【复试】2024年大连海事大学070200物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟5套卷

主编：掌心博阅电子书

青岛掌心博阅电子书 出品

特别说明

本书严格按照该科目考研复试最新题型、试题数量和复试考试难度出题，结合学长历年考研复试经验，整理编写了五套复试仿真模拟试题及答案解析并由学长严格审核校对。其内容涵盖了这一复试科目常出试题及重点试题，针对性强，是复试备考复习的重要资料。

版权声明

因编撰此考研电子书属于首次，加之作者水平和时间所限，书中错漏之处在所难免，恳切希望广大考生读者批评指正。

目录

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（一）......4

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（二）......11

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（三）......18

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（四）......23

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（五）......31

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（一）

说明：本书按照复试要求、大纲真题、指定参考书等公开信息潜心整理编写，由学长严格审核校对，仅供考研备考使用，与目标学校及研究生院官方无关，如有侵权请联系我们立即处理。

一、计算题

1. **在一维无限深势阱中运动的粒子，势阱的宽度为 a，如果粒子的状态由波函数**

$$\psi(x) = Ax(a-x)$$

描写，A 为归一化常数，求粒子能量的概率分布和能量的期望值。

【答案】由 $\int_0^a \psi^* \psi \mathrm{d}x = 1$ 求出

归一化系数 $A = \sqrt{\dfrac{30}{a^5}}$

一维无限深势阱本征函数为

$\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{a}} \sin\dfrac{n\pi x}{a}$(阱内)

粒子概率分布函数

$$|c_n^2| = |<\psi_n|\psi(x)>|^2 = \left|\int_0^a \psi_n^* \psi \mathrm{d}x\right|^2$$

$$= \left|\int_0^a \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a} \cdot \sqrt{\frac{30}{a^5}} A(a-x)\mathrm{d}x\right|^2$$

$$\doteq \begin{cases} 0 & n \text{ 为偶数} \\ \dfrac{960}{n^6\pi^6} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\overline{E} = \sum_{n\text{为奇数}} \frac{960}{n^6\pi^6} \cdot \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2} = \frac{480\hbar^2}{\mu a^2\pi^4} \sum_{n\text{为奇数}} \frac{1}{n^4} = \frac{5\hbar^2}{\mu a^2}$$

2. **两个粒子被束缚在一个边长为 a > b > c 的长方体盒子中运动，粒子间的互作用势为 $V(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = A\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ 可以作为微扰，其中 x_1, x_2 分别为两个粒子的坐标，A 为实常量，利用一级微扰论讨论在三种情况下体系的最低能量态的能量。**

(1)非全同(可分辨)粒子;

(2)两个粒子为自旋为 0 的全同玻色子;

(3)两个粒子为自旋为 $\dfrac{1}{2}$ 的全同费米子，且这两个粒子的自旋平行(即总自旋为 1)。

【答案】(1)可分辨粒子

未微扰体系的波函数可表示为两个单粒子波函数的直积:

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \psi(\boldsymbol{r}_1)\psi(\boldsymbol{r}_2)$$

在 $0<x_i<a, 0<y_i<b, 0<z_i<c$ 情况下，最低能态的波函数为

$$\psi_0(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{8}{abc} \sin\left(\frac{\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y_1}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi y_2}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z_1}{c}\right) \sin\left(\frac{\pi z_2}{c}\right)$$

在其他情况下，$\psi_0(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = 0$，最低能级为

$$E_0 = 2E_{111} = \frac{\hbar^2\pi^2}{\mu}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$

基态能量的一级修正为

$$E_0' = \iint \psi_0^*(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) A\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\psi_0(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2$$

$$= \frac{64A}{a^2b^2c^2}\int_0^a\int_0^b\int_0^c \sin^4\frac{\pi x}{a}\sin^4\frac{\pi y}{b}\sin^4\frac{\pi z}{c}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{27A}{8abc}$$

所以一级修正后的能量为

$$E_0=\frac{\hbar^2\pi^2}{\mu}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{27A}{8abc}$$

(2)对于玻色子(不可分辩)：要求体系波函数对粒子交换对称，所以最低能态为 $\psi_0(r_1,r_2)$，与(1)问相同。一阶修正后能量为 $E_s'=\frac{\hbar^2\pi^2}{\mu}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{27A}{8abc}$

(3)自旋平行，自旋波函数对称，要求空间波函数反对称，由于 a > b > c，所以$\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}<\frac{1}{c^2}$，最低能态为:

$$\psi_A(r_1,r_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_{211}(r_1)\psi_{111}(r_2)-\psi_{211}(r_2)\psi_{111}(r_1)]$$

其中 $\psi_{111}(r)$与$\psi_{211}(r)$分别是单粒子基态和第一激发态，体系的总波函数为

$$\Phi^{(0)}(r_1,r_2,s_{1z},s_{2z})=\psi_A(r_1,r_2)\chi_{1m_s}(s_{1z},s_{2z}),m_s=0,\pm1$$

$$E_{A0}=\frac{\hbar^2\pi^2}{\mu}\left(\frac{5}{2a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

虽然能级是三重简并的，但因为微扰矩阵的非对角元为零，故对角元素为能级一级修正，一阶微扰论给出

$$\Delta E=\int\psi_A^*(r_1,r_2)A\delta(r_1-r_2)\psi_A(r_1,r_2)\mathrm{d}r_1\mathrm{d}r_2=0$$

所以一级近似能量为

$$E'_A=\frac{\hbar^2\pi^2}{\mu}\left(\frac{5}{2a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

3． **设 t=0 时,粒子的状态为**

$$\psi(x)=A[\sin^2kx+\frac{1}{2}\cos kx]$$

求此时粒子的动量期望值和动能期望值。

【答案】$\psi(x)=A(\sin^2kx+\frac{1}{2}\cos kx)$

写成平面波，$\psi(x)=\frac{A}{2}e^{i0x}-\frac{A}{4}e^{i2kx}-\frac{A}{4}e^{-i2kx}+\frac{A}{4}e^{ikx}+\frac{A}{4}e^{-ikx}$

