

摘要

推理是数学核心素养的基本要素之一。在数学学习中，针对不同的概念领域需要不同类型的推理能力，如代数推理能力、几何推理能力及统计推理能力等等。但人们总是片面地认为“图形几何”部分是培育推理能力的沃土，认为数学推理就是几何中的推理，而无视“数与代数”领域对学生代数推理能力的价值和意义。实际上，数与代数中的运算本身就蕴含着严格的演绎推理，代数推理是数学推理中重要的一类，对学生代数知识的学习和创新意识的培养具有重要作用。

本文以“初三学生代数推理能力的现状如何？”、“影响初三学生代数推理能力的因素有哪些？”和“促进初三学生代数推理能力发展的策略有哪些？”三个关键问题展开研究，在借鉴相关研究的基础上，构建代数推理能力测评框架，并以四川省 P 市两所中学的 236 名初三学生和 4 名一线数学教师为研究对象，主要采用的研究方法有：调查法、文献法，得到 P 市初三学生代数推理能力的现状如下：整体上看初三学生代数推理能力不强，大部分学生的代数推理能力测试成绩较低。在内容维度上，初三学生在代数式部分最优，函数部分次之，方程部分最弱。在类型维度上，学生在代数推理中的合情推理能力更强。在水平维度上，学生在水平一上表现最好，水平二次之，在水平三上的表现最差，且两极分化较为严重。在性别维度上，总体而言男生女生的差距不大，不存在显著差异。学校维度上，市属中学和县级中学的学生代数推理水平差异性不明显，但在部分分子维度上，市属中学学生代数推理表现优于县级中学学生。结合影响因素问卷及教师访谈，得出初三学生代数推理能力的因素，主要包括两个方面，其中内部因素有：（1）学生对推理的认知；（2）学生的数学学习策略；（3）学生的知识结构；（4）学生的自我效能感。外部因素有：（1）教师的教学方式；（2）教师对代数推理的认知。（3）题海战术的影响。

基于以上研究，为提升初三学生代数推理能力提出以下培养策略，以供一线教师参考：（1）教师要关注数学语言转换，提升学生的数学表达能力；（2）教师可根据实际情况，立足课堂开展探究，在探究中培养学生的演绎推理能力；（3）教师应把握教学关键期，使学生螺旋进阶地感悟代数推理，此外还要重视渗透学习策略，增强代数推理能力；（4）教师要引导学生构建知识网络，发展学生数学认知结构；（5）教师可调节课堂氛围，以提高学生的推理兴趣及信心。

关键词：初三学生；代数推理；影响因素；培养策略

Abstract

Reasoning is one of the basic elements of the core literacy of mathematics. In mathematics learning, different types of reasoning skills are required for different conceptual areas, such as algebraic reasoning ability, geometric reasoning ability, statistical reasoning ability, etc. However, people always one-sidedly think that the "graphic geometry" part is a fertile ground for cultivating reasoning ability, and think that mathematical reasoning is reasoning in geometry, while ignoring the value and significance of the field of "number and algebra" to students' algebraic reasoning ability. In fact, the operations in numbers and algebra themselves contain strict deductive reasoning, algebraic reasoning is an important category of mathematical reasoning, which plays an important role in the learning of students' algebra knowledge and the cultivation of innovative awareness.

This article begins with "What is the current status of algebraic reasoning ability of junior high school students?" "What are the factors that affect the algebraic reasoning ability of junior high school students?" And "What are the strategies to promote the development of algebraic reasoning skills in junior high school students?" "Three key issues were studied, and on the basis of relevant research, an algebraic reasoning ability assessment framework was constructed, and 236 junior high school students and 4 front-line mathematics teachers from two middle schools in P City, Sichuan Province were used as the research objects, and the main research methods were as follows The survey method and literature method show that the current situation of algebraic reasoning ability of junior high school students in P City is as follows: On the whole, the algebraic reasoning ability of junior high school students is not strong, and most of the students have low algebraic reasoning ability test results. In the content dimension, junior high students are best in the algebraic part, the function part is second, and the equation part is the weakest. In the type dimension, students have stronger ability to reason reasoning in algebraic reasoning. In the horizontal dimension, students performed best at level 1, at level 2, and at level 3 the worst, and the polarization was more serious. In the gender dimension, in general, the gap between boys and girls is not large, and there is no significant difference. In the school dimension, the difference in algebraic reasoning level

between students in municipal middle schools and county-level middle schools was not obvious, but in some sub-dimensions, the algebraic reasoning performance of municipal middle school students was better than that of county-level middle school students. Combined with the influencing factor questionnaire and teacher interviews, the factors of algebraic reasoning ability of junior high school students mainly include two aspects, among which the internal factors are: (1) students' cognition of reasoning; (2) students' mathematics learning strategies; (3) the student's knowledge structure; (4) Students' self-efficacy. External factors include: (1) teachers' teaching methods; (2) Teachers' cognition of algebraic reasoning. (3) The impact of sea tactics.

