99^{2023}+a$被 100 整除的正整数$a=$______.

【答案】1（答案不唯一）

【解析】由题意可知$99^{2023}+a=\left(100-1\right)^{2023}+a$，

将$\left(100-1\right)^{2023}$利用二项式定理展开得

$\left(100-1\right)^{2023}=\mathrm{C}_{2023}^{0}100^{2023}\left(-1\right)^{0}+\mathrm{C}_{2023}^{1}100^{2022}\left(-1\right)^{1}+\cdots+\mathrm{C}_{2023}^{2022}100^{1}\left(-1\right)^{2022}+\mathrm{C}_{2023}^{2023}100^{0}\left(-1\right)^{2023}$

显然，$\mathrm{C}_{2023}^{0}100^{2023}\left(-1\right)^{0}+\mathrm{C}_{2023}^{1}100^{2022}\left(-1\right)^{1}+\cdots+\mathrm{C}_{2023}^{2022}100^{1}\left(-1\right)^{2022}$能被 100 整除，

所以，只需$\mathrm{C}_{2023}^{2023}100^{0}\left(-1\right)^{2023}+a=-1+a$是 100 的整数倍即可；

所以$-1+a=100n(n\in\mathrm{Z})$，得$a=100n+1(n\in\mathrm{Z})$

不妨取$n=0$，得$a=1$.

故答案为：1

考法七 二项式定理与其他知识的综合

【例 7-1】（2023 秋·江苏苏州·高三统考期末）若$\left(\dfrac{a}{x}+bx\right)^{6}$的展开式中$x^2$的系数为 60，则$a^2+b^2$的最小值为（　）

A．2　　B．$\sqrt{2}+1$　　C．3　　D．5

【答案】C

【解析】$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(\dfrac{a}{x})^{6-r}(bx)^r=a^{6-r}b^r\mathrm{C}_6^rx^{2r-6}$，令$2r-6=2$，$r=4$，

所以$\mathrm{C}_6^4a^2b^4=60$，$\therefore a^2b^4=4$，

$a^2+b^2=\dfrac{4}{b^4}+b^2=\dfrac{4}{b^4}+\dfrac{1}{2}b^2+\dfrac{1}{2}b^2\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{4}{b^4}\cdot\dfrac{1}{2}b^2\cdot\dfrac{1}{2}b^2}=3$，当且仅当 $\dfrac{4}{b^4}=\dfrac{1}{2}b^2$，即$b=\pm\sqrt{2}$时等号成立，

故选：C.

【例 7-2】（2023·全国·高三专题练习）设a为实数，甲：$a=1$；乙：$(x+a)^4$二项展开式常数项为 1．则甲是乙成立的（　）条件

A．充分但不必要　　B．充要

C．必要但不充分　　D．既不充分也不必要

【答案】A

【解析】$(x+a)^4$展开式中的第$k+1$项为$\mathrm{C}_4^k\cdot x^{4-k}\cdot a^k=\mathrm{C}_4^k\cdot a^kx^{4-k}$，$k=0,1,2,3,4$.

当$k=4$时，该项为常数项，常数项为$\mathrm{C}_4^4\cdot a^4=a^4$.

显然，当$a=1$时，$a^4=1$；当$a^4=1$时，$a=\pm1$.

所以，甲是乙成立的充分但不必要条件.

故选：A.

【例 7-3】（2023 秋·辽宁锦州·高三渤海大学附属高级中学校考期末）已知函数$f\left(x\right)=8\sin x+\frac{1}{6}x^3$在$x=0$处的切线与直线$nx-y=0$平行，则二项式$\left(1-x\right)^n$展开式中$x^4$的系数为（　）

A．70　　　　B．－70　　　　C．56　　　　D．－56

【答案】A

【解析】$f'\left(x\right)=8\cos x+\frac{1}{2}x^2$，由已知可得，$f'\left(0\right)=n$，

即$f'\left(0\right)=8=n$，所以$n=8$.