可以看出是由 5 个平面波叠加而成

由归一化条件$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2\mathrm{d}^3x=1$

得$A=\sqrt{2}$

5 个平面波

对应能量为 $0,\hbar k,2\hbar k,-\hbar k,-2\hbar k$

对应动量为 $0,\frac{(\hbar k)^2}{2\mu},\frac{(\hbar k)^2}{2\mu},\frac{(2\hbar k)^2}{2\mu},\frac{(2\hbar k)^2}{2\mu}$

对应概率为 $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2,(\frac{\sqrt{2}}{4})^2,(\frac{\sqrt{2}}{4})^2,(\frac{\sqrt{2}}{4})^2,(\frac{\sqrt{2}}{4})^2$

因此 $\bar{p}=\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{8}\times\hbar k+\frac{1}{8}(-\hbar k)+\frac{1}{8}(+2\hbar k)+\frac{1}{8}(-2\hbar k)=0$

$$\bar{T}=\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{8}\times\frac{(\hbar k)^2}{2\mu}+\frac{1}{8}\times\frac{(-\hbar k)^2}{2\mu}+\frac{1}{8}\frac{(2\hbar k)^2}{2\mu}+\frac{1}{8}\frac{(-2\hbar k)^2}{2\mu}=\frac{5\hbar^2k^2}{8\mu}$$

4． **已知条件：粒子状态 $\psi(x)$**

待求问题：$\bar{p}$和$\overline{(\Delta x)^2}\cdot\overline{(\Delta p)^2}$

相互联系：$\bar{Q}=\int\psi^*(x)\hat{Q}\psi(x)\mathrm{d}x$

【答案】由题设状态$\psi(x)$容易计算出

$$\bar{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}x\psi\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{x^{2}}{2\xi^{2}}}\mathrm{d}x=0$$

$$\overline{x^{2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}x^{2}\psi\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi\xi^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}x^{2}e^{-\frac{x^{2}}{2\xi^{2}}}\mathrm{d}x=\xi^{2}$$

因此坐标的量子涨落为

$$\overline{(\Delta x)^{2}}=\overline{x^{2}}-\bar{x}^{2}=\xi^{2}\qquad\text{(a)}$$

而

$$\bar{p}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi\mathrm{d}x=\frac{-i\hbar}{\sqrt{2\pi\xi^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{i}{\hbar}p_{0}-\frac{x}{2\xi^{2}}\right)e^{-\frac{x^{2}}{2\xi^{2}}}\mathrm{d}x=p_{0}$$

$$\overline{p^{2}}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^{*}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{2}\psi\mathrm{d}x=\frac{-\hbar^{2}}{\sqrt{2\pi\xi^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{i}{\hbar}p_{0}-\frac{x}{2\xi^{2}}\right)^{2}-\frac{1}{2\xi^{2}}\right]e^{-\frac{x^{2}}{2\xi^{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\hbar^{2}}{\sqrt{2\pi\xi^{2}}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p_{0}^{2}}{\hbar^{2}}+\frac{1}{2\xi^{2}}-\frac{x^{2}}{4\xi^{4}}\right)e^{-\frac{x^{2}}{2\xi^{2}}}\mathrm{d}x=p_{0}^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2\xi^{2}}-\frac{\hbar^{2}\overline{x^{2}}}{4\xi^{4}}$$

$$=p_{0}^{2}+\frac{\hbar^{2}}{4\xi^{2}}$$

因此动量的量子涨落为

$$\overline{(\Delta p)^{2}}=\overline{p^{2}}-\bar{p}^{2}=\frac{\hbar^{2}}{4\xi^{2}}\qquad\text{(b)}$$

由(a)和(b)两式，最后得到

$$\overline{(\Delta x)^{2}}\cdot\overline{(\Delta p)^{2}}=\xi^{2}\frac{\hbar^{2}}{4\xi^{2}}=\frac{\hbar^{2}}{4}$$

5． **粒子处于二维无限深势阱中**

$$V(x,y)=\begin{cases}0 & 0<x<a,0<y<b\\ \infty & \text{其它区域}\end{cases}$$

求能量本征值和本征波函数，并讨论当 a=6 时基态及前两个激发态简并度

【答案】定态方程为

$$\left[-\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)+V(x,y)\right]\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

在 0＜x＜a，0＜y＜b 区域为 V(x，y)=0 于是有。

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}\right)\psi(x,y)=E\psi(x,y)$$

利用分离变量法设。$\psi(x,y)=X(x)Y(y)$代入得

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{X''}{X}-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{Y''}{Y}=E$$

记$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{X''}{X}=E_{1}$，$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{Y''}{Y}=E_{2}$

即$E=E_{1}+E_{2}$

再令$k_{1}=\sqrt{2mE_{1}}/\hbar,k_{2}=\sqrt{2mE_{2}}/\hbar$得

$$\begin{cases}X''+k_{1}^{2}X=0\\ Y''+k_{2}^{2}Y=0\end{cases}$$

由边界条件

$$\begin{cases}X(0)=X(a)=0\\ Y(0)=Y(b)=0\end{cases}$$

于是得

$$\begin{cases} X(x) = C_1 \sin k_1 x \\ Y(y) = C_2 \sin k_2 y \end{cases}$$

k_1, k_2满足

$$\begin{cases} k_1 a = n_1 \pi \\ k_2 b = n_2 \pi \end{cases}$$

即$E_1 = \dfrac{n_1^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2}$

$$E_2 = \frac{n_2^2 \hbar^2 \pi^2}{2mb^2}$$

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right)(n_1, n_2 = 1,2,3\cdots\cdots)$$

本征波函数

$$\psi(x,y) = X(x)Y(y) = C_1 \sin\frac{n_1\pi}{a}x \cdot C_2 \sin\frac{n_2\pi}{b}y$$

