专题04 全等三角形综合问题（易错必刷22题6种题型专项训练）

题型大集合

目录

题型大通关

【题型一】三角形全等之三垂直模型（共3题）

（23-24八年级上·天津滨海新·期末）

1．在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，直线MN经过点C，且$AD\perp MN$于D，$BE\perp MN$于E．

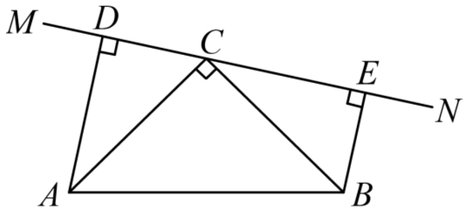


图1

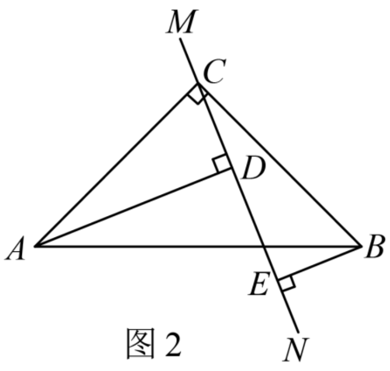


图2

(1)当直线MN绕点C旋转到图1的位置时，求证：DE，AD，BE的关系；

(2)当直线MN绕点C旋转到图2的位置时，（1）中的结论还成立吗？若成立，请给出证明；若不成立，请写出新的结论并说明理由．

（19-20七年级下·广东深圳·期末）

2．在$Rt\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$，直线l过点C.

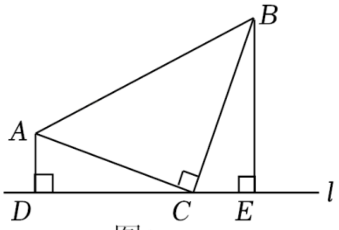


图1

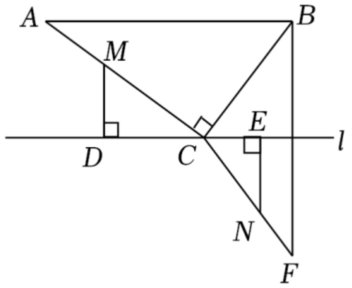


图2

(1)当$AC=BC$时，如图1，分别过点A、B作$AD\perp l$于点D，$BE\perp l$于点E.求证：$\triangle ACD\cong\triangle CBE$.

(2)当$AC=8$，$BC=6$时，如图2，点B与点F关于直线l对称，连接BF，CF，动点M从点A出发，以每秒1个单位长度的速度沿AC边向终点C运动，同时动点N从点F出发，以每秒3个单位的速度沿$F\to C\to B\to C\to F$向终点F运动，点M、N到达相应的终点时停止运动，过点M作$MD\perp l$于点D，过点N作$NE\perp l$于点E，设运动时间为t秒.

①$CM=$____，当N在$F\to C$路径上时，$CN=$____.（用含t的代数式表示）

②当$\triangle MDC$与$\triangle CEN$全等时，求出t的值.

（23-24七年级下·云南昆明·期末）

3．综合与实践：

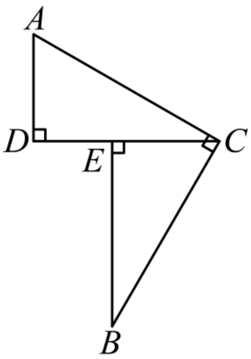


图1

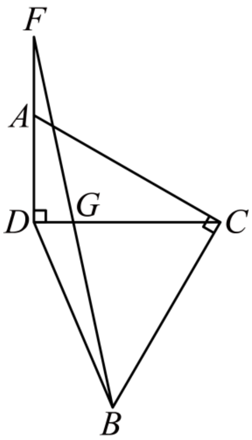


图2

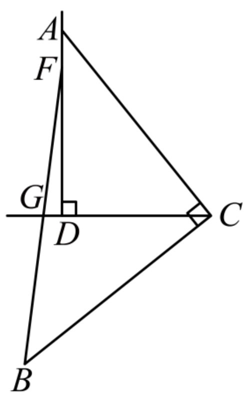


图3

(1)【问题情境】在综合与实践课上，何老师对各学习小组出示了一个问题：如图1，$\angle ACB=90^{\circ}$，$AC=BC$，$AD\perp CD$，$BE\perp CD$，垂足分别为点D，E．请证明：$AD=CE$.

