承德市高三年级期中考试

数学

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上.

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，回答非选择题时，将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

4.本试卷主要考试内容：高考全部内容（不含圆锥曲线、统计、概率）.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\left\{y\middle|y=x^2-1,x\in\mathrm{R}\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\lg(1-x)\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\varnothing$　　　　B. $(-1,1)$　　　　C. $[-1,1)$　　　　D. $[-1,1]$

【答案】C

【解析】

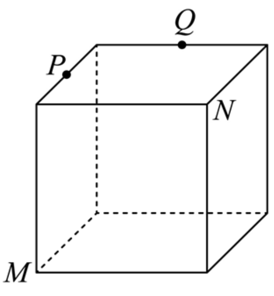
【分析】分别求出集合 A,B，再根据交集定义求解.

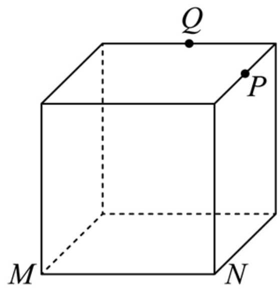
【详解】因为集合 $A=\left\{y\middle|y=x^2-1,x\in\mathrm{R}\right\}=\left[-1,+\infty\right)$，

$B=\left\{x\middle|y=\lg(1-x)\right\}=\left(-\infty,1\right)$，所以 $A\cap B=[-1,1)$.

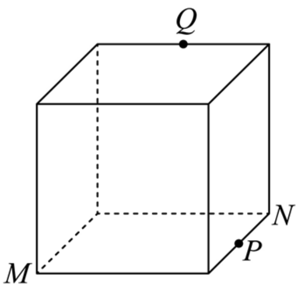
故选：C.

2. 如图，在下列正方体中，M，N 为正方体的两个顶点，P，Q 分别为所在棱的中点，则在这四个正方体中，M，N，P，Q 四点共面的是（　）

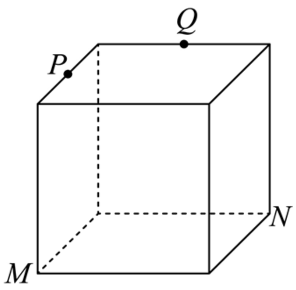
A. 

B. 

C.



D.



【答案】D

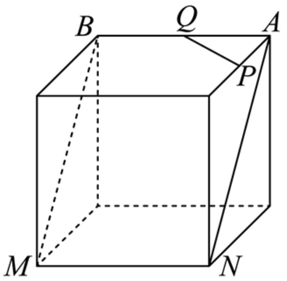
【解析】

【分析】根据图形及平行公理判断即可.

【详解】对于 A：显然 P 、Q 、N 在正方体的上底面，且三点不共线，M 不在正方体的上底面，

所以 P 、Q 、N 、M 四点不共面，故 A 错误；

对于 B：



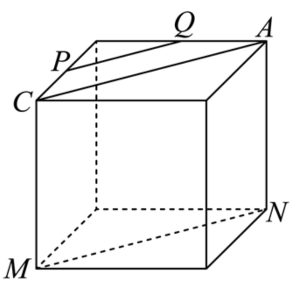
如图，$MN//BA$，即 A 、B 、M 、N 四点共面，即 Q 、M 、N 三点共面，且三点不共线，

又 $P\notin$ 平面 $ABMN$，所以 P 、Q 、N 、M 四点不共面，故 B 错误；

对于 C：显然 P 、M 、N 在正方体的下底面，且三点不共线，Q 不在正方体的下底面，

所以 P 、Q 、N 、M 四点不共面，故 C 错误；

对于 D：



如图，连接 AC，则 $PQ//AC$，又 $AC//MN$，所以 $PQ//MN$，

所以 P 、Q 、N 、M 四点共面，故 D 正确.

故选：D3. 设 $\{a_n\}$ 是无穷数列，记 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则“$\{a_n\}$ 是等比数列”是“$\{b_n\}$ 是等比数列”的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】D

【解析】

【分析】分别从非充分性和非必要性两方面分析.

【详解】非充分性：若$\{a_n\}$的项为 1，1，1，1，…，则$\{b_n\}$的项为 0，0，0，0，….

此时$\{a_n\}$是等比数列，但$\{b_n\}$不是等比数列.

非必要性：若$\{b_n\}$的项为 1，1，1，1，…，则$a_{n+1}-a_n=1$.