由归一条件求出$C_1C_2 = C = \dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

归一化本征波函数

$$\psi(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} x \sin\frac{n_1\pi}{a} x \sin\frac{n_2\pi}{b} y (n_1, n_2 = 1,2,3\cdots\cdots)$$

a=b 时，$E_{n_1,n_2} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}(n_1^2 + n_2^2)$

基态$n_1 = n_2 = 1 \quad E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}$

第一激发态二重简并对应能量$\dfrac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

($n_1 = 1, n_2 = 2$或$n_2 = 1, n_1 = 2$)

第二激发态不简并，对应能量$\dfrac{4\pi^2\hbar^2}{ma^2}$

(此时$n_1 = n_2 = 2$)

类似地可以讨论更高激发态的简并度。

6． **一个量子点中的单电子能级有两个本征值ε_1和ε_2，并且都是非简并的，其中$\varepsilon_1<\varepsilon_2$，它们相应的单电子空间波函数分别为 f(r)和 g(r)，试求该量子点中有两个电子时(电子的自旋为 1/2)，基态和第一激发态的波函数和能级简并度(假定电子间无相互作用)。**

【答案】不考虑电子间互作用，两电子系统总波函数应反对称，则

(1)空间部分

对称：

$$f(\boldsymbol{r}_1)f(\boldsymbol{r}_2)、g(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[f(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)+f(\boldsymbol{r}_2)g(\boldsymbol{r}_1)], \boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$$

反对称：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[f(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)-f(\boldsymbol{r}_2)g(\boldsymbol{r}_1)], \boldsymbol{r}_1 \neq \boldsymbol{r}_2$$

(2)自旋部分

对称：

$$\chi_S^{(1)} = \alpha(1)\alpha(2)$$

$$\chi_S^{(2)} = \beta(1)\beta(2)$$

$$\chi_S^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)+\alpha(2)\beta(1)]$$

反对称:

$$\chi_A=\frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(1)\beta(2)-\alpha(2)\beta(1)]$$

(3)可能的组合为

$$\psi=\begin{cases} f(\boldsymbol{r}_1)f(\boldsymbol{r}_2)\chi_A \\ g(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)\chi_A \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[f(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)+f(\boldsymbol{r}_2)g(\boldsymbol{r}_1)]\chi_A \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[f(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)-f(\boldsymbol{r}_2)g(\boldsymbol{r}_1)]\chi_S \end{cases}$$

所以基态

$$\psi_0=f(\boldsymbol{r}_1)f(\boldsymbol{r}_2)\chi_A$$

能级:

$$E_0=2\varepsilon_1,\text{ 非简并。}$$

第一激发态

$$\psi_{1A}=\frac{1}{\sqrt{2}}[f(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)+f(\boldsymbol{r}_2)g(\boldsymbol{r}_1)]\chi_A$$

$$\psi_{1S}=\frac{1}{\sqrt{2}}[f(\boldsymbol{r}_1)g(\boldsymbol{r}_2)-f(\boldsymbol{r}_2)g(\boldsymbol{r}_1)]\chi_S$$

能级: $E_0=\varepsilon_1+\varepsilon_2$, 四重简并。

二、简答题

7． 平行电子束经 37V 电场加速，垂直地入射到有 $a=1.0$ Å宽的窄缝的屏上(显然，这只能是一种假想实验)，一个1 Å 大小的小探测器在屏后 l=10cm 的地方垂直于窄缝及电子束入射方向扫描。(1)探测器所记录的强度花样的宽度近似为多少?(2)如果再有一个与第一个窄缝类似的第二个窄缝,它们相互平行，并且相距1 Å，则探测器观测到的强度花样如何变化?(3)假设将电子束的强度减弱，直到在给定时刻，在两窄缝和探测器之间的区域只有一个电子为止，此时衍射花样如何改变?(4)如果第二个透明的探测器横放于第一个窄缝中，以便了解一个特定的电子通过哪个窄缝，那么观测到的花样将是怎样的?

【答案】(1)如图所示，由光学类比知，若衍射花样中心谱线的宽度是x则x应等于两个第一极小之间的距离，由公式

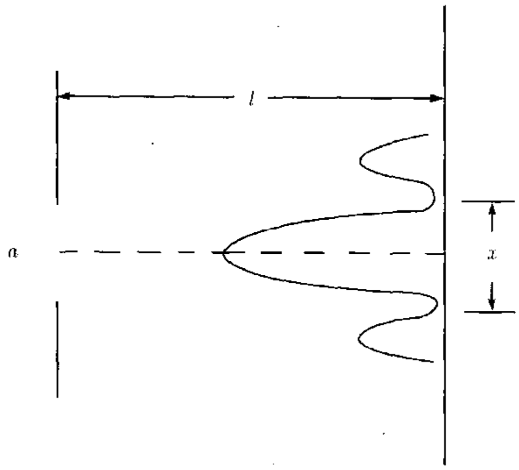
$$n\lambda=a\sin\phi\ (\text{n=1，2,}\cdots\text{，为衍射最小值序数})$$

知

$$\frac{x/2}{l}=\sin\phi=\frac{\lambda}{a}$$

即$x\approx 2\lambda l/a$，又

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2mE}}=\frac{hc}{\sqrt{2(mc^2)E}}$$
$$=\frac{12.40\times10^3\ \text{eV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{2\times(0.511\times10^6\ \text{eV})\times37\ \text{eV}}}\approx2.01\ \text{Å}$$



图

故

$$x=\frac{2\times 2.01\ \text{Å}}{1\ \text{Å}}\times 10\ \text{cm}=40.2\ \text{cm}$$

(2)强度花样将由衍射图样变成双缝干涉图样。

(3)单独的一个电子的波函数亦能够同它自己相干涉，因此将观测到和(2)给出的同样的图样。

(4)如果该探测器确能选择出与通过第一狭缝的电子相关的事件，那么观测到的图形将是单缝衍射花样，但是若由于电子的及探测器的位置和动量之间的测不准关系，以致使得第二个探测器是如此的不可靠而无法从它获得任何额外的信息，那么这时出现的仍然是双缝干涉图样。