Based on the above research, the following training strategies are proposed to improve the algebraic reasoning ability of junior grade 3 students for the reference of front-line teachers: (1) teachers should pay attention to mathematical language conversion to improve students' mathematical expression ability; (2) Teachers can carry out inquiry based on the classroom according to the actual situation, and cultivate students' deductive reasoning ability in the inquiry; (3) Teachers should grasp the critical period of teaching, so that students can spiral and gradually understand algebraic reasoning, in addition to paying attention to penetration learning strategies to enhance algebraic reasoning ability ; (4) Teachers should guide students to build knowledge networks and develop students' mathematical cognitive structure; (5) Teachers can adjust the classroom atmosphere to improve students' interest and confidence in reasoning.

Keywords: junior grade 3 students; algebraic reasoning; influencing factors; cultivation strategies

目录

一、绪论	1
(一) 研究背景	1
1.落实数学课程标准的要求	1
2.代数推理能力的重要性	2
3.形成学生核心素养的需要	2
(二) 研究问题	3
(三) 研究目的及意义	3
1.研究目的	3
2.研究意义	3
(四) 核心概念界定	4
1.数学推理	4
2.代数推理	5
3.代数推理能力	7
(五) 理论基础	8
二、文献综述	10
(一) 代数推理能力的内涵及分类的相关研究	10
1.代数推理能力的内涵	10
2.代数推理能力的分类	12
(二) 代数推理能力测评的相关研究	15
1.数学推理能力测评的相关研究	15
2.代数推理能力测评的相关研究	18
(三) 代数推理能力培养的相关研究	21
(四) 文献述评	24
三、研究过程及方法	26
(一) 研究思路	26
(二) 研究对象	27
(三) 研究方法	27
1.文献法	27
2.调查法	28

(四) 研究工具	28
1.代数推理能力测评框架	28
2.代数推理能力测评指标	30
3.代数推理能力学生测试卷	31
4.代数推理能力学生调查问卷	34
5.代数推理能力教师访谈提纲	36
四、初三学生代数推理能力现状分析	37
(一) 初三学生代数推理能力整体情况分析	37
(二) 初三学生代数推理能力分维度情况分析	42
1.内容维度得分情况分析	42
2.结构维度得分情况分析	44
3.水平维度得分情况分析	45
(三) 初三学生代数推理能力差异性分析	47
1.代数推理能力的性别差异性分析	47
2.代数推理能力的学校差异性分析	50
五、初三学生代数推理能力的影响因素分析	55
(一) 内部因素	55
1.学生对推理的认知	55
2.学生的数学学习策略	57
3.学生的知识结构	59
4.学生的自我效能感	60
(二) 外部因素	61
1.教师的教学方式	61
2.教师对代数推理的认知	62
3.题海战术的影响	63
六、初三学生代数推理能力的培养策略	64
(一) 关注数学语言转换, 提升数学表达能力	64
(二) 立足课堂开展探究, 注重演绎推理	65
(三) 把握教学关键期, 螺旋进阶感悟代数推理	65
(四) 重视渗透学习策略, 增强代数推理能力	66
(五) 构建知识网络, 发展学生数学认知结构	68
(六) 调节课堂氛围, 提高推理兴趣及信心	69

七、研究结论与反思	71
(一) 研究结论	71
(二) 研究反思	72
参考文献	74
(一) 著作	74
(二) 期刊	74
(三) 学位论文	77
(四) 其它	77
致谢	78
附录 A 初三学生代数推理能力测试卷	80
附录 B 初三学生代数推理能力问卷	82
附录 C 教师访谈提纲	84
附录 D 测试卷各题评分标准	85
附录 E 重要统计表	91
个人简历、在学期间发表的学术论文及研究	92

一、绪论

当今世界，国际竞争日趋激烈，各国都面临着一个必然的选择，即提高全民素质、培养新型人才，增强综合国力，提高国际竞争力。基础教育的质量直接影响着一个国家的全民素质，也决定了国家劳动力的水平，进而影响了国家的全面发展。因此，基础教育是影响一个民族、国家是否可持续发展和具有综合竞争力的决定性因素。

