关于差商及插值多项式

一般地，称k-1 阶差商的一阶差商

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,x_2,\cdots,x_k]}{x_0-x_k}$$

为$f(x)$关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 的 k 阶差商。

例如，已知$f(x)$在 $x_0=0.1,\ x_1=0.3,\ x_2=0.5$ 的函数值为：

$$f(x_0)=2,\ f(x_1)=3.2,\ f(x_2)=4$$

可以求得 $f[x_0,x_1]=\frac{2-3.2}{0.1-0.3}=\frac{1.2}{0.2}=6$

$$f[x_1,x_2]=\frac{3.2-4}{0.3-0.5}=\frac{0.8}{0.2}=4$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=\frac{6-4}{0.1-0.5}=-\frac{2}{0.4}=-5$$

2. 差商的性质

性质1：k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]$ 是由函数值

$f(x_0), f(x_1),\cdots, f(x_k)$ 的线性组合而成，即

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)}$$

其中 $\omega_{k+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)$

以k=2进行证明。由

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}\qquad f[x_1,x_2]=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$

得到 $$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

由 $\omega_3(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$

得到 $\omega_3'(x)=(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_0)(x-x_1)$

$\omega_3'(x_0)=(x_0-x_1)(x_0-x_2)$ $\omega_3'(x_1)=(x_1-x_0)(x_1-x_2)$

$\omega_3'(x_2)=(x_2-x_0)(x_2-x_1)$

从而

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$=\frac{f(x_0)}{\omega_3'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{\omega_3'(x_1)}+\frac{f(x_2)}{\omega_3'(x_2)}$$

$$=\sum_{j=0}^{2}\frac{f(x_j)}{\omega_3'(x_j)}$$

再由数学归纳法可证得：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

性质2:差商具有对称性,即k阶差商$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]$中，任意调换$x_i$，$x_j$的次序，其值不变。

由性质1立刻可得。

性质3：若$f(x)$为n 次多项式，则$f[x,x_0]$为关于x 的n-1次多项式。

证明：已知

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{p_n(x)-p_n(x_0)}{x-x_0}$$

由于x_0**是** $p_n(x)-p_n(x_0)=0$ **的根，所以**

$$p_n(x)-p_n(x_0)=(x-x_0)q_{n-1}(x)$$

故 $$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{p_n(x)-p_n(x_0)}{x-x_0}=q_{n-1}(x)$$

类似的可以得到： $f[x,x_0,x_1]=q_{n-2}(x)$

也就是说，对多项式求一次差商，次数降低一次。

3. 差商的计算

为构造 Newton 插值多项式方便起见，计算差商时，采用列表的方式进行。

x_i	y_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	
x_0	y_0				
x_1	y_1	$f[x_0, x_1]$			
x_2	y_2	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	y_3	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	

例 2.2 已知函数 $y=f(x)$ 的如下离散数据(1,0)、(2,2)、(4,12)、(5,20)、(6,70)，试求其各阶差商.

解：列差商表计算

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
1	0				
2	2	2			
4	12	5	1		
5	20	8	1	0	
6	70	50	21	5	1

二、Newton 插值多项式

对于区间[a,b]内的离散点 $x, x_0, x_1, \cdots, x_n$ 及相应的函数值 $f(x), f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$，计算如下差商：

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x, x_0] - f[x_0, x_1]}{x - x_1}$$

$$f[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x, x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_2]}{x - x_2}$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}] - f[x_0, x_1, \cdots, x_n]}{x - x_n}$$

可以求得：

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Longrightarrow f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0]$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1} \Longrightarrow$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

$$f[x,x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x,x_0,x_1]-f[x_0,x_1,x_2]}{x-x_2} \Longrightarrow$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]$$