设$\left(1-x\right)^8$展开式中的第 k+1 项含有x^4，$T_{k+1}={\rm C}_8{}^k\cdot1^{8-k}\cdot\left(-x\right)^k={\rm C}_8{}^k\cdot\left(-1\right)^k\cdot\left(x\right)^k$，

则可知，$k=4$，所以二项式$\left(1-x\right)^n$展开式中x^4的系数为${\rm C}_8{}^4=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$.

故选：A.

【例 7-4】（2023·全国·高三专题练习）定义函数$f\left(x,n\right)=(1+x)^n\left(n\in{\rm N}^*\right)$，已知$f\left({\rm i},n\right)=32{\rm i}$(i 为虚数单位)，则$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^n$的展开式中常数项是（　）

A．180　　　　B．120　　　　C．90　　　　D．45

【答案】A

【解析】$\left(1+{\rm i}\right)^2=2{\rm i},\left(1+{\rm i}\right)^4=\left(2{\rm i}\right)^2=-4,\left(1+{\rm i}\right)^8=16,\left(1+{\rm i}\right)^{10}=32{\rm i}$，由题可知$(1+{\rm i})^n=32{\rm i}$，所以$n=10$.

所以$\left(\sqrt{x}-\frac{2}{x^2}\right)^{10}$的展开式的通项为$T_{r+1}={\rm C}_{10}^r\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{10-r}\cdot\left(-2x^{-2}\right)^r={\rm C}_{10}^r(-2)^rx^{\frac{10-5r}{2}}$.

令$\frac{10-5r}{2}=0$，解得$r=2$.所以展开式中的常数项是${\rm C}_{10}^2\times(-2)^2=180$.故选：A

【例 7-5】（2023·陕西商洛·校考三模）数列$\left\{a_n\right\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$，${\rm C}_5^0a_1+{\rm C}_5^1a_2+{\rm C}_5^2a_3+{\rm C}_5^3a_4+{\rm C}_5^4a_5+{\rm C}_5^5a_6$的值为（　）

A．761　　　　B．697　　　　C．518　　　　D．454

【答案】D

【解析】因为$a_{n+1}+1=2a_n+2=2\left(a_n+1\right)$，又$a_1=1$，

所以$\left\{a_n+1\right\}$以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以$a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，所以$a_n=2^n-1$，

则 $C_5^0a_1+C_5^1a_2+C_5^2a_3+C_5^3a_4+C_5^4a_5+C_5^5a_6$

$=C_5^0\times2+C_5^1\times2^2+C_5^2\times2^3+C_5^3\times2^4+C_5^4\times2^5+C_5^5\times2^6-\left(C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5\right)$

又 $C_5^0\times2+C_5^1\times2^2+C_5^2\times2^3+C_5^3\times2^4+C_5^4\times2^5+C_5^5\times2^6$

$=2\times\left(C_5^0\times2^0+C_5^1\times2^1+C_5^2\times2^2+C_5^3\times2^3+C_5^4\times2^4+C_5^5\times2^5\right)=2\times(1+2)^5=486$，

$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=2^5=32$， 所以 $C_5^0a_1+C_5^1a_2+C_5^2a_3+C_5^3a_4+C_5^4a_5+C_5^5a_6$

$=486-32=454$， 故选：D

强化练习

1．（2022·北京·统考高考真题）若 $(2x-1)^4=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$， 则 $a_0+a_2+a_4=$（　）

A． 40　　B． 41　　C． -40　　D． -41

【答案】B

【解析】令 $x=1$， 则 $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1$，

令 $x=-1$， 则 $a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=(-3)^4=81$，

故 $a_4+a_2+a_0=\dfrac{1+81}{2}=41$，

故选：B.

2．（2023·浙江·永嘉中学校联考模拟预测）已知多项式 $(x-2)^5+(x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5+a_6x^6$， 则 $a_1=$（　）

A． 11　　B． 74　　C． 86　　D． -1

【答案】B

【解析】对于 $(x-2)^5$， 其展开通项公式为 $T_{r+1}=C_5^rx^{5-r}(-2)^r$，

令 $5-r=1$， 得 $r=4$， 故 $T_5=C_5^4x(-2)^4=80x$，

对于 $(x-1)^6$， 其展开通项公式为 $T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}(-1)^k$，

令 $6-k=1$， 得 $k=5$， 故 $T_6=C_6^5x(-1)^5=-6x$，

所以 $a_1=80-6=74$.