(2)【合作探究】"希望"小组受此问题的启发，将题目改编如下：如图2，$\angle CDF=90^{\circ}$，$CD=FD$，点A是DF上一动点，连接AC，作$\angle ACB=90^{\circ}$且$BC=AC$，连接BF交CD于点G.若$DG=1$，$CG=3$，请证明：点A为DF的中点.

(3)【拓展提升】"创新"小组在"希望"小组的基础上继续提出问题：如图3，$\angle CDF=90^{\circ}$，

$CD = FD$，点A是射线DF上一动点，连接AC，作$\angle ACB = 90^{\circ}$且$BC = AC$，连接BF交射线CD于点G．若$FD = 4AF$，请直接写出$\dfrac{CG}{DG}$的值．

【题型二】三角形全等之一线三等角模型（共5题）

（23-24七年级下·山东济南·期末）

4．【模型呈现】

（1）如图1，$\angle BAD = 90°$，$AB = AD$，$BC \perp CA$于点C，$DE \perp AE$于点E．

求证：$BC = AE$．

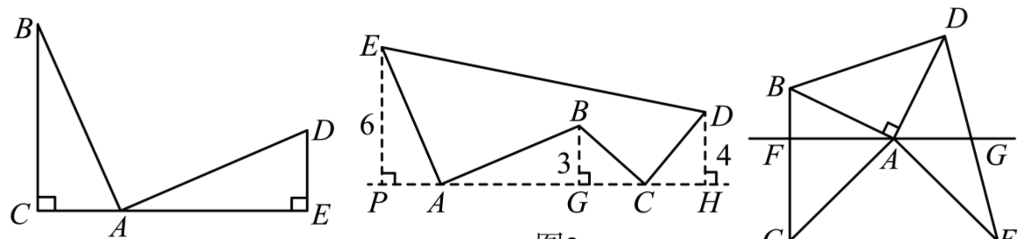


图1　图2　图3

【模型应用】

（2）如图2，$EA \perp AB$且$AE = AB$，$BC \perp CD$且$BC = CD$，请按照图中所标注的数据，计算图中实线所围成的图形$ABCDE$的面积．

【深入探究】

（3）如图3，$\angle BAD = \angle CAE = 90°$，$AB = AD$，$AC = AE$，连接$BC$、$DE$，且$BC \perp AF$于点$F$，$DE$与直线$AF$交于点$G$．

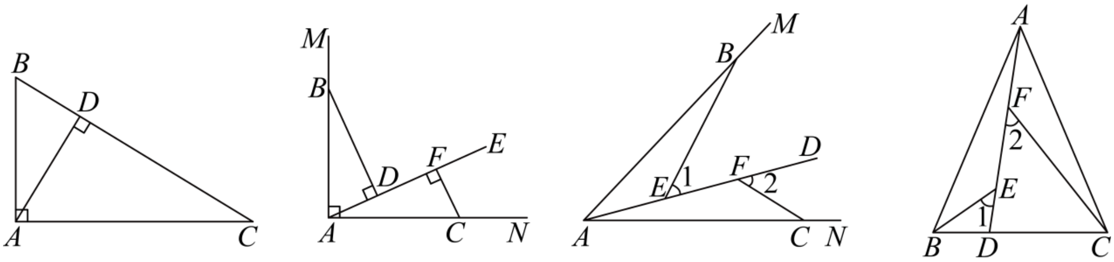
①求证$DG = GE$；

②若$BC = 21$，$AF = 12$，求$\triangle ADG$的面积．

（23-24八年级上·山东日照·期末）

5．问题情境：如图①，在$Rt\triangle ABC$中，$\angle BAC = 90°$，$AD \perp BC$于点D．

可知：$\angle BAD = \angle C$（不需要证明）；



图①　图②　图③　图④

(1)特例探究：如图②，$\angle MAN = 90°$，射线AE在这个角的内部，点B、C在$\angle MAN$的边

AM、AN 上，且 $AB=AC$，$CF\perp AE$ 于点 F，$BD\perp AE$ 于点 D．证明：$\triangle ABD\cong\triangle CAF$；