三、证明题

8．**(1)证明在$\hat{L}_z$本征态下$\overline{L_x}=\overline{L_y}=0$**

(2)在$\hat{L}^2,\hat{L}_z$本同本征态Y_{lm}下求$\overline{(\Delta L_x)^2}$ $\overline{(\Delta L_y)^2}$

【答案】(1)L_z本征态$|m\rangle$下$L_z|m\rangle=m\hbar|m\rangle$

而L_x,L_y满足对易式

$L_yL_z-L_zL_y=i\hbar L_x$

$L_xL_z-L_zL_x=-i\hbar L_y$

两边对$|m\rangle$求期望值得

$$\begin{aligned}\langle m|i\hbar L_x|m\rangle&=\langle m|L_yL_z|m\rangle-\langle m|L_zL_y|m\rangle\\&=\langle m|L_ym\hbar|m\rangle-\langle m|m\hbar L_y|m\rangle\\&=0\end{aligned}$$

即$\overline{L_x}=\langle m|L_x|m\rangle=0$

同理$\overline{L_y}=0$

(2)由(1)$\overline{L_x}=\overline{L_y}=0$得

$\overline{(\Delta L_x)^2}=\overline{L_x^2}-\overline{L_x}^2=\overline{L_x^2}$

$\overline{(\Delta L_y)^2}=\overline{L_y^2}-\overline{L_y}^2=\overline{L_y^2}$

由对易式$[L_z,L_xL_y]=L_x[L_z,L_y]+[L_z,L_x]L_y$

$$\begin{aligned}&=L_x(-i\hbar L_x)+i\hbar L_yL_y\\&=-i\hbar(L_x^2-L_y^2)\end{aligned}$$

在$|m\rangle$态下求平均值

$$\begin{aligned}\langle m|[L_z,L_xL_y]|m\rangle&=\langle m|L_z(L_xL_y)|m\rangle\\&\quad-\langle m|(L_xL_y)L_z|m\rangle\\&=\langle m|m\hbar(L_xL_y)|m\rangle\\&\quad-\langle m|(L_xL_y)m\hbar|m\rangle 0\end{aligned}$$

$$=0$$

即$\overline{L_x^2}-\overline{L_y^2}=0$即$\overline{L_x^2}=\overline{L_y^2}=\frac{1}{2}(\overline{L_x^2+L_y^2})$

由$L^2=L_x^2+L_y^2+L_z^2$及Y_{Lm}下$\overline{L_z}=m\hbar,\overline{L^2}=l(l+1)\hbar^2$

于是$\overline{(\Delta L_x)^2}=\overline{(\Delta L_y)^2}=\overline{(L_x)^2}=\overline{(L_y)^2}=\frac{1}{2}(\overline{L^2-l_z^2})$

$$=\frac{\hbar^2}{2}[l(l+1)-m^2]$$

9．**质量为μ的粒子在中心力场$V(r)=-\frac{\alpha}{r^s}(\alpha>0)$中运动，证明存在束缚态的条件是$0<s<2$。**

【答案】根据维里定理

$$\langle T\rangle=\frac{1}{2}\langle \boldsymbol{r}\cdot\nabla V\rangle=\frac{1}{2}\left\langle r\frac{\partial V}{\partial r}\right\rangle=\frac{s\alpha}{2}\left\langle\frac{1}{r^s}\right\rangle>0$$

可见$s>0$，由于$V(r)\leqslant 0,V(\infty)\to 0$。故束缚定态能量$E<0$。

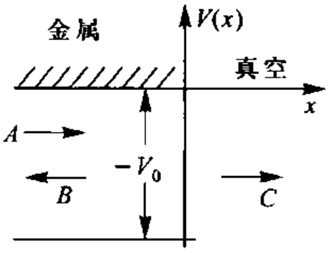
$$E=\langle T\rangle+\langle V\rangle=\frac{s\alpha}{2}\left\langle\frac{1}{r^s}\right\rangle-\alpha\left\langle\frac{1}{r^s}\right\rangle=\left(\frac{s}{2}-1\right)\alpha\left\langle\frac{1}{r^s}\right\rangle<0$$

由上式知，$s<2$。可见，存在束缚态的条件是$0<s<2$。

【复试】2024 年大连海事大学 070200 物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟 5 套卷（二）

一、计算题

1．**把传导电子限制在金属内部的是金属内势的一种平均势，对于下列一维模型(如图所示)：**



图

$$V(x)=\begin{cases}-V_0, & x<0\\ 0, & x>0\end{cases}$$

试就(1)E＞0；(2)$-V_0<E<0$两种情况计算接近金属表面的传导电子的反射和透射概率。

【答案】把$\psi(x,t)=\psi(x)e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$代入薛定谔方程，有

x＜0 区域

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar}(E+V_0)\psi_1=0$$

x＞0 区域

$$\frac{d^2\psi_2}{dx^2}+\frac{2\mu}{\hbar}E\psi_2=0$$

方程的通解为：

$$\psi_1=Ae^{\frac{i}{\hbar}qx}+Be^{-\frac{i}{\hbar}qx},\quad q=\sqrt{2\mu(E+V_0)},\quad x<0$$

$$\psi_1=Ce^{\frac{i}{\hbar}px}+De^{-\frac{i}{\hbar}px},\quad p=\sqrt{2\mu E},\quad x>0$$

(1)对于 E＞0，电子波函数为

$$\psi_1=\psi(x,t)=\begin{cases}\psi_1=Ae^{\frac{i}{\hbar}(qx-Et)}+Be^{-\frac{i}{\hbar}(qx+Et)}, & x<0\\ \psi_2=Ce^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)}+De^{-\frac{i}{\hbar}(px+Et)}, & x>0\end{cases}$$

显然 D=0，由 x=0 处连续性得:A+B=C，q(A-B)=pC 所以

$$B=\frac{q-p}{q+p}A,\quad C=\frac{2q}{q+p}A$$

计算概率流密度可得

$$|j_A|=|A|^2\frac{q}{\mu},\quad |j_B|=|B|^2\frac{q}{\mu},\quad |j_C|=|C|^2\frac{p}{\mu}$$