故选：B.

3．（2023·上海静安·统考一模）在 $\left(3x+x^{-\frac{2}{3}}\right)^n$ 的二项展开式中， $C_n^r3^{n-r}x^{n-\frac{5r}{3}}$ 称为二项展开式的第 $r+1$ 项， 其中 r=0， 1， 2， 3， ……， n． 下列关于 $\left(3x+x^{-\frac{2}{3}}\right)^n$

的命题中，不正确的一项是（　）

A．若$n=8$，则二项展开式中系数最大的项是$C_8^2 3^6 x^{\frac{14}{3}}$．

B．已知$x>0$，若$\boldsymbol{n=9}$，则二项展开式中第 2 项不大于第 3 项的实数x的取值范围是

$0<x\le\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$．

C．若$n=10$，则二项展开式中的常数项是$C_{10}^4 3^4$．

D．若$n=27$，则二项展开式中x的幂指数是负数的项一共有 12 项．

【答案】D

【解析】A 选项：令$\begin{cases}C_8^r 3^{8-r}>C_8^{r+1}3^{7-r}\\ C_8^r 3^{8-r}>C_8^{r-1}3^{9-r}\end{cases}$，解得$\frac{5}{4}<r<\frac{9}{4}$，所以$r=2$，所以 A 正确；

B 选项：$C_9^1 3^8 x^{\frac{22}{3}}\le C_9^2 3^7 x^{\frac{17}{3}}$，整理可得$x^{\frac{5}{3}}\le\frac{4}{3}$，当$0<x\le 1$时，不等式恒成立；当$x>1$时，

解得$1<x\le\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$，所以$0<x\le\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$，故 B 正确；

C 选项：令$10-\frac{5}{3}r=0$，解得$r=6$，所以常数项为$C_{10}^6 3^{10-6}=C_{10}^4 3^4$，故 C 正确；

D 选项：令$27-\frac{5r}{3}<0$，解得$r>\frac{81}{5}$，所以r可取$17,18\cdots,27$，共 11 项，故 D 错.

故选：D.

4．（2023·安徽宿州·统考一模）设$(1+2x)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，若$a_7=a_8$，则$n=$（　）

A．8　　　　B．9　　　　C．10　　　　D．11

【答案】D

【解析】由题可知，$a_7x^7=C_n^7\times1^{n-7}\times(2x)^7=2^7C_n^7x^7$，所以$a_7=2^7C_n^7$；

同理可得$a_8=2^8C_n^8$；

由$a_7=a_8$可得$2^7C_n^7=2^8C_n^8$，即$C_n^7=2C_n^8$，

所以$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-6)}{1\times2\times3\times\cdots\times7}=2\times\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-7)}{1\times2\times3\times\cdots\times8}$，即$2\times\frac{n-7}{8}=1$，

解得$n=11$．

故选：D

5．（2023 秋·辽宁营口·高三统考期末）二项式$\left(2x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$的展开式所有项的系数和为 243，则展开式中的常数项为（　）

A．10　　　　　　　B．20　　　　　　　C．30　　　　　　　D．50

【答案】A

【解析】展开式所有项的系数和为 243，

所以令 $x=1$ 则有，$3^n=243$，n＝5，

所以展开式通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r(2x^2)^{5-r}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=2^{5-r}C_5^r x^{10-\frac{5}{2}r}$，

令 $10-\frac{5}{2}r=0$ 解得 $r=4$，

所以展开式的常数项为 $T_5=2^1C_5^4=10$，

故选:A

6．（2023 春·河南新乡·高三校联考开学考试）若二项式 $\left(2x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 的展开式中只有第 5 项的二项式系数最大，则展开式中 x^2 项的系数为（　　）

A．-1120　　　　　　B．-1792　　　　　　C．1792　　　　　　D．1120

【答案】D

【解析】因为展开式中只有第 5 项的二项式系数最大，所以 $n=8$.