数学是基础教育中的基础，数学素养是当今世界每一个公民应当具备的基本素养，数学教育在其中承载着落实立德树人根本任务、实施素质教育的重要功能^①。数学课程致力于培养的核心素养可概括为“三会”，即会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界。^②因此，数学核心素养的本质就是抽象、推理、模型^③。显然，数学推理是数学核心素养的基本要素之一。代数推理是数学推理中重要的一类，对学生代数知识的学习和创新意识的培养具有重要作用。因此对初中学生代数推理能力的研究有其必要性且具有重要意义。

（一）研究背景

1. 落实数学课程标准的要求

美国在 1989 年 NCTM 公布的《美国学校数学课程与评价标准》中提出“学生会数学推理”的新目标；在 1998 年颁布的《学校数学的原则和标准》指出“应当集中精力学会将推理和证明作为理解数学的一部分，以便所有学生承认推理和证明是数学的本质和有利的部分，提出和考察数学猜想，发展和评价数学争论与证明，选择和使用各种适当的推理形式和证明方法”。^④第 24 届国际数学家大会，数学教育圆桌会议将发展和提高学生的推理能力作为数学教育的新任务。

世界各国数学教育界对于推理能力都有各自的理解和要求。从我国《全日制义务教育数学课程标准》（实验稿）到 2011 年修订的《义务教育数学课程标准（2011 年版）》（以下简称《标准 2011》）再到 2022 年最新修订的《义务教育数学课程标准（2022 年版）》（以下简称《标准 2022》）推理能力一直都是其中

① 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022: 1.

② 在义务教育阶段数学的眼光主要是抽象能力(包括数感、量感、符号意识)、几何直观、空间观念与创新意识; 数学的思维主要是运算能力、推理意识或推理能力; 数学的语言主要指数据意识或数据观念、模型意识或模型观念、应用意识。

③ 史宁中. 数学基本思想 18 讲[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2016: 前言.

④ 全美数学教师理事会著. 美国学校教学教育的原则和标准[M]. 蔡金法等译. 北京: 人民教育出版社, 2004: 126.

的核心概念，最新修订的《标准 2022》将推理能力作为数学核心素养的主要表现之一，并且特别地在课程内容中提出要了解代数推理，要尤其关注有关代数的逻辑推理，比如韦达定理的论证，而在新课程标准施行之际调查研究学生的代数推理能力现状，是必要之举，也是落实课程标准的必由之路。

2.代数推理能力的重要性

在数学学习中，针对不同的概念领域需要不同类型的推理能力，如代数推理能力、几何推理能力、或然性推理、统计的推理能力等等。^①但是，大家总是片面地认为“图形与几何”部分是培育推理能力的沃土，而无视“数与代数”领域对学生代数推理能力的价值和意义，而几何中所涉及的推理主要是演绎推理，侧重于证明中的推理，对人的思维保持严密性、一贯性有着不可替代的校正作用。但数学推理并不只包含几何图形中所涉及的演绎推理。实际上，在数与代数中运算自身就有着严格的演绎推理，比如解一个简单的方程组：

$$\begin{cases} 3x+10y=2.8 \\ 15x-10y=8 \end{cases}$$

通过观察两个方程的结构特征后发现可以用加减消元法来解方程组，进行加减消元的运算操作的过程，实际上就是依据等式的性质（等式两边同时加上同一个数或式，等式仍然成立）为大前提而进行的演绎推理。此外，在数与代数中，更多地涉及到合情推理，例如，探索数字变化或图形的数量规律为培养学生合情推理能力而量身定制的学习内容，不论是探索简单的变化规律还是探求给定事物中隐含的规律或变化趋势，都是一个展开合情推理的过程。^②因此，必需重视代数推理能力的培养。

3.形成学生核心素养的需要

《标准 2022》指出数学课程要培养的学生核心素养，其中提到“会用数学的思维来思考现实世界”，数学的思维主要指运算能力、推理意识或推理能力^③。推理能力是每个公民所必需的基本素养，也是提高学生创新意识、培养创造性人才的关键。作为核心素养的重要组成部分之一，培养学生的推理能力对学生数学核心素养的形成和发展具有显著作用。学生的数学核心素养不论是在义务教育阶段，还是在高中阶段，都具有整体性、一致性和阶段性。随着我国课程要求进一步完善了培养目标，强化了课程育人的导向，我们的数学教学已经不再只抓知识和技能，已经实现由“双基”转变至“四基”的跨越式发展，数学教学要促进学生发展，培养时代新人，要让学生在获得数学活动经验的基础上，在领悟数学基本思

① 徐斌艳.数学推理活动在数学教育中的意义[J].全球教育展望,2001(03):39-43.