所以透射系数和反射系数分别为

$$T=\frac{|j_C|}{|j_A|}=\frac{4\sqrt{E(E+V_0)}}{(\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E})^2}$$

$$R=\frac{|j_B|}{|j_A|}=\frac{V_0^2}{(\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E})^2}$$

(2)在$-V_0<E<0$下，则

$$q=\sqrt{2\mu(V_0-|E|)},\quad p=i\sqrt{2\mu|E|}$$

在 x > 0 时的有界的解是

$$\psi_2=Ce^{-(x/2d)}$$

其中 $d=\hbar(8\mu|E|)^{-1/2}$。

由 x=0 处的连续性可得

$$A+B=C$$

$$\frac{i}{\hbar}q(A-B)=-\frac{1}{2d}C$$

由此得到:

$$\frac{B}{A}=-\frac{1+\frac{2i}{\hbar}qd}{1-\frac{2i}{\hbar}qd},\quad \frac{C}{A}=-2\frac{\frac{2i}{\hbar}qd}{1-\frac{2i}{\hbar}qd}$$

将系数之间的比例表达式代入，则在 x > 0 处有

$$|\psi_2(x)|^2=4|A|^2\frac{V_0-|E|}{V_0}e^{-x/d}$$

2．**设算符 $\hat{A}\hat{B}$ 与 pauli 算符 $\hat{\sigma}=(\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z)$ 对易**

求证(1) $(\hat{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{A}})(\hat{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{B}})=\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}+i\hat{\sigma}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$

(2)计算 $T_r[(\sigma\cdot\mathbf{A})(\sigma\cdot\mathbf{B})]$

【答案】(1)由 pauli 矩阵性质

$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z=i$

及 $\hat{\sigma}_x^2=\hat{\sigma}_y^2=\hat{\sigma}_z^2=1$

将上两式联合写成

$\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_q=i\sum_r\varepsilon_{pqr}\hat{\sigma}_r+\delta_{pq}$

于是 $(\hat{\sigma}\cdot\hat{A})(\hat{\sigma}\cdot\hat{B})$

$=(\sum_p\hat{\sigma}_pA_p)(\sum_q\hat{\sigma}_qB_q)$

$=\sum_{pq}\hat{\sigma}_p\hat{\sigma}_qA_pB_q$

$=\sum_{pq}A_pB_p\delta_{pq}+i\sum_{pqr}\varepsilon_{p\cdot q\cdot r}\hat{\sigma}_rA_pB_q$

$=\sum_\alpha A_\alpha B_\alpha+i\sum_{p\cdot q\cdot r}\varepsilon_{p\cdot q\cdot r}\hat{\sigma}_rA_pB_q$

$=\hat{\mathbf{A}}\cdot\hat{\mathbf{B}}+i\hat{\sigma}\cdot(\hat{\mathbf{A}}\times\hat{\mathbf{B}})$

用到矢量积的张量表达式

$a\cdot b=\sum_i a_ib_i$

$a\cdot(b\times c)=\sum_{ijk}\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$

另证：左端

$=(\sigma_xA_x+\sigma_yA_y+\sigma_zA_z)(\sigma_xB_x+\sigma_yB_y+\sigma_zB_z)$

在 (σ^2,σ_2) 表象下

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

因此左边 $\begin{bmatrix}A_2&A_x-iA_y\\A_x+iA_y&-A_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_2&B_x-iB_y\\B_x+iB_y&-B_z\end{bmatrix}$

右端 $i\hat{\sigma}\cdot(\hat{A}\times\hat{B})$

$=i(A_yB_z-A_zB_y)\sigma_x+i(A_zB_x-A_xB_z)\sigma_y+i(A_xB_y-B_xA_y)\hat{\sigma}_z$

$\hat{A}\cdot\hat{B}=(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

因此$\hat{A}\cdot\hat{B}+i\hat{\sigma}\cdot(\hat{A}\times\hat{B})=(\hat{\sigma}\cdot\hat{A})(\hat{\sigma}\cdot\hat{B})$

(2)由(1)$T_r[(\hat{\sigma}\cdot\hat{A})(\hat{\sigma}\cdot\hat{B})]$

$=T_r[\hat{A}\cdot\hat{B}+i\hat{\sigma}\cdot(\hat{A}\times\hat{B})]$

对任意与$\hat{\sigma}$对易算符$\hat{C}$

$\hat{\sigma}\cdot\hat{C}=\sigma_xC_x+\sigma_yC_y+\sigma_zC_z$

又$T_r\sigma_x=T_r\sigma_y=T_r\sigma_z=0$

所以$T_r(\hat{\sigma}\cdot\hat{C})$

$=C_xT_r(\hat{\sigma}_x)+C_yT_r(\hat{\sigma}_y)+C_zT_r(\hat{\sigma}_z)=0$

因此$T_r[(\hat{\sigma}\cdot\hat{A})(\hat{\sigma}\cdot\hat{B})]$

$=T_r[\hat{A}\cdot\hat{B}]=\hat{A}\cdot\hat{B}T_r(I)=2\hat{A}\cdot\hat{B}$

3．**把电容为 C 的平板电容器和电感为 L 的螺线管接成 LC 回路，使得频率为ω的入射偏振光的电场 E 垂直电容器极板，磁场 B 平行于 L 的轴,用此实验模型和不确定关系证明同时准确测量电磁波中的电场和磁场是不可能的。**

【答案】当 LC 回路满足关系$\omega=1/\sqrt{LC}$时，回路对入射偏振光产生共振吸收，从而产生交变电流 I。回路中储存的能量为

$$\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{\tau'}{8\pi}B^2+\frac{\tau}{8\pi}E^2$$

其中τ'和τ分别是螺线管和电容器的体积，而在回路中电子的机械能为

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}+\frac{1}{2}m\omega^2q^2$$

q 为往复运动的电子的位置。因而这两个能量相等，故

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}=\frac{1}{2}LI^2=\frac{\tau'}{8\pi}B^2$$

$$\frac{1}{2}m\omega q^2=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{\tau}{8\pi}E^2$$

