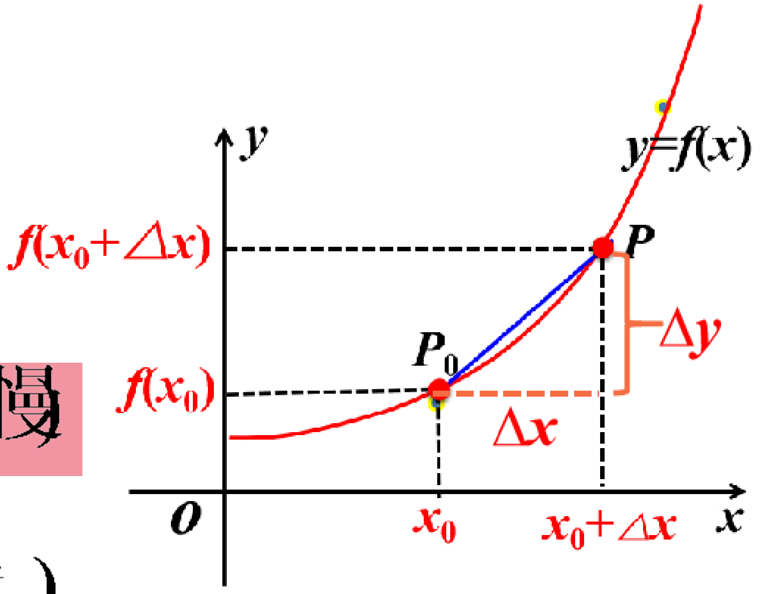
回顾

导数的定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

导数的物理意义 $f(x)$在x_0处的瞬时变化率(变化快慢)

如: 路程$s(t)$在t_0处的瞬时变化率为$s'(t_0)=v(t_0)$



导数的几何意义 $f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线斜率, 即$k=f'(x_0)$

导函数的定义 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

从导函数的定义可知，一个函数的导数是唯一确定的. 在必修第一册教材中我们学过基本初等函数，并且知道，很多复杂的函数都是通过对这些函数进行加、减、乘、除等运算得到的.

由此自然想到，能否先求出基本初等函数的导数，然后研究出导数的“运算法则”，这样就可以利用导数的运算法则和基本初等函数的导数求出复杂函数的导数.

本节我们就来研究这些问题.

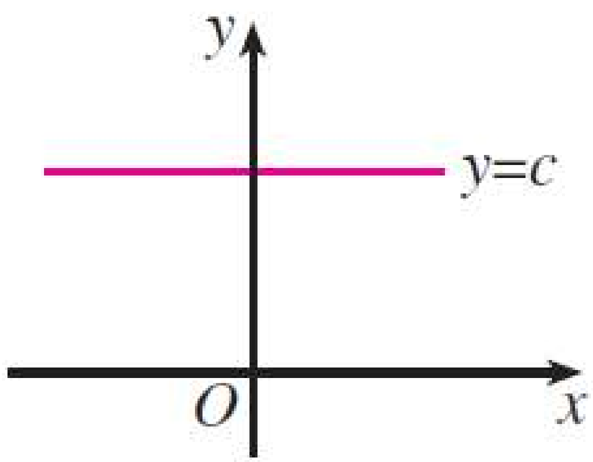
5.2.1 基本初等函数的导数

推导基本初等函数的导(函)数

依据: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

1.函数$y=f(x)=c$的导(函)数: $y'=0$

$$\text{Q}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{c-c}{\Delta x}=0,\ \therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$



若$y=c$表示路程关于时间的函数,

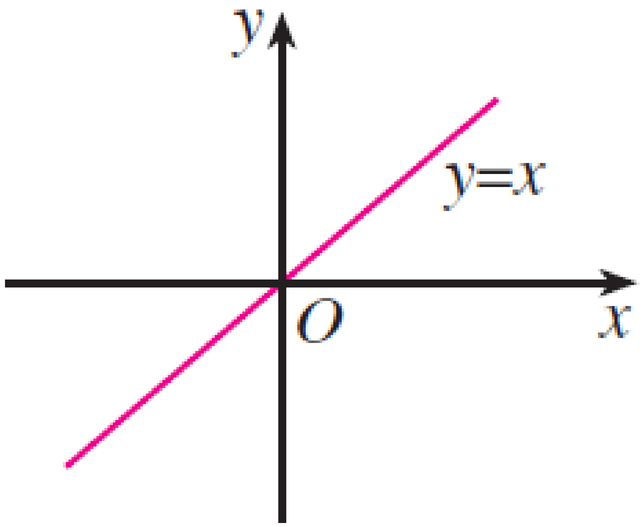
则$y'=0$的物理意义是[redacted]

2.函数$y=f(x)=x$的导(函)数: $y'=1$

若$y=kx$,则$y'=k$.

$$Q\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1.$$



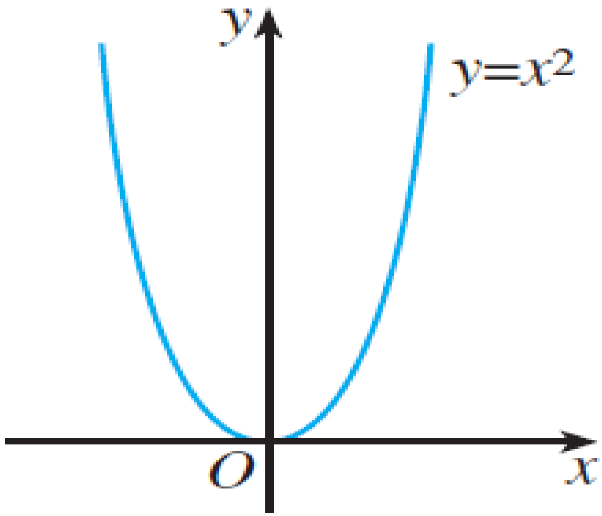
若$y=x$表示路程关于时间的函数,

则$y'=1$的物理意义是[redacted]

