典例分析

例 3已知等比数列x,}$a_1+a_2+a_3=3,a_4+a_5+a_6=24$,

则$a_7+ag+a_9=?$ S,S₀-S,S₉- 成等比数列

S_6

解法2:

S_3

解法1:

$a_1+a_2+a_3$

(1)

$a_1+a_1q+a_1q^2=3$

S6-

$d_4+a_5+a_6=q^3(a_1+a_2+a_3)$

(2)

S_3

$aq^3+a_1q^4+a_1q^5=24$ (2)

$\frac{(2)}{(1)}=\frac{(3)}{(2)}=q^3$ $_4+a_5+a_6)(3)$

两式相除: 实现整体消元的目的

(2)

(1) 可得$q^2=8$, q=2

S,-

$a_7+ag+a_9=192$

S_6 将q=2 代入(1)式可得a_1

=7

典例分析

例 4已知等比数列a,}的公比q≠-1, 前n项和为S, 证明: S,S 2-S,S 3-S 2, 成等比数列，并求这个数列的公比

证明: 当q=1 时,

$S=na_1$

$S_2n-S=2nq_1-na_1=na,$

$S_3n-S_2=3na_1-2na_1=na,$

∴S,S 2n-S,S 3n-S 2 成等比数列，公比为1

当q≠1时，

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

$$S_{2n}-S_n=\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1q^n(1-q^n)}{1-q}=q^nS_n,$$

$$S_{3n}-S_{2n}=\frac{a_1(1-q^{3n})}{1-q}-\frac{a_1(1-q^{2n})}{1-q}=\frac{a_1q^{2n}(1-q^n)}{1-q}=q^n(S_{2n}-S_n),$$

$$\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=\frac{S_{3n}-S_{2n}}{S_{2n}-S_n}=q^n$$

∵q” 为常数，

∴S,S 2 n-S,S 3 n-S 2 成等比数列，公比为”

4.3.2 等比数列的前n项和公式应用

复习引入

1. 等比数列前n项和公式：

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$$

消元方法：

约分或两式相除

2. 等比数列求和要考虑公比是否为1.

3. 等比数列求和的常用方法： 错位相减法.

4. 等比数列的片段和性质：

若等比数列{a,} 的公比q≠-1, 前n项和为S,,

则S,S_2-S,S_3n—S_2 成等比数列，其中公比为

q”.

探究新知

思考： 你能发现等比数310项和公式8一“1-9”g≠)的函数特征吗

？

当q≠ $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ ⇨ $S_n=\dfrac{a_1-a_1q^n}{1-q}$ ⇨ $S_n=-\dfrac{a_1}{1-q}q^n+\dfrac{a_1}{1-q}$

$A=-\dfrac{a_1}{1-q}$ ，则 S = A f − A . 即S,是n的指数型函数。

结构特点： q 的系数与常数项互为相反数 .

当q=1 时 ，S=na ， 即S, 是n的正比例函数.

典例分析

例1 数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n-2$. 求$\{a_n\}$的通项公式，并判断$\{a_n\}$是否是等比数列.

解：当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-2)-(3^{n-1}-2)=2\cdot3^{n-1}$.

当$n=1$ 时，$a_1=S_1=3^1-2=1$， 不满足上式.

$$\therefore a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2\times3^{n-1}, & n\geq2.\end{cases}$$

由于$a_1=1, a_2=6, a_3=18$,

所以a_1, a_2, a_3 不是等比数列，即$\{a_n\}$不是等比数列

思考：还有其他方法判断$\{a_n\}$是否是等比数列吗?

探究新知

思考： 若{a,,}是公比为q的等比数列， S偶， S奇分别是数列的偶数项和与奇数项和， 则S偶, S奇之间有什么关系？

(1) **若等比数列**{a, }**的项数有**2n**项，则**

$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

$S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}$ $\Longrightarrow$ S偶= 奇 偶

(2) **若等比数列**{a, }**的项数有**2n+1 **项，则**

$S_{偶}=a_2+a_4+\cdots+a_{2n}$

$S_{奇}=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n+1}$

$=a_1+(a_3+\ldots a_{2n-1}+a_{2n+1})$

$=a_1+q(a_2+a_4+\ldots+a_{2n})$

$=a_1+qS_{偶}$

奇 偶

$$\frac{S_{奇}-a_1}{S_{偶}}=q$$

典例分析

例2 已知等比数列$\{a_n\}$共有2n项，其和为一240，且$(a_1+a_3+$
$\ldots+$

$a_{2n-1})-(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=80$，求公比q.