此时$\{b_n\}$是等比数列，但$\{a_n\}$是公差为 1 的等差数列，不是等比数列.

所以“$\{a_n\}$是等比数列”是“$\{b_n\}$是等比数列”的既不充分也不必要条件.

故选：D.

4. 已知平面向量$\vec{m}$，$\vec{n}$满足$|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$，且$\vec{m}$在$\vec{n}$上的投影向量为$-\frac{1}{2}\vec{n}$，则向量$\vec{n}$与向量$\vec{n}+\vec{m}$的夹角为（　）

A. 30°

B. 60°

C. 120°

D. 150°

【答案】B

【解析】

【分析】根据投影向量公式得到方程，求出$\vec{m}\cdot\vec{n}=-2$，进而由向量夹角余弦公式求出$\cos\langle\vec{n},\vec{n}+\vec{m}\rangle=\frac{1}{2}$，得到夹角.

【详解】因为$\vec{m}$在$\vec{n}$上的投影向量为$\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=-\frac{1}{2}\vec{n}$，即$\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{2}=-1$，所以$\vec{m}\cdot\vec{n}=-2$，

又$\vec{n}\cdot(\vec{n}+\vec{m})=\vec{n}^2+\vec{m}\cdot\vec{n}=4-2=2$，

$|\vec{n}+\vec{m}|=\sqrt{(\vec{n}+\vec{m})^2}=\sqrt{\vec{n}^2+2\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{m}^2}=\sqrt{4-2\times2+4}=2$，

所以$\cos\langle\vec{n},\vec{n}+\vec{m}\rangle=\frac{\vec{n}\cdot(\vec{n}+\vec{m})}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n}+\vec{m}|}=\frac{2}{2\times2}=\frac{1}{2}$，

且$0°\le\langle\vec{n},\vec{n}+\vec{m}\rangle\le180°$，则$\langle\vec{n},\vec{n}+\vec{m}\rangle=60°$.

故选：B．5. 在棱长为 2 的正四面体$A-BCD$中，E为棱AD上的动点，当$BE+CE$最小时，三棱锥$A-BCE$的体积为（　）

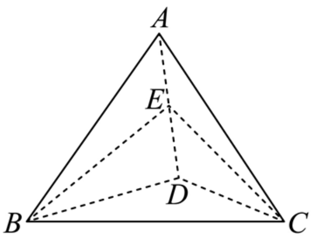
A. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

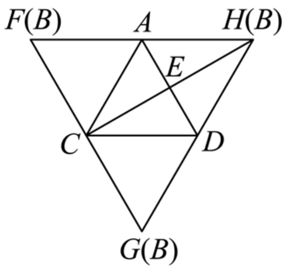
【答案】A

【解析】

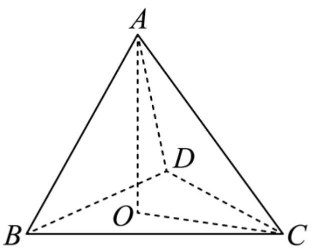
【分析】将立体图形展开为平面图形可确定 $BE+CE$ 最小时，点 E 的位置，然后可得体积.

【详解】将侧面如图展开，由平面几何性质可得，当 E 为 AD 的中点时，满足题意.





又如图，过 A 向平面 BCD 作垂线，垂足为 O，则 O 为 $\triangle BCD$ 中心，



连接 OC，则 OC 为 $\triangle BCD$ 外接圆半径，由正弦定理，$2OC=\dfrac{2}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\Rightarrow OC=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

则正四面体的高为 $AO=\sqrt{AC^2-OC^2}=\sqrt{4-\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

又 E 为 AD 中点，所以 $V_{A-BCE}=\dfrac{1}{2}V_{A-BCD}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AO=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times\dfrac{2\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

故选：A.

6. 已知函数 $f(x)=x^3+x$，若正实数 a，b 满足 $f(a)+f(b-4)=0$，则 $\dfrac{1}{4a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是（　）

A. $\dfrac{9}{4}$　　B. $\dfrac{9}{16}$　　C. $\dfrac{4}{9}$　　D. $\dfrac{16}{9}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据单调性和奇偶性得到 $a+b=4$，根据基本不等式1”的妙用求解最小值，【详解】$f(x)=x^3+x$ 的定义域为R，且 $f(-x)=-x^3-x=-f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 是奇函数，又 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