通项为 $T_{r+1}=C_8^r(2x)^{8-r}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r=C_8^r2^{8-r}\cdot(-1)^r x^{8-\frac{3}{2}r}$，

令 $8-\frac{3}{2}r=2$，得 $r=4$，所以展开式中 x^2 项的系数为 $C_8^4 2^4(-1)^4=1120$.

故选：D.

7．（2023 春·江苏常州·高三校联考开学考试）设

$C_n^0(x+2)^n-C_n^1(x+2)^{n-1}+C_n^2(x+2)^{n-2}-\cdots+(-1)^nC_n^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，则

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=$（　　）

A．$2^{n-1}-2$　　　　　　B．$2^{n-1}-1$　　　　　　C．2^n-2　　　　　　D．2^n-1

【答案】C

【解析】因为 $C_n^0(x+2)^n-C_n^1(x+2)^{n-1}+C_n^2(x+2)^{n-2}-\cdots+(-1)^nC_n^n=\left(x+2-1\right)^n=\left(x+1\right)^n$，

所以 $\left(x+1\right)^n=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

当 $x=1$ 时，$a_0+a_1+\cdots+a_n=\left(1+1\right)^n=2^n$；

当 $x=0$ 时，$a_n=(2-1)^n=1$；

由等式左右两边 x^n 系数相等可得 $a_0=C_n^0=1$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=2^n-2$，

故选：C.

8．（2023·高三课时练习）设$(2x+1)^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_6(x+1)^6$，则下列结论中错误的是（　）．

A．$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6=3^6$

B．$a_2+a_3=-100$

C．a_1，a_2，a_3，…，a_6中最大的是a_2

D．当x=999时，$(2x+1)^6$除以2000的余数是1

【答案】C

【解析】在$(2x+1)^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_6(x+1)^6$中，

令$x=-2$，得$3^6=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6$，故A正确；

因为$(2x+1)^6=(-2x-1)^6=\left(-2(x+1)+1\right)^6=\left(1-2(x+1)\right)^6=1-\mathrm{C}_6^1\cdot 2(x+1)+\mathrm{C}_6^2\cdot 2^2(x+1)^2$

$-\mathrm{C}_6^3\cdot 2^3(x+1)^3+\mathrm{C}_6^4\cdot 2^4(x+1)^4-\mathrm{C}_6^5\cdot 2^5(x+1)^5+2^6\cdot(x+1)^6$，

所以$a_0=1$，$a_1=-2\mathrm{C}_6^1=-12$，$a_2=4\mathrm{C}_6^2=60$，$a_3=-8\mathrm{C}_6^3=-160$，$a_4=16\mathrm{C}_6^4=240$，

$a_5=-32\mathrm{C}_6^5=-192$，$a_6=64$，

所以$a_2+a_3=60-160=-100$，故B正确；

由以上可知，a_1，a_2，a_3，…，a_6中最大的是a_4，故C不正确；

当$x=999$时，$x+1=1000$，$a_1(x+1),a_2(x+1)^2,\cdots,a_6(x+1)^6$都能被2000整除，而$a_0=1$，所以$(2x+1)^6$除以2000的余数是1，故D正确.

故选：C

9．（2023·高三课时练习）在$(x+1)(2x+1)\cdots(nx+1)$（n为正整数）的展开式中，x的一次项的系数为（　）．

A．C_n^2　　B．C_{n+1}^2　　C．C_n^{n-1}　　D．$\frac{1}{2}\mathrm{C}_{n+1}^3$

【答案】B

【解析】从$x+1$中取x，其它取1相乘，得一次项为x，

从$2x+1$中取$2x$，其它取1相乘，得一次项为$2x$，

$\cdots$，

从$nx+1$中取nx，其它取1相乘，得一次项为nx，

所以在$(x+1)(2x+1)\cdots(nx+1)$（n为正整数）的展开式中，x的一次项为$(1+2+\cdots n)x$，

所以x的一次项的系数为$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\mathrm{C}_{n+1}^2$.

故选：B

10．（2023·高三课时练习）若$(1-x)^{2023}=a_0+a_1(x+1)+\cdots+a_{2023}(x+1)^{2023}$，$x\in\mathbf{R}$，则