解：由题意知S奇+S偶=—240，S奇一S偶=80

$\therefore S_{奇}=-80$，$S_{偶}=-160$，

$$\therefore q=\frac{S_{偶}}{S_{奇}}=2.$$

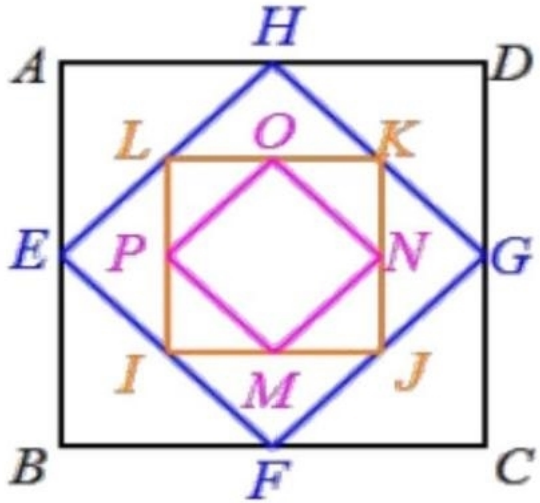
变式：若等比数列$\{a_n\}$共有2n项，其公比为2，其奇数项和比偶数项和少100，则数列$\{a_n\}$的所有项之和为. <u>300</u> .

典例分析

例3 如图，正方形ABCD 的边长为5cm， 取正方形ABCD 各边的中点E,F,G,H, 作第2个正方形 EFGH, 然后再取正方形EFGH各边的中点I,J,K,L， 作第3个正方形IJKL， 依此方法一直继续下去.

(1)求从正方形ABCD开始，连续10个正方形的面积之和；

(2)如果这个作图过程可以一直继续下去，那么所有这些正方形的面积之和将趋近于多少?



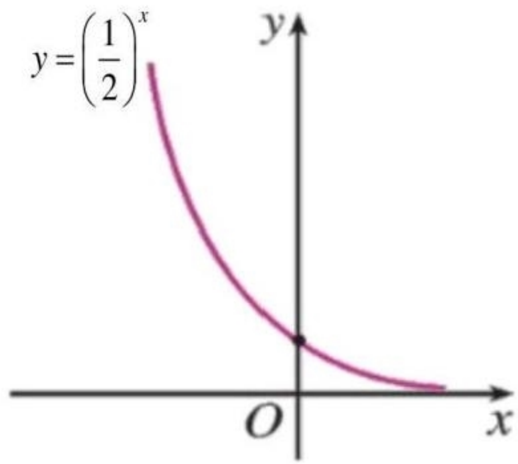
设{an}的前项和为Sn.

(1) $S_{10}=\frac{25\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=50\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]=\frac{25575}{512}$

所以，前10个正方形的面积之和为$\frac{25575}{512}$cm^2.

(2) 当n无限增大时， S, 无限趋近于所有正方形的面积和$a_1+a_2+a_3+\cdots+an+\cdots$

而$S_n=\frac{25\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}=50\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]$



随着n 的无限增大，$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$将趋近于0, Sn将趋近于50.
所以，所有这些正方形的面积之和将趋近于50.

典例分析

例4 去年某地产生的生活垃圾为20万吨，其中14万吨垃圾以填埋方式处理，6万吨垃圾以环保方式处理. 预计每年生活垃圾的总量递增5%，同时，通过环保方式处理的垃圾量每年增加1.5万吨. 为了确定处理生活垃圾的预算，请你测算一下从今年起5年内通过填埋方式处理的垃圾总量(精确到0.1万吨).

分析： 由题意可知，每年生活垃圾的总量构成等比数列，而每年以环保方式处理的垃圾量构成等差数列. 因此，可以利用等差数列、等比数列的知识进行计算.