② 金晶.“数与代数”教学中如何培养学生的推理能力[J].数学教学研究,2011,30(10):64-67.

③ 中华人民共和国教育部.义务教育数学课程标准(2022年版)[S].北京:北京师范大学出版社,2022:6.

想的过程中，形成数学核心素养。代数推理能力作为推理能力的组成部分，对学生核心素养的养成具有重要的研究价值。

（二）研究问题

代数推理对培养学生抽象思维能力、逻辑思维能力具有重要意义。通过查阅文献发现，国内多数研究都将代数推理作为一种解题方法，聚焦于考试中的代数推理题。^{①②}虽有部分研究者关注到在教学中培养学生的代数推理能力，但仍缺乏相关理论研究，缺少实证研究，特别是对其现状情况的调查。倘若研究者不了解学生代数推理能力的现状，那么后续开展的所有研究就都没有意义。因此对于代数推理的研究不能只着眼于解决代数推理题目，形式化地改变教学方法。应从对代数推理教学的评价出发，发现教师、学生在代数推理教学中存在的问题，进而采取针对性措施，尝试从根本上解决问题。

基于上述分析，笔者首先参考相关推理能力研究的测评工具，并在此基础上微调，使其适用于初三学生代数推理能力的测评，而后利用该工具对初三学生的代数推理能力进行测验，本研究主要聚焦于下列问题：

- 1.初三学生代数推理能力发展的情况如何？
- 2.影响初三学生代数推理能力的因素有哪些？
- 3.促进初三学生代数推理能力发展的策略有哪些？

（三）研究目的及意义

1.研究目的

代数推理能力是学生的推理能力在具体代数问题情境下的表现，对学生的代数学习具有非常重要的作用。^③在《标准 2022》进一步增加代数推理的背景下，本研究旨在了解初三学生代数推理能力现状，并在此基础上提出可行的教学策略，以切实提高学生的代数推理能力，助力创新思维的发展。具体研究目的如下：

（1）通过文献梳理，明确代数推理的内涵，修改出适合测评初三学生代数推理能力测评框架；

（2）了解 P 市初三学生代数推理能力的水平，明确影响因素；

（3）为促进学生代数推理能力进一步发展提出针对性的教学策略。

2.研究意义

① 黄泽.代数推理问题[J].中学数学教学参考, 2007,(05):32-33+35.

② 郑日锋.解决代数推理题的常见策略[J].中学教研(数学), 2007(03):38-41.

③ Otten M, Heuvel-Panhuizen M V D, Veldhuis M, et al. Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool [J]. Journal for the Study of Education and Development, 2019, 42(3):615-663.

一、绪论

代数推理能力是学生在生活、后续学习和工作中所需要的重要能力，代数作为研究数的关系、性质和运算法则的课程，更是培养学生的抽象思维，学会用数学的眼光看待现实世界的重要内容。^①因此通过调查研究来测验研究初三年级学生的代数推理能力，具有重要的理论和实践意义。

（1）理论意义

通过文献检索发现，目前国内关于“代数推理”的研究还比较欠缺，关于代数推理的内涵、形式及内容还没有较为全面的论述，专门用于测评学生代数推理能力的工具较少。研究的理论意义在于：基于国内外已有研究成果，进一步理清代数推理的内涵、形式及教学方面的理论成果，在此基础上调整并构建适合测评初三年级学生代数推理能力及具体行为表现的评价框架。依据评价框架编制代数推理能力的测试卷、问卷及访谈提纲，具体阐述研究工具的编制开发过程。不仅能弥补相关理论研究的不足，丰富测评代数推理能力的经验素材，同时为今后代数推理的相关研究贡献些许参考。