3.函数$y=f(x)=x^2$的导(函)数: $y'=2x$

$$\text{Q}\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x,$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$



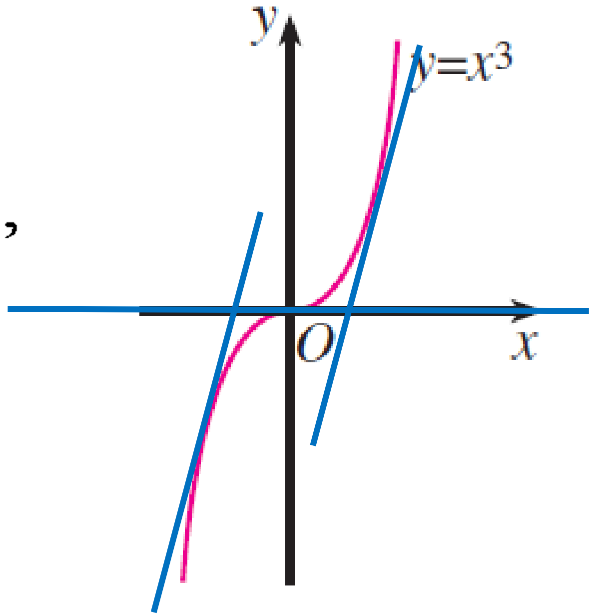
$y'=2x$的几何意义是[redacted]

若$y=x^2$表示路程关于时间的函数, 则$y'=2x$的物理意义是某物体做瞬时速度为$2x$的变速运动.

4.函数$y=f(x)=x^3$的导(函)数: $y'=3x^2$

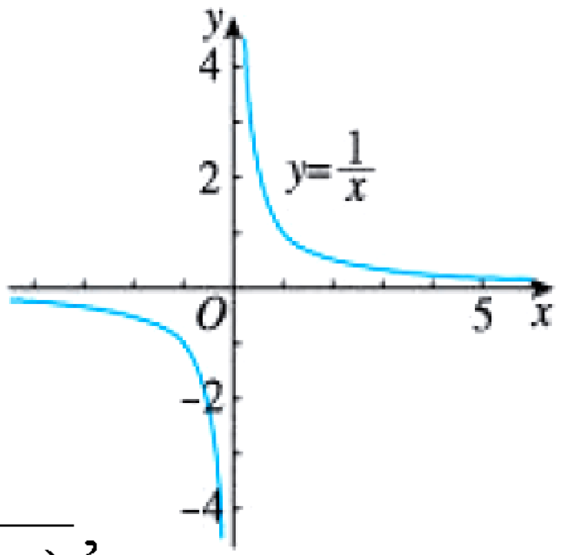
$$Q\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2,$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[3x^2+3x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]=3x^2.$$



$y'=3x^2$的几何意义是函数$y=x^3$的图象上点(x, y)处的切线斜率为$3x^2$，即随着x的变化，切线的斜率也在变化，且恒为非负数.

5.函数$y=f(x)=\dfrac{1}{x}$的导(函)数: $y'=-\dfrac{1}{x^2}$



$$Q\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)\Delta x}=\frac{-1}{x(x+\Delta x)},$$

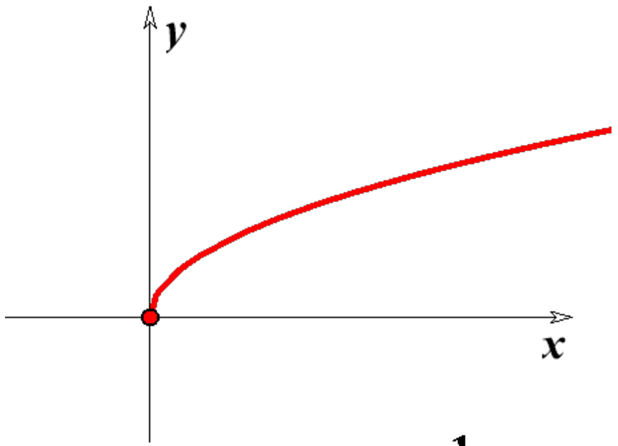
$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{x(x+\Delta x)}=-\frac{1}{x^2}$$

$x>0$时，x越大，$|y'|$越小，函数$y=\frac{1}{x}$减少得越来越慢.

$x<0$时，x越大，$|y'|$越大，函数$y=\frac{1}{x}$减少得越来越快;

6.函数 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 的导(函)数:

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$



$$\because \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}},$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

追问: 该函数的定义域及其导数的定义域是否一样?

不一样,

原函数的定义域为 $\{x|x\geq 0\}$

,

导数的定义域为 $\{x|x>0\}$.

问题: 前面几个函数都是我们学过的一类基本初等函数——幂函数，根据这些幂函数的导数结果，

$$x'=1,$$

$$(x^2)'=2x,$$

$$(x^3)'=3x^2,$$

$$(x^3)'=3x^2,$$

$$(x^{-1})'=-x^{-2},$$

$$(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

你能归纳出对于一般幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 的导函数公式吗?

$$\boxed{(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}}$$