第 04 讲 解三角形

（模拟精练+真题演练）

最新模拟精练

1．（2023·北京海淀·中央民族大学附属中学校考模拟预测）在$\triangle ABC$中，若$a=2b\cos C$，则$\triangle ABC$一定是（　）

A．正三角形　　B．直角三角形　　C．等腰或直角三角形 D．等腰三角形

【答案】D

【解析】由$a=2b\cos C$及余弦定理得：$a=2b\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Rightarrow a^2=a^2+b^2-c^2\Rightarrow b^2=c^2$，即$b=c$.

故选：D

2．（2023·四川南充·统考三模）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别是a,b,c，若$b^2=a^2+c^2-ac$，则$B=$（　）

A．$\dfrac{\pi}{3}$　　B．$\dfrac{\pi}{6}$　　C．$\dfrac{2\pi}{3}$　　D．$\dfrac{5\pi}{6}$

【答案】A

【解析】由$b^2=a^2+c^2-ac$得$ac=a^2+c^2-b^2$，所以$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，

由于$B\in(0,\pi),\therefore b=\dfrac{\pi}{3}$，

故选：A

3．（2023·辽宁·校联考二模）设$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$A+B=\dfrac{5\pi}{6}$，$a=3$，$c=2$，则$\sin A=$（　）

A．$\dfrac{4}{5}$　　B．$\dfrac{3}{5}$　　C．$\dfrac{3}{4}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

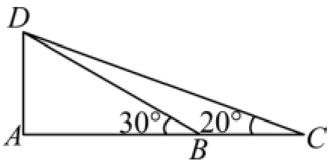
【答案】C

【解析】因为$A+B=\dfrac{5\pi}{6}$，所以$C=\dfrac{\pi}{6}$，

由$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\dfrac{3}{\sin A}=4$，所以$\sin A=\dfrac{3}{4}$.

故选：C.

4．（2023·吉林白山·抚松县第一中学校考模拟预测）抚松县第一中学全体师生为庆祝 2023 年高考圆梦成功，选定大方鼎雕塑为吉祥物，为高考鼎立助威.若在B,C处分别测得雕塑最高点的仰角为$30°$和$20°$，且$BC=5$，则该雕塑的高度约为（　）（参考数据$\cos 10°=0.985$）



A．4.93　　B．5.076　　C．6.693　　D．7.177

【答案】A

【解析】在$\triangle BCD$中，结合图形可知，$\angle BDC=10^\circ$，由正弦定理得：

$$\frac{BD}{\sin 20^\circ}=\frac{BC}{\sin 10^\circ}\Rightarrow BD=\frac{BC\cdot\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ}=2\cos 10^\circ\cdot BC=10\cos 10^\circ=9.85,$$

在$\text{Rt}\triangle ABD$中，$AD=BD\sin\angle ABD=9.85\times\sin 30^\circ\approx 4.93$；

故选：A

5．（2023·广西·校联考模拟预测）在$\triangle ABC$中，若$\sin C=3\sin A$，$b^2=2ac$，则$\cos B=$（　）

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{3}{4}$

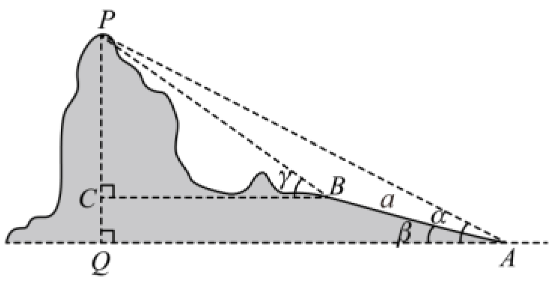
【答案】C

【解析】因为$\sin C=3\sin A$，由正弦定理可得$c=3a$，且$b^2=2ac$，

由余弦定理可得：$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+9a^2-6a^2}{6a^2}=\frac{2}{3}$.

故选：C.