所以

$$\Delta p\Delta q=\frac{\sqrt{\tau\tau'}}{4\pi\omega}\Delta B\Delta E\geqslant\hbar$$

即$\Delta B\Delta E\geqslant 4\pi\omega\hbar/\sqrt{\tau\tau'}$，故由上式知不可能同时准确测量电磁波中的电场和磁场。

4．**一粒子在二维无限深方势阱中运动，$V(x,y)=\begin{cases}0, & 0<x,y<a\\ \infty, & \text{其他区}\end{cases}$。设加上微扰$\hat{H}'=\lambda xy(0<x,y<a)$，求基态和第一激发态的一阶能量修正。**

【答案】不考虑微扰时，粒子的能量和波函数为

$$E^{(0)}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2\mu a^2}\left(n_1^2+n_2^2\right)$$

$$\psi^{(0)}=\begin{cases}\frac{2}{a}\sin\frac{n_1\pi x}{a}\sin\frac{n_2\pi y}{a}, & 0<x,y<a\\ 0, & \text{其他区}\end{cases}$$

$$n_1,n_2=1,2,\cdots$$

基态$(n_1=n_2=1)$

$$E^{(0)}=\frac{\pi^2\hbar^2}{\mu a^2},\ \psi^{(0)}=\begin{cases}\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, & 0<x,y<a\\ 0, & \text{其他区}\end{cases}$$

基态能量是非简并的，一阶修正能量为

$$E^{(1)}=\iint\psi^{*(0)}\hat{H}'\psi^{(0)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lambda\left(\frac{2}{a}\right)^2\int_0^a x\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x\int_0^a y\sin^2\frac{\pi y}{a}\mathrm{d}y=\frac{\lambda a^2}{4}$$

第一激发态$[(n_1,n_2)=(12),(21)]$能量$E^{(0)}=5\pi^2\hbar^2/2\mu a^2$是二度简并的，对应波函数

$$\varphi_1=\begin{cases}\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a}, & 0<x,y<a\\ 0, & \text{其他区}\end{cases}$$

$$\varphi_2=\begin{cases}\frac{2}{a}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a}, & 0<x,y<a\\ 0, & \text{其他区}\end{cases}$$

令零级近似波函数为$\psi^{(0)}=c_1\varphi_1+c_2\varphi_2$，$c_1,c_2$满足方程

$$\begin{pmatrix}H'_{11}-E^{(1)} & H'_{12}\\ H'_{21} & H'_{22}-E^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0$$

其中

$$H'_{11}=\iint\varphi_1^*\hat{H}'\varphi_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{4\lambda}{a^2}\int_0^a x\sin^2\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x\int_0^a y\sin^2\frac{2\pi y}{a}\mathrm{d}y=\frac{\lambda a^2}{4}\equiv A$$

$$H'_{12}=\iint\varphi_1^*\hat{H}'\varphi_2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{4\lambda}{a^2}\int_0^a x\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{\pi x}{a}\mathrm{d}x\int_0^a y\sin\frac{2\pi y}{a}\sin\frac{\pi y}{a}\mathrm{d}y$$
$$=\frac{4\lambda}{a^2}\left(-\frac{8a^2}{9\pi^2}\right)\left(-\frac{8a^2}{9\pi^2}\right)=\frac{2^8\lambda a^2}{3^4\pi^4}\equiv B$$

$H'_{21}=B,\ H'_{22}=A$

将H'_{ij}的以上值代入方程，

$$\begin{pmatrix}A-E^{(1)} & B\\ B & A-E^{(1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0$$

由此方程解得

$$E_1^{(1)}=A-B=\left(\frac{1}{4}-\frac{2^8}{3^4\pi^4}\right)\lambda a^2$$
$$E_2^{(1)}=A+B=\left(\frac{1}{4}+\frac{2^8}{3^4\pi^4}\right)\lambda a^2$$

5． **磁矩为$\hat{\mu}=-\gamma\hat{S}$的电子在恒定磁场$B=Be_y$中运动(γ,B均为正实数)。初始时刻电子处于$s_z=-\hbar/2$的态上，求(1)$t>0$时$\hat{S}_y$与$\hat{S}_z$的平均值；(2)电子自旋x分量反转周期(由$s_x=\hbar/2\to s_x=-\hbar/2$的时间)。**

【答案】(1)在$\hat{S}_z$表象，$\hat{H}=-\hat{\mu}\cdot B=\gamma B\hat{S}_y$的本征态与本征值为

$$|\psi_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\ E_1=\frac{\gamma B\hbar}{2}\equiv\omega\hbar,\ \omega\equiv\frac{\gamma B}{2}$$
$$|\psi_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix},\ E_2=-\omega\hbar$$

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|\psi_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|\psi_2\rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$c_1 = \langle\psi_1|\psi(0)\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}},\ c_2 = \langle\psi_2|\psi(0)\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix}$$

$$\overline{s}_y = 0,\ \overline{s}_z = -\frac{\hbar}{2}\cos 2\omega t$$

(2)将$|\psi(t)\rangle$用$\hat{S}_x$的本征态展开：

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix} = b_1(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b_2(t)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega t - \sin\omega t)$$

$$b_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\begin{pmatrix}-\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\omega t + \sin\omega t)$$

当$\omega t_1 = 3\pi/4$时，$b_1(t_1) = -1, b_2(t_1) = 0, s_x = \hbar/2$；当$\omega t_2 = 5\pi/4$时，$b_1(t_2) = 0$，$b_2(t_2) = 1$，$s_x = -\hbar/2$，电子自旋 x 分量反转周期为

$$T = t_2 - t_1 = \frac{5\pi}{4\omega} - \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\gamma B}$$

6．**考虑自旋($s=\frac{1}{2}$)的三维各向同性谐振子，主量子数$N = 2n_r + l$受到$\hat{H}' = -C\hat{L}\cdot\hat{S}$的微扰，试问，N=2能级如何分裂?**