(2)归纳证明：如图③，点 B，C 在 $\angle MAN$ 的边 AM、AN 上，点 E，F 在 $\angle MAN$ 内部的射线 AD 上，$\angle 1$、$\angle 2$ 分别是 $\triangle ABE$、$\triangle CAF$ 的外角．已知 $AB=AC$，$\angle 1=\angle 2=\angle BAC$．求证：$\triangle ABE\cong\triangle CAF$；

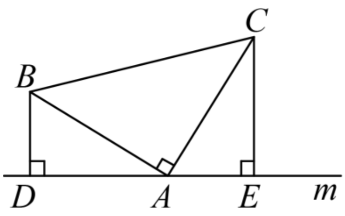
(3)拓展应用：如图④，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$AB>BC$．点 D 在边 BC 上，$CD=2BD$，点 E、F 在线段 AD 上，$\angle 1=\angle 2=\angle BAC$．若 $\triangle ABC$ 的面积为 24，则 $\triangle ACF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和为 _．（直接写出结果）

（23-24 七年级下·全国·期末）

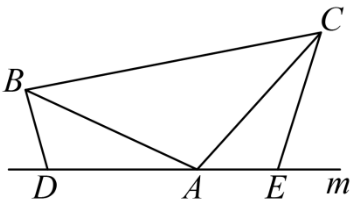
6．（1）如图①，已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC$，直线 m 经过点 A，$BD\perp m$ 于 D，$CE\perp m$ 于 E，求证：$DE=BD+CE$；

（2）拓展：如图②，将（1）中的条件改为：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D、A、E 三点都在直线 m 上，并且 $\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC=\alpha$，$\alpha$ 为任意锐角或钝角，请问结论 $DE=BD+CE$ 是否成立？如成立，请证明；若不成立，请说明理由；

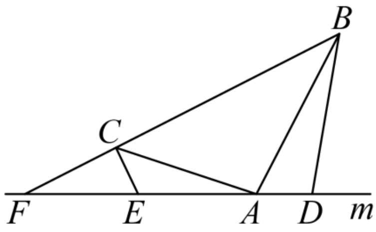
（3）应用：如图③，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 是钝角，$AB=AC$，$\angle BAD>\angle CAE$，$\angle BDA=\angle AEC=\angle BAC$，直线 m 与 BC 的延长线交于点 F，若 $BC=2CF$，$\triangle ABC$ 的面积是 12，求 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CEF$ 的面积之和．



图①



图②



图③

（23-24 七年级下·山西运城·期末）

7．综合与实践

问题情境：

数学课上，同学们以等腰三角形为背景展开探究．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，直线 l 过点 A，点 D,E 是直线 l 上两点．

独立思考：

（1）如图 1，当直线 l 在 $\triangle ABC$ 的外部，满足 $\angle BDA=\angle CEA=\angle BAC$ 时，试探究线段 BD，CE 与 DE 之间的数量关系，并说明理由；

拓展探究：

（2）如图2，当直线l经过$\triangle ABC$的内部，交BC于点M，且$\angle BAM < \angle CAM$，满足$\angle BDM = \angle CEM = \angle BAC$时，（1）中结论是否仍然成立？若不成立，请写出线段BD，CE与DE之间的数量关系，并说明理由；

（3）如图3，当直线l经过$\triangle ABC$的内部，交BC于点M，且$\angle BAM > \angle CAM$，满足$\angle BDM = \angle CEM = \angle BAC$时，（1）中结论是否仍然成立？若不成立，请直接写出线段BD,CE与DE之间的数量关系．