6．（2023·四川·校考模拟预测）如图，在山脚A测得山顶P的仰角为α，沿倾斜角为β的斜坡向上走a米到B，在B处测得山顶P的仰角为γ，则山高$h=$（　）



A．$\frac{a\cos\alpha\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)}$　　B．$\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)}{\sin(\gamma-\beta)}$

C．$\frac{a\cos\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$　　D．$\frac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$

【答案】D

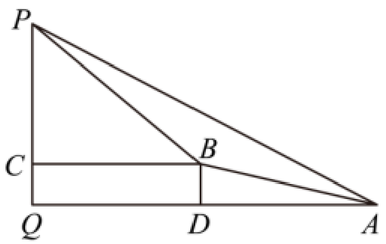
【解析】在$\triangle PAB$中，$\angle PAB=\alpha-\beta,\angle BPA=(\frac{\pi}{2}-\alpha)-(\frac{\pi}{2}-\gamma)=\gamma-\alpha$，

由正弦定理得$\frac{PB}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{a}{\sin(\gamma-\alpha)}$，可得$PB=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$，

过点B作$BD\perp AQ$，可得$CQ=BD=a\sin\beta$

所以 $PQ=PC+CQ=PB\cdot\sin\gamma+a\sin\beta=\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.

故选：D.



7. （2023·重庆·统考模拟预测）我国南宋著名数学家秦九韶提出了由三角形三边求三角形面积的“三斜求积”，设 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a，b，c，面积为 S，则“三斜求积”公式为 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}$，若 $a^2\sin C=2\sin A$，$(a+c)^2=6+b^2$，则用“三斜求积”公式求得 $\triangle ABC$ 的面积为（　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

【答案】A

【解析】由 $a^2\sin C=2\sin A$ 得 $a^2c=2a,\therefore ac=2$，

由 $(a+c)^2=6+b^2$ 得 $a^2+c^2-b^2=6-2ac=2$，

故 $S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2}\right)^2\right]}=\sqrt{\frac{1}{4}\left[4-\left(\frac{2}{2}\right)^2\right]}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

股癖：A

8. （2023·全国·模拟预测）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$b=2c$，$4\sin C+\cos B=1$，则 $\dfrac{\sin A}{\sin B}=$（　）

A. $\dfrac{2\sqrt{21}-3}{10}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{21}-3}{5}$

C. $\dfrac{2\sqrt{13}+3}{10}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{13}+3}{5}$

【答案】A

【解析】由 $b=2c$ 及正弦定理，可得 $\sin B=2\sin C$.

由 $4\sin C+\cos B=1$，可得 $\cos B=1-4\sin C$.

又 $\sin^2 B+\cos^2 B=1$，$\therefore(2\sin C)^2+(1-4\sin C)^2=1$.

又$\sin C>0$，解得$\sin C=\frac{2}{5}$，则$\cos B=1-4\times\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}<0$，

$\therefore B$为钝角，C为锐角.

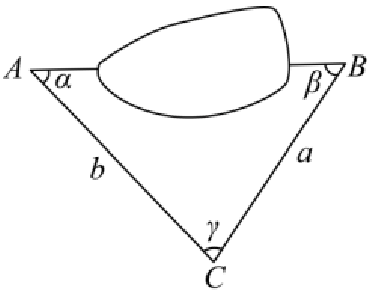
$\therefore \cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{5}$， $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$.

故$\sin A=\sin\left(B+C\right)=\sin B\cos C+\cos B\sin C=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{21}}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{5}=\frac{4\sqrt{21}-6}{25}$，

$\therefore \frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\frac{4\sqrt{21}-6}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{21}-3}{10}$.

故选: A.

9. **（多选题）**（2023·重庆·统考三模）如图，为了测量障碍物两侧A，B之间的距离，一定能根据以下数据确定AB长度的是（　）



A．a，b，γ　　B．α，β，γ

C．a，β，γ　　D．α，β，b

【答案】ACD

【解析】法一、根据三角形全等的条件SAS, ASA, AAS可以确定A、C、D三项正确，它们都可以唯一确定三角形；

法二、对于A项，由余弦定理可知$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$，可求得$c$，即A正确；

对于B项，知三个内角，此时三角形大小不唯一，故B错误；

对于C项，由正弦定理可知$\frac{a}{\sin\left(\pi-\beta-\gamma\right)}=\frac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow c=\frac{a\sin\gamma}{\sin\left(\pi-\beta-\gamma\right)}$，即C正确；

对于D项，同上由正弦定理得$c=\frac{b\sin\left(\pi-\alpha-\beta\right)}{\sin\beta}$，即D正确；

故选：ACD.