由 $f(a)+f(b-4)=0$，得 $f(a)=-f(b-4)=f(4-b)$，

则 $a=4-b$，即 $a+b=4$，

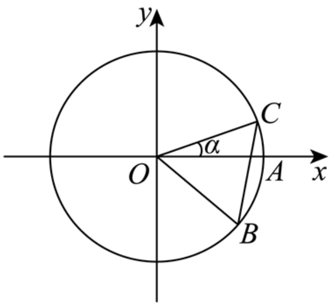
而 $a>0,b>0$，

所以 $\frac{1}{4a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}(a+b)\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}+\frac{b}{4a}+\frac{a}{b}\right)\ge\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}+2\sqrt{\frac{b}{4a}\cdot\frac{a}{b}}\right)=\frac{9}{16}$，

当且仅当 $\frac{b}{4a}=\frac{a}{b}$，即 $b=2a=\frac{8}{3}$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{4a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是 $\frac{9}{16}$.

故选：B.

7. 如图，圆 O 与 x 轴的正半轴的交点为 A，点 C，B 在圆 O 上，且点 C 位于第一象限，点 B 的坐标为 $\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$，$\angle AOC=\alpha$．若 $|BC|=1$，则 $2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\sin\alpha-1$ 的值为（　）



A. $\frac{5\sqrt{3}-12}{13}$　　B. $\frac{5\sqrt{3}+12}{13}$　　C. $\frac{12\sqrt{3}-5}{13}$　　D. $\frac{12\sqrt{3}+5}{13}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用三角函数的定义得到三角函数值，然后利用二倍角公式和辅助角公式计算.

【详解】$\because B\left(\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$，

$\therefore |OB|=1$，圆 O 的半径为 1.

根据三角函数的定义，易得 $\sin\angle AOB=\frac{5}{13}$，$\cos\angle AOB=\frac{12}{13}$，

又 $|BC|=1$，$\therefore \triangle BOC$ 为等边三角形，则 $\alpha=\frac{\pi}{3}-\angle AOB$，且 α 为锐角，

$$\therefore 2\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\sin\alpha-1=\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\angle AOB\right)$$

$=-\cos\angle AOB+\sqrt{3}\sin\angle AOB=\dfrac{5\sqrt{3}-12}{13}$.

故选：A．

8. 设 $f(x)$ 为定义在整数集上的函数，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(-1)<0$，对任意的整数 x，y 均有

$f(x+y)=f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{2024}f\left(i^2\right)=$（　）

A. 0　　　　B. 1012　　　　C. 2024　　　　D. 4048

【答案】B

【解析】

【分析】由条件 $f(x+y)=f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)$，利用赋值分别求出 $f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，并得到 $f\left(x\right)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，得到函数的周期，进而通过分类讨论求解即可.

【详解】令 $x=y=1$，则 $f(2)=2f(1)f(0)=2f(0)=0$，$\therefore f(0)=0$.

令 $x=2,y=-1$，则 $f\left(1\right)=\left[f\left(2\right)\right]^2+\left[f\left(-1\right)\right]^2=\left[f\left(-1\right)\right]^2=1$，

又 $f(-1)<0$，$\therefore f(-1)=-1$.

令 $y=1$，则 $f(x+1)=f(-x+1)$，

$\therefore$函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

令 $y=-1$，则 $f(x-1)=f(x)f(2)+f(1-x)f(-1)=-f(1-x)$，

$\therefore f(x)=-f(-x)$

$\therefore f\left(x\right)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称.

$\therefore f(x+2)=f(-x)=-f(x)=f(x-2)$，

$\therefore f\left(x\right)$ 是周期 $T=4$ 的函数.

又 $f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(-1)=-1$，

$\therefore$当 x 为偶数时，$f(x)=0$．当 n 为偶数时，n^2 也为偶数，此时 $f\left(n^2\right)=0$；

当 n 为奇数时，令 $n=2k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $f\left(n^2\right)=f\left(4k^2+4k+1\right)=f(1)=1$.

$\therefore f\left(1^2\right)+f\left(2^2\right)+\cdots+f\left(2024^2\right)=1012$.

故选：B．

【点睛】方法点睛：本题解题关键是通过对抽象函数关系进行赋值法求出特殊函数值，发现函数的周期，利用函数周期性结合分类讨论思想来求解.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知$\triangle ABC$为等边三角形，直线AB，AC的斜率分别为0，$\sqrt{3}$，则（　）

A. 直线BC的斜率为$-\sqrt{3}$　　B. BC边上的高所在直线的斜率为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. AB边上的高所在直线的倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$　　D. AC边上的高所在直线的倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】将三角形的顶点 A 放到坐标原点，画出图象，结合等边三角形的性质及直线的斜率、倾斜角的定义判断即可.