【答案】三维各项同性谐振子

$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + \hat{S}_3^2$

$= (\frac{\hbar}{2})^2(\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 + \hat{\sigma}_3^2)$

$= \frac{3}{4}\hbar^2 I$ (I 为单位矩阵)

$\hat{H}' = -C\hat{L}\cdot\hat{S}$

$= -\frac{C}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \hat{S}^2)$

$= -\frac{C}{2}(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 I)$

本征态$|\varphi> = |N,j,l,m_j>$

$= |2n_r + l, j, l, m_j>$

仅考虑一级修正

$\hat{H}'_{11} = <2n_r + l, j, l, m_j|\hat{H}'|2n_r + l, j, l, m_j>$

$= -\frac{C}{2}[j(j+1)\hbar^2 - l(l+1)\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2]\delta_{2n_r+1,j,l,m_j}$

N=2 时　$n_r = 0, 1$，　$m_s = \pm\frac{1}{2}$　$l = 0, 2$

而 j=l+s；l+s-1...|(l-s)|

因此 l=2 时 j=$\frac{1}{2}$，l=2 时 j=$\frac{5}{2}$

相应矩阵元

$\hat{H}'_{11} = -\frac{C}{2}[\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\hbar^2 - 0(0+1)\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2]$

$= 0$

简并度为 2

$j=\frac{5}{2}$时

$$\hat{H}'_{11}=-\frac{C}{2}[\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}\hbar^2-2(2+1)\hbar^2-\frac{3}{4}\hbar^2]$$
$$=-C\hbar^2$$

简并度为 5

二、简答题

7．**氢原子基态能量$E_1=-e^2/2a$，其中$a=\hbar^2/\mu e^2$为玻尔半径，μ为折合质量，近似等于电子质量m_e。(1)写出电子偶素(氢原子中质子由正电子代替)的基态能量和玻尔半径。(2)由于电子有自旋，电子偶素基态的简并度是多少？(3)电子偶素的基态会发生衰变，湮没为光子，这个过程中释放的能量和角动量是多少？证明终态至少有 2 个光子。**

【答案】(1)电子偶素基态能量

$$E_1=-\frac{e^2}{2a}=-\frac{m_e e^4}{4\hbar^2},\ a=\frac{2\hbar^2}{m_e e^2}$$

(2)简并度为 4,对应电子与正电子的总自旋$\hat{S}^2$与$\hat{S}_z$的共同本征态$|11\rangle|10\rangle|1-1\rangle|00\rangle$，即自旋三重态与自旋单态。

(3)释放能量$2m_ec^2-\left(m_e e^4/4\hbar^2\right)$，释放角动量为电子偶素基态的总自旋角动量$S^2=s(s+1)\hbar^2$与$S_z=m\hbar$。如果电子偶素基态处于自旋三重态，则释放角动量为$S^2=2\hbar^2$与$S_z=m\hbar(m=0,\pm1)$，如果电子偶素基态处于自旋单态，则释放角动量为 0。

由于电子偶素的动量为 0,根据动量守恒，终态至少有 2 个光子才能保持体系的总动量为 0。

三、证明题

8．**(1)证明算符关系$\hat{L}^2=(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}+\hbar)$，其中$\hat{L}$为轨道角动量算符，$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$为泡利自旋算符；**

(2)计算在耦合表象$\left(\hat{J}^2=(\hat{S}+\hat{L})^2=\left(\frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\hat{\boldsymbol{L}}\right)^2,\hat{J}_z\right)$的基$|ljm_j\rangle$中$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2$的平均值。

【答案】(1)直接推算法

$$\begin{aligned}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2&=\hat{\sigma}_i\hat{L}_i\hat{\sigma}_j\hat{L}_j=\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j\hat{L}_i\hat{L}_j=(\delta_{ij}+i\varepsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k)\hat{L}_i\hat{L}_j\\&=\hat{L}^2+\frac{1}{2}i\hat{\sigma}_k\varepsilon_{ijk}(\hat{L}_i\hat{L}_j-\hat{L}_j\hat{L}_i)=\hat{L}^2+\frac{1}{2}i\hat{\sigma}_k\varepsilon_{ijk}i\hbar\varepsilon_{ijm}\hat{L}_m\\&=\hat{L}^2-\hbar\hat{\sigma}_k\hat{L}_m\delta_{km}=\hat{L}^2-\hbar\hat{\sigma}_k\hat{L}_k=\hat{L}^2-\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}\end{aligned}$$

即

$$\hat{L}^2=(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}+\hbar)$$

(2)在耦合表象中，基矢为$(\hat{J}^2,\hat{L}^2,\hat{J}_z)$的共同本征态$|ljm_j\rangle$，$j=l\pm\frac{1}{2}$，mj=j,j-1,⋯,-j。

$$\hat{J}^2|ljm_j\rangle=j(j+1)\hbar^2|ljm_j\rangle$$
$$\hat{L}^2|ljm_j\rangle=l(l+1)\hbar^2|ljm_j\rangle$$
$$\hat{J}_z|ljm_j\rangle=m_j\hbar|ljm_j\rangle$$

考虑到

$$\hat{J}^2=\left(\frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}+\hat{\boldsymbol{L}}\right)^2=\frac{\hbar^2}{4}\hat{\boldsymbol{\sigma}}^2+\frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{L}^2=\frac{3\hbar^2}{4}+\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{L}^2$$

所以

$$\langle ljm_j|(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}})^2|ljm_j\rangle=\langle ljm_j|(-\hbar\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{L}}+\hat{L}^2)|ljm_j\rangle$$

$$=\langle ljm_j|(-\hat{J}^2+2\hat{L}^2+3\hbar^2/4)|ljm_j\rangle$$
$$=[-j(j+1)+2l(l+1)+3/4]\hbar^2$$
$$=\begin{cases} l^2\hbar^2 & j=l+1/2 \\ [(l+1)^2-1/2]^2 & j=l-1/2 \end{cases}$$