10. **（多选题）**（2023·山东聊城·统考一模）在$\triangle ABC$中，若$A>B$，则（　）

A．$\sin A>\sin B$　　B．$\cos A<\cos B$

C．$\sin 2A>\sin 2B$　　D．$\cos 2A<\cos 2B$

【答案】ABD

【解析】在$\triangle ABC$中，若$A>B$，由三角形中大边对大角，可得$a>b$，又由正弦定理，可知$\sin A>\sin B$，故 A 选项正确；

又由余弦函数在$\left(0,\pi\right)$上单调递减，可知$\cos A<\cos B$，故 B 选项正确；

由$\sin 2A=2\sin A\cos A,$ 和$\sin 2B=2\sin B\cos B$，当$A>\dfrac{\pi}{2}$时，$\cos A<0$，所以$\sin 2A<\sin 2B$，故 C 选项错误

由$\cos 2A=1-2\sin^2 A$，$\cos 2B=1-2\sin^2 B$，由 A 选项可知正确，故 D 选项正确.

故选：ABD

11．（多选题）（2023·江苏南京·南京市秦淮中学校考模拟预测）在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$\left(a^2+c^2-b^2\right)\tan B=\sqrt{3}ac$，则$B$的值为（　）

A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{3}$　　C．$\dfrac{5\pi}{6}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

【答案】BD

【解析】根据余弦定理可知$a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，代入$\left(a^2+c^2-b^2\right)\tan B=\sqrt{3}ac$，可得

$2ac\cos B\cdot\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}ac$，即$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

因为$0<B<\pi$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$或$B=\dfrac{2\pi}{3}$，

故选：BD.

12．（多选题）（2023·海南省直辖县级单位·校联考一模）在$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，$b^2+c^2=a^2+bc$，$a=\sqrt{3}$，若满足要求的$\triangle ABC$有且只有 1 个，则b的取值可以是（　　）

A．1　　B．$\sqrt{3}$　　C．2　　D．3

【答案】ABC

【解析】由$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，及$0<A<\pi$，

得$A=\dfrac{\pi}{3}$.若满足要求的$\triangle ABC$有且只有 1 个，则$a=b\sin A$或$a\geq b$，

即$\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$或$\sqrt{3}\geq b$，解得$b=2$或$0<b\leq\sqrt{3}$.

故选：ABC

13．（2023·陕西商洛·镇安中学校考模拟预测）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，若

$c\sin\dfrac{B+C}{2}=a\sin C,\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{3}{bc\sin A}$，则$\triangle ABC$外接圆的面积为______.

【答案】π

【解析】由正弦定理得$\sin C\sin\dfrac{B+C}{2}=\sin A\sin C$，

因为$\sin C \neq 0$，所以$\sin\frac{B+C}{2}=\sin A$，即$\sin\frac{\pi-A}{2}=\sin A$，可得$\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

因为$A\in(0,\pi)$，所以$\sin A\neq 0, \cos\frac{A}{2}\neq 0$，得$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，解得$A=\frac{\pi}{3}$.

$\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{3}{bc\sin A}$，化简得$\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\cos C}{\sin C}=\frac{3}{bc\sin A}$，

由正弦定理、余弦定理，得$\frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b}+\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{c}=\frac{3}{abc}$，化简得$a=\sqrt{3}$，

由正弦定理可得$2r=\frac{a}{\sin A}=2$，得$r=1$，因此$\triangle ABC$外接圆的面积为π.

故答案为：π

14.（2023·河南·河南省实验中学校考模拟预测）在锐角$\triangle ABC$中，$AB=3$，$4\cos A\sin B=1$，若BC在AB上的投影长等于$\triangle ABC$的外接圆半径R，则R=______.

【答案】2

【解析】由题意得，$\frac{BC}{\sin A}=2R$，$BC\cos B=R$，

即$BC\cos B=\frac{BC}{2\sin A}$，即$2\sin A\cos B=1$，

因为$4\cos A\sin B=1$，所以$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，

故$2R=\frac{AB}{\sin C}=\frac{3}{\frac{3}{4}}=4$，故$R=2$.

故答案为：2

15. （2023·上海嘉定·校考三模）在$\triangle ABC$中，已知$b\sin 2A+a\sin B=0$，则角A的大小为__________.

【答案】$\frac{2\pi}{3}$

【解析】因为$b\sin 2A+a\sin B=0$，

由正弦定理得$\sin B\sin 2A+\sin A\sin B=0$，即$2\sin B\sin A\cos A+\sin A\sin B=0$，

又因为$A,B\in(0,\pi)$，所以$\sin A,\sin B\neq 0$，

所以$\cos A=-\frac{1}{2}$，

所以$A=\frac{2\pi}{3}$.

故答案为：$\frac{2\pi}{3}$.