【详解】依题意，不妨将三角形的顶点 A 放到坐标原点，则B在x轴上（如下图所示），

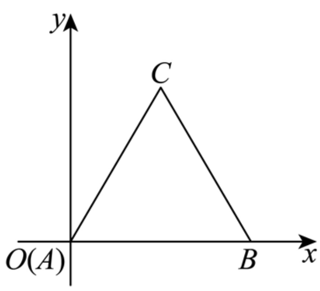
则$\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，所以直线$BC$的斜率为$\tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\tan\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$，故 A 正确；

因为BC边上的高也为$\angle BAC$的平分线，所以BC边上的高所在直线的斜率为$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 B 正确；

AB边上的高所在直线的倾斜角为$\dfrac{\pi}{2}$，故 C 正确；

AC边上的高所在直线的倾斜角为$\pi-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}$，故 D 错误.

故选：ABC



10. 设函数$f(x)=m\ln x-x$，$g(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+x+a$，则下列结论正确的是（　）

A. 当$m=1$时，$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-1$

B. 当$-\frac{2\sqrt{2}}{3}<a<\frac{2\sqrt{2}}{3}$时，$g(x)$有三个零点

C. 若$F(x)=f(x)-g'\left(x\right)$有两个极值点，则$m>\frac{1}{4}$

D. 若$f(mx)\le \mathrm{e}^{x}-mx$，则正实数$m$的取值范围为$(0,\mathrm{e}]$

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 由题可得点$(1,f(1))$处的切线方程的斜率和$f(1)=-1$，即可得切线方程；B，由题可得$g(x)_{极大}>0$，$g(x)_{极小}<0$，即可判断选项正误；C，$F(x)=f(x)-g'\left(x\right)$有两个极值点等价于$x^2-x+m=0$有两个整根，即可得$m$取值范围；D，$f(mx)\le \mathrm{e}^{x}-mx$可化为$\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x\le \mathrm{e}^{x-\ln m}+(x-\ln m)$，后由$h(x)=\mathrm{e}^{x}+x$及$p(x)=x-\ln x$单调性可得$m$的取值范围.

【详解】对于 A，设切线方程为：$y=kx+b$. 当$m=1$时，$f(x)=\ln x-x\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-1$，

则$k=f'\left(1\right)=0$，$b=f(1)=-1$，即切线方程为$y=-1$，故 A 正确；

对于 B，当$-\frac{2\sqrt{2}}{3}<a<\frac{2\sqrt{2}}{3}$时，$g'\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^2+1$，$g'\left(x\right)>0\Rightarrow -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$；

$g'\left(x\right)<0\Rightarrow x<-\sqrt{2}$或$x>\sqrt{2}$.

则$g\left(x\right)$在$\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$上递增，在$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2},+\infty\right)$上递减，得

$g\left(x\right)_{极小}=g\left(-\sqrt{2}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}+a<0$，

$g\left(x\right)_{极大}=g\left(\sqrt{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}+a>0$，又注意到当$x$趋近于负无穷大时，$g\left(x\right)$趋近于正无穷大，$x$趋近于正无穷大时，$g\left(x\right)$趋近于负无穷大，则$g\left(x\right)$分别在$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right),\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{2},+\infty\right)$上有一个零点，故 B 正确；

对于 C，$F(x)=m\ln x-x+\frac{x^2}{2}-1$，$F'(x)=\frac{m}{x}-1+x=\frac{x^2-x+m}{x}$，令$x^2-x+m=0$，因

$F(x)=f(x)-g'\left(x\right)$有两个极值点，则$x^2-x+m=0$有两个不等正根，

$$\begin{cases}\Delta=1-4m>0\\ x_1+x_2=1>0\\ x_1x_2=m>0\end{cases}\Rightarrow 0<m<\frac{1}{4}$$，故 C 错误；

对于 D，$f(mx)=m\ln(mx)-mx\le e^x-mx$，即 $m\ln(mx)\le e^x$，可化为 $e^{\ln x}+\ln x\le e^{x-\ln m}+(x-\ln m)$，

令 $h(x)=e^x+x$，因 $h'(x)=e^x+1>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