9．**一个质量为μ的粒子在对数势场$V(r)=c\ln\frac{r}{r_0}$中运动，其中 c 与r_0是同质量μ无关的常数。(1)证明在所有定态上均方速度相同,求出这个均方速度;(2)证明任何两个定态能量之差同粒子的质量无关。**

【答案】(1)设归一化的定态波函数为ψ_n，利用公式

$$\overline{(T)_n}=\frac{1}{2}\overline{(\boldsymbol{r}\cdot\nabla V)_n}$$

或$\frac{1}{\mu}\int\psi_n^*\hat{p}^2\psi_n\mathrm{d}\tau=\int\psi_n^*(\boldsymbol{r}\cdot\nabla V)\psi_n\ \mathrm{d}\tau$

可得均方速度

$$\overline{(v^2)_n}=\frac{1}{\mu^2}\int\psi_n^*\hat{p}^2\psi_n\ \mathrm{d}\tau=\frac{1}{\mu}\int\psi_n^*(\boldsymbol{r}\cdot\nabla V)\psi_n\ \mathrm{d}\tau$$

将

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla V=r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(c\ln\frac{r}{r_0}\right)=c$$

代入上式，得

$$\overline{(v^2)_n}=\frac{c}{\mu}\qquad(1)$$

可见均方速度$\overline{(v^2)_n}$同态ψ_n无关。

(2)选择粒子的质量μ为参数，相应的 F-H 定理为

$$\frac{\partial E_n}{\partial\mu}=\int\psi_n^*\frac{\partial\hat{H}}{\partial\mu}\psi_n\mathrm{d}\tau\qquad(2)$$

将$\frac{\partial\hat{H}}{\partial\mu}=\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+c\ln\frac{r}{r_0}\right)=-\frac{\hat{p}^2}{2\mu^2}$

代入式(2)，并利用式(1)，得

$$\frac{\partial E_n}{\partial\mu}=-\frac{1}{2\mu^2}\int\psi_n^*\hat{p}^2\psi_n\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{2}\overline{(v^2)_n}=-\frac{c}{2\mu}$$

上式对μ积分得定态能量

$$E_n=-\frac{c}{2}\ln\mu+B_n$$

其中B_n是同积分变量μ无关的常数，可见任何两个定态能量之差$E_{n'}-E_n=B_{n'}-B_n$同粒子的质量无关。

【复试】2024年大连海事大学070200物理学《加试:量子物理之量子力学教程》考研复试仿真模拟5套卷（三）

一、计算题

1. **若μ和J分别表示电子的总磁矩和总角动量(指轨道与自旋角动量之和)，试求$\mu\cdot J$的本征值和相应的本征函数。**

【答案】因为$\hat{J}=\hat{L}+\hat{S}$，$\hat{\mu}=-\frac{e}{2mc}(\hat{L}+2\hat{S})=-\frac{\mu_B}{\hbar}(\hat{L}+2\hat{S})$

所以

$$\hat{\mu}\cdot\hat{J}=-\frac{\mu_B}{\hbar}(\hat{L}^2+\hat{S}^2+3\hat{L}\cdot\hat{S})$$

考虑到

$$2\hat{L}\cdot\hat{S}=(\hat{L}+\hat{S})^2-\hat{L}^2-\hat{S}^2=\hat{J}^2-\hat{L}^2-\hat{S}^2$$

因此

$$\hat{\mu}\cdot\hat{J}=-\frac{\mu_B}{\hbar}\left[\hat{L}^2+2\hat{S}^2+\frac{3}{2}(\hat{J}^2-\hat{L}^2-\hat{S}^2)\right]=-\frac{\mu_B}{2\hbar}(3\hat{J}^2-\hat{L}^2+\hat{S}^2)$$

显然$(\hat{J}^2,\hat{L}^2,\hat{L}_z)$的同本征函数$|ljm_j\rangle$也是$\hat{\mu}\cdot\hat{J}$的本征函数，

$$\hat{\mu}\cdot\hat{J}|ljm_j\rangle=-\frac{\mu_B\hbar}{2}\left[3j(j+1)-l(l+1)+\frac{3}{4}\right]|ljm_j\rangle$$

显然$\hat{\mu}\cdot\hat{J}$的本征值为与m_j无关，相应的本征函数为$|ljm_j\rangle$，其中m_j取$-j\to j$共2j+1个值，即本征矢为2j+1重简并。

2. **已知束缚态波函数为$\psi(x)$，求动量p与动能$T=p^2/2\mu$的概率分布函数的表达式。对一维谐振子基态，波函数为$\psi(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}e^{-\alpha^2x^2/2}$，$\alpha=\sqrt{\mu\omega/\hbar}$。算出动量p与动能T的概率分布函数，并算出动能平均值。**

【答案】动量的概率分布函数为

$$|\varphi(p)|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ipx/\hbar}\psi(x)dx\right|^2 \quad (1)$$

设动能T的概率分布函数为F(T),

$$F(T)dT=2|\varphi(p)|^2dp \quad (2)$$

因$p=\pm p_0$的T相同，且$|\varphi(-p)|^2=|\varphi(p)|^2$，故在式(2)中出现2的因子，

$$T=\frac{p^2}{2\mu},\ dT=\frac{p}{\mu}dp=\frac{\sqrt{2\mu T}}{\mu}dp \quad (3)$$

将式(3)代入式(2),得动能T的概率分布函数的表达式；

$$F(T)=\sqrt{\frac{2\mu}{T}}\left|\varphi(p=\sqrt{2\mu T})\right|^2 \quad (4)$$

其中$|\varphi(p)|^2$由式(1)确定。对一维谐振子基态，

$$\varphi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ipx/\hbar}\psi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ipx/\hbar}e^{-\alpha^2x^2/2}dx$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\sqrt{\pi}\hbar}}e^{-p^2/2\alpha^2\hbar^2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\alpha^2}{2}\left(x+\frac{ip}{\alpha^2\hbar}\right)^2}dx$$