16.（2023·陕西西安·统考一模）在$\triangle ABC$中，$\sin C=2\sin B\cos(B+C), A=\frac{5\pi}{6}, b=\sqrt{3}$，则$a=$__________.

【答案】$\sqrt{21}$

【解析】因为$\sin C=2\sin B\cos\left(B+C\right)$，所以$c=-2b\cos A$，

所以$c=2b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}b=3$，

由余弦定理$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos A}=\sqrt{3+9+9}=\sqrt{21}$.

故答案为：$\sqrt{21}$.

17. （2023·河南·校联考模拟预测）在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，$6\cos B\cos C-1=3\cos\left(B-C\right)$.

(1)若$B=\frac{\pi}{6}$，求$\cos C$；

(2)若$c=3$，点D在BC边上，且AD平分$\angle BAC, AD=\frac{8\sqrt{3}}{7}$，求$\triangle ABC$的面积.

【解析】（1）因为$6\cos B\cos C-1=3\cos\left(B-C\right)=3\cos B\cos C+3\sin B\sin C$，

则$3\cos B\cos C-3\sin B\sin C=3\cos\left(B+C\right)=1$，$\cos\left(B+C\right)=\frac{1}{3}$，

又$A+B+C=\pi$，$\cos\left(B+C\right)=\cos\left(\pi-A\right)=-\cos A$，则$\cos A=-\frac{1}{3}$，

又$A\in\left(0,\pi\right)$，所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

则$\cos C=-\cos\left(A+B\right)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$.

（2）由（1）知$\cos A=-\frac{1}{3}$，则$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ADB}$得$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{A}{2}$，

即$2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=b\cdot AD\sin\frac{A}{2}+c\cdot AD\sin\frac{A}{2}$，

则$6b\cos\frac{A}{2}=\left(3+b\right)AD$，即$2\sqrt{3}b=\left(3+b\right)\cdot\frac{8\sqrt{3}}{7}$，解得$b=4$，

所以$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

18. （2023·广东·校联考模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=1+2\sqrt{2}\cos x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

(1)求$\cos A$；

(2)若$\triangle ABC$的面积为$10\sqrt{2}$且$\sin B+\sin C=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的周长.

【解析】（1）

$f(x)=1+2\sqrt{2}\cos x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=1+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，因为

$f\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\sqrt{2}\sin\left[2\left(\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{2}\cos A=-\frac{\sqrt{2}}{3}$，解得 $\cos A=\frac{1}{3}$；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由（1）可得 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=10\sqrt{2}$，即 $bc=30$，

因为 $\sin B+\sin C=2\sqrt{2}$，则 $\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{3}{2}$，

由正弦定理可得 $\frac{b+c}{a}=\frac{3}{2}$ 即 $b+c=\frac{3}{2}a$，

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{4}a^2-\frac{8}{3}\times 30$

$\therefore a=8$，则 $b+c=12$，

$\therefore$三角形周长 $l_{\triangle ABC}=a+b+c=20$．

19．（2023·吉林通化·梅河口市第五中学校考模拟预测）记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，分别以 a,b,c 为边长的三个正三角形的面积依次为 S_1,S_2,S_3，已知 $S_1+S_2-S_3=\sqrt{3},\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

(1)求 $\triangle ABC$ 的面积；

(2)若 $\sin A\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$，求 c．

【解析】（1）由题意得 $S_1=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$，$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$，

则 $S_1+S_2-S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{\sqrt{3}}{4}b^2-\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=\sqrt{3}$，即 $a^2-c^2+b^2=4$，

由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得 $ab\cos C=2$，则 $\cos C>0$，又 $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

则 $\cos C=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以 $ab=\frac{2}{\cos C}=\sqrt{5}$，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}$；

（2）由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

所以$\dfrac{c^2}{\sin^2C}=\dfrac{a}{\sin A}\cdot\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{ab}{\sin A\sin B}=\dfrac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=3$，

则$\dfrac{c}{\sin C}=\sqrt{3}$或$\dfrac{c}{\sin C}=\sqrt{3}$（舍去），所以$c=\sqrt{3}\sin C=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

20．（2023·辽宁锦州·统考模拟预测）在$\triangle ABC$中，角A是锐角，角A,B,C所对的边分别记作a,b,c，满足$a=2$，$\dfrac{\sqrt{3}\sin A+\cos A}{\sqrt{3}\cos A-\sin A}=\tan\dfrac{5\pi}{12}$.

(1)求A；

(2)若$\dfrac{b^2+c^2}{a^2}=1+\sqrt{2}$，求$\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}$的值.