即 $e^{\ln x}+\ln x\le e^{x-\ln m}+(x-\ln m)\Leftrightarrow \ln x\le x-\ln m\Rightarrow \ln m\le x-\ln x$，令 $p(x)=x-\ln x$，则

$p'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减，当 $x>1$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增，

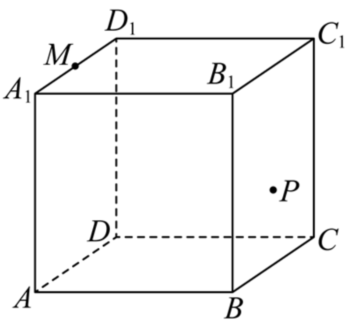
则 $p(x)_{\min}=p(1)=1$，则 $\ln m\le 1$，即 $0<m\le e$，故 D 正确．

故选：ABD．

【点睛】关键点点睛：对于三次函数零点个数问题，常利用函数极大值与函数极小值存在性及符号可判断零点个数；

极值点相关问题，常转化为导函数零点问题解决；指对函数含参问题，常利用指对互化以产生相同结构，从而简化问题.

11. 如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是 A_1D_1 的中点，P（与点 C_1 不重合）是平面 BCC_1B_1 内的动点，下列说法正确的是（　）



A. 平面 $A_1BD\perp$ 平面 APC_1

B. 若 $\angle MAP=\angle MAC_1$，则动点 P 的轨迹为抛物线的一部分

C. 当 $\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC_1}$ 时，过点 P 作该正方体的外接球的截面，其截面面积的最小值为 $\frac{16\pi}{9}$

D. 线段 AD 绕 AD_1 旋转一周，在旋转过程中，AD 与 AC_1 所成角的正切值的取值范围为 $\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$

【答案】ACD

【解析】

【分析】A 选项：由线面垂直证明面面垂直；B 选项：由角与角相等转换为旋转，由平行于轴的平面与圆锥的截面是双曲线的一支可知，动点 P 的轨迹为双曲线的一部分；C 选项：由向量关系找到点 P 的位置，因为球心到面的距离最大时，截面面积最小，所以 P 为截面圆心，勾股定理求出 OP 得到截面圆半径，求得最小截面面积；D 选项：旋转得到的圆锥与旋转轴夹角恒为 $\frac{\pi}{4}$，在正方体中求出角 $\angle D_1AC_1$ 的正切值，从而找到旋转过程中形成的最大角和最小角，从而求出范围.

【详解】对于 A，在正方形 $ABCD$ 中，$AC \perp BD$，在正方体中 $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$，$\because BD \subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore CC_1 \perp BD$，

$\because AC \cap CC_1 = C$，$\because CC_1 \subset$ 平面 ACC_1，$AC \subset$ 平面 ACC_1，

$\therefore BD \perp$ 平面 ACC_1，同理可证 $A_1D \perp$ 平面 AD_1C_1，

$\because AC_1 \subset$ 平面 ACC_1，$AC_1 \subset$ 平面 AD_1C_1，

$\therefore BD \perp AC_1$，$A_1D \perp AC_1$，且 $BD \cap A_1D = D$，$BD \subset$ 平面 A_1BD，$A_1D \subset$ 平面 A_1BD，

$\therefore AC_1 \perp$ 平面 A_1BD，$AC_1 \subset$ 平面 APC_1，所以平面 $A_1BD \perp$ 平面 APC_1，故 A 正确；

对于 B，满足条件 $\angle MAP = \angle MAC_1$ 的点 P 应在以 AM 为旋转轴，AC_1 绕其旋转所得的圆锥的侧面上，旋转轴 AM 与平面 BCC_1B_1 平行，又 P 是平面 BCC_1B_1 内的动点，所以动点 P 的轨迹为双曲线的一支的一部分，故 B 错误；

对于 C，当 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PC_1}$ 时，P 为线段 BC_1 上靠近点 B 的三等分点，如图 1，易知正方体的外接球的球心为正方体的中心 O，过点 O 作 $ON \perp BC_1$ 于点 N，连接 OP，$\because ON = 1$，

$PN = NB - PB = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$，则 $OP = \sqrt{ON^2 + NP^2} = \frac{\sqrt{11}}{3}$，球的半径 $R = \sqrt{3}$ 若要截面面积最小，需球心到截面的距离最大，最大为 OP，此时 $S_{\min} = \pi\left(R^2 - OP^2\right) = \frac{16\pi}{9}$，故 C 正确；