（2）实践意义

本研究通过改编得到学生代数推理能力的测试卷、问卷及访谈提纲，借助这些工具了解到 P 市初三学生代数推理能力情况，比如，在哪些方面的表现较好？在哪些方面的表现还不理想？哪些类型学生在代数推理过程中遇到了困难？对收集到的数据进行分析，发现其中存在的问题，并提出针对性的措施改善课堂教学，从而提升学生代数推理能力，帮助学生更好地适应后续的代数学习。同时针对大家忽视代数中的推理这一现象，本研究使其认识到代数推理的重要性，特别地关注代数中的演绎推理，对于初中学生来讲，接触的较多的是几何图形中的演绎推理，比如证明两个三角形全等、相似等等，而对有关代数证明的问题却较为束手无策，需要特别关注。希望本研究能够给初中数学教师教学提供些许参考。

（四）核心概念界定

本研究以“初三学生代数推理能力现状调查研究”为题，为了避免混淆明确研究内容及其范围，下面对文中将会涉及的核心概念进行界定说明。

1. 数学推理

推理是“从一个或几个已知判断（前提）得出一个判断（结论）的思维过程”^②，是对判断间逻辑关系的认识。基于对“推理”的认识，再结合数学教育教学

^① 孙思雨, 孔企平. 早期代数: 国际小学数学课程改革的新热点[J]. 小学数学教师, 2019(06): 84-88.

^② 方富熹, 方格, 朱莉琪. “如果 P, 那么 Q, ……”? ——儿童充分条件假言演绎推理能力发展初探[J]. 心理学报, 1999(03): 322-329.

一、绪论

的感悟，便有了对数学学科中推理的研究。数学推理作为数学教育的重心，历来都备受关注，世界各国都将数学推理能力作为学生的一项重要能力来培养。^①一千个人心中有一千个哈姆雷特，对于数学推理的理解也是如此，数学界主要有以下几种理解。一是何小亚从逻辑学的角度出发，结合一般推理的过程，指出数学推理是由一个或几个已知的判断得出一个新的数学判断的思维形式^②，具体包括演绎推理和合情推理。二是 Brodie 认为数学推理是在“两个想法或数学概念之间构建的一条，用以论证或解决问题的路径”^③。三是徐斌艳认为数学推理是“指人们在数学观念系统作用下，由若干数学条件，结合一定的数学知识、方法，对数学对象形成某种判断的思维操作过程。”^④史宁中也认为“数学推理就是从从一个数学命题判断到另一个数学命题判断的思维过程。”^⑤从结果上来讲，数学推理的最终目的是为了得到数学命题或者验证数学命题的思维过程。四是 PISA2012 框架从问题解决中的思维角度，将数学推理定义为评估现实情况、选择解决策略、得出有逻辑的结论、制定和描述解决方案，以及应用方案来解决实际问题的过程^⑥。美国心理学家斯滕伯格依据其教学经验、实践调查以及对学学生认知过程的分析，给出对数学推理的独特理解，将数学推理划分为分析性推理、创造性推理和实践性推理三种形式。^{⑦⑧}

综合以上观点，不难得出以下认识，即数学推理就是运用观察、联想、归纳类比等科学方法，对对象的数量关系或空间形式做出猜想，运用演绎的方法加以证明，从而得到一个新的数学命题判断的思维过程；数学推理的方式一般可分为合情推理（归纳推理、类比推理）和演绎推理；数学推理的类型有几何推理和代数推理^⑨。

2. 代数推理

(1) 代数

代数是代数学的简称，是重要的、基础的数学分支。^⑩对于什么是代数的问题，是研究代数推理能力的一个基本而重要的问题。根据桂德怀、徐斌艳的研究

① 程靖,孙婷,鲍建生.我国八年级学生数学推理论证能力的调查研究[J].课程.教材.教法,2016,36(04):17-22.

② 何小亚.学生数学素养指标的理论分析[J].数学教育学报,2015,24(1):13-20.

③ BRODIE K. Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms [M]. Springer US, 2010:6.

④ 徐斌艳.数学学科核心能力研究[J].全球教育展望, 2013 (6):67-74.

⑤ 史宁中.数学基本思想 18 讲[M].北京:北京师范大学出版社,2016:12.

⑥ OECD.PISA 2021 mathematics framework(draft)[R]. Paris: OECD Publishing, 2018:14.

⑦ Robert J.Sternberg.The Nature of Mathematical Reasoning[J].National Council of Teachers of Mathematics,1999 (1):12-15.

⑧ 宁连华.数学推理的本质和功能及其能力培养[J].数学教育学报,2003(03):42-45.

⑨ 钱德春.关于初中代数推理的理解与教学思考[J].中学数学教学参考,2020(11):2-4.

⑩ 刘久成,刘久胜.代数思维及其教学[J].课程.教材.教法,2015,35(12):76-81.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/337042032105006142>