【解析】（1）因为$\dfrac{\sqrt{3}\sin A+\cos A}{\sqrt{3}\cos A-\sin A}=\dfrac{2(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A)}{2(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A)}=\dfrac{2\sin(A+\frac{\pi}{6})}{2\cos(A+\frac{\pi}{6})}=\tan(A+\dfrac{\pi}{6})$，

又$\dfrac{\sqrt{3}\sin A+\cos A}{\sqrt{3}\cos A-\sin A}=\tan\dfrac{5\pi}{12}$，所以$\tan(A+\dfrac{\pi}{6})=\tan\dfrac{5\pi}{12}$，

又因为角A是锐角，即$A\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以$A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3})$，

所以$A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{12}$，故$A=\dfrac{\pi}{4}$；

（2）因为$\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{\cos B}{\sin B}+\dfrac{\cos C}{\sin C}=\dfrac{\sin C\cos B+\sin B\cos C}{\sin B\sin C}=\dfrac{\sin(C+B)}{\sin B\sin C}$，

又$\sin(C+B)=\sin A$，所以$\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}$，

因为$A=\dfrac{\pi}{4}$，$a=2$，

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，得$2R=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=2\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{1}{\tan B}+\dfrac{1}{\tan C}=\dfrac{\sin A}{\sin B\sin C}=\dfrac{\frac{a}{2R}}{\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}}=\dfrac{2Ra}{bc}=\dfrac{2\sqrt{2}a}{bc}$，

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\dfrac{\pi}{4}$，得$b^2+c^2=a^2+\sqrt{2}bc$，

因为$\dfrac{b^2+c^2}{a^2}=1+\sqrt{2}$，所以$b^2+c^2=(1+\sqrt{2})a^2$

所以$(1+\sqrt{2})a^2=a^2+\sqrt{2}bc$，即$a^2=bc$，

因为$a=2$，所以$bc=4$，

所以 $\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}=\frac{2\sqrt{2}a}{bc}=\frac{2\sqrt{2}\times 2}{4}=\sqrt{2}$.

真题实战演练

1．（2023•上海）已知 ΔABC 中，角 A， B， C 所对的边 $a=4$， $b=5$， $c=6$，则 $\sin A=$__________.

【答案】$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

【解析】$a=4$， $b=5$， $c=6$，

由余弦定理得， $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{25+36-16}{2\times 5\times 6}=\frac{3}{4}$，

又Q $A\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin A>0$，

$\therefore \sin A=\sqrt{1-cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{7}}{4}$.

2．（2022•甲卷（理））已知 ΔABC 中，点 D 在边 BC 上，$\angle ADB=120^\circ$， $AD=2$， $CD=2BD$．当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时， $BD=$__________.

【答案】$\sqrt{3}-1$.

【解析】设 $BD=x$， $CD=2x$，

在三角形 ACD 中， $b^2=4x^2+4-2\cdot 2x\cdot 2\cdot\cos 60^\circ$，可得： $b^2=4x^2-4x+4$，

在三角形 ABD 中， $c^2=x^2+4-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 120^\circ$，可得： $c^2=x^2+2x+4$，

要使得 $\frac{AC}{AB}$ 最小，即 $\frac{b^2}{c^2}$ 最小，

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4}=\frac{4(x^2+2x+4)-12x-12}{x^2+2x+4}=4-12\cdot\frac{x+1}{x^2+2x+4}=4-12\cdot\frac{x+1}{(x+1)^2+3}=4-\frac{12}{x+1+\frac{3}{x+1}},$$

其中 $x+1+\frac{3}{x+1}\ldots 2\sqrt{3}$，此时 $\frac{b^2}{c^2}\ldots 4-2\sqrt{3}$，

当且仅当 $(x+1)^2=3$ 时，即 $x=\sqrt{3}-1$ 或 $x=-\sqrt{3}-1$（舍去），即 $x=\sqrt{3}-1$ 时取等号，

故答案为： $\sqrt{3}-1$.

3．（2023•乙卷（文））在 ΔABC 中，已知 $\angle BAC=120^\circ$， $AB=2$， $AC=1$．

（1）求 $\sin\angle ABC$；

（2）若 D 为 BC 上一点．且 $\angle BAD=90^\circ$，求 ΔADC 的面积．

【解析】（1）在 ΔABC 中，由余弦定理可知 $BC^2=2^2+1^2-2\times 1\times 2\times\cos 120^\circ=7$，