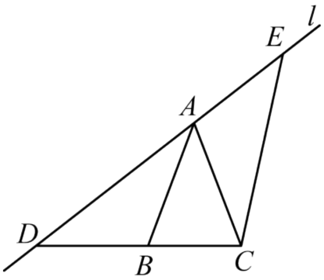


图1

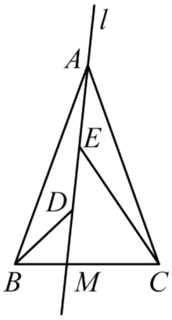


图2

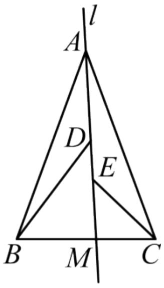
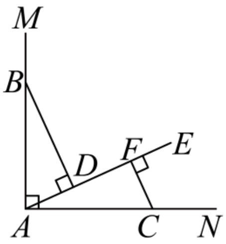


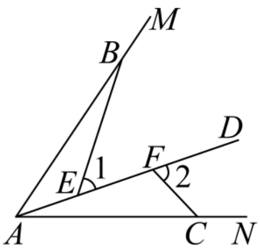
图3

（23-24九年级上·山东青岛·期末）

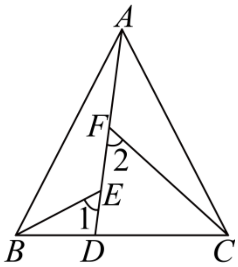
8．如图：



图①



图②



图③

(1)如图1，$\angle MAN = 90°$，射线AE在这个角的内部，点B、C分别在$\angle MAN$的边AM、AN上，且$AB = AC$，$CF \perp AE$于点F，$BD \perp AE$于点D．求证：$\triangle ABD \cong \triangle CAF$；

(2)如图2，点B、C分别在$\angle MAN$的边AM、AN上，点E、F都在$\angle MAN$内部的射线AD上，$\angle 1$、$\angle 2$分别是$\triangle ABE$、$\triangle CAF$的外角．已知$AB = AC$，且$\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$．求证：$\triangle ABE \cong \triangle CAF$；

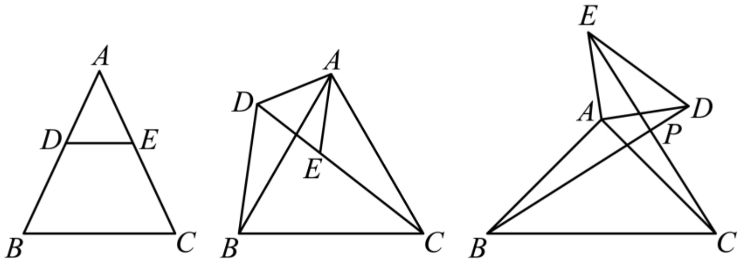
(3)如图3，在$\triangle ABC$中，$AB = AC$，$AB > BC$．点D在边BC上，$CD = 2BD$，点E、F在线段AD上，$\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$．若$\triangle ABC$的面积为21，求$\triangle ACF$与$\triangle BDE$的面积之和．

【题型三】三角形全等之手拉手模型（共3题）

（23-24七年级下·吉林长春·期末）

9．如图1，已知$\triangle ABC$和$\triangle ADE$都是等腰三角形，点D和点E分别在AB和AC上，

$AB=AC, AD=AE, \angle BAC=\angle DAE=\alpha$，易知$BD$和$CE$的数量关系是$BD=CE$．



(1)观察猜想

若$\alpha=60°$，将$\triangle ADE$绕点A旋转到如图2所示的位置，连结BD和CE，猜想BD和CE的数量关系是$BD=CE$，请说明理由；若延长BD和CE交于点P，则$\angle BPC=$______°；

(2)类比探究

若$\alpha=90°$，将$\triangle ADE$绕点A旋转到如图3所示的位置，连结BD和CE交于点P, BD和CE的数量关系为______，则$\angle BPC=$______°；

(3)拓展应用

如图3，在“类比探究”的条件下，已知$BD=4$，若连结EB和CD，则四边形$EBCD$的面积是______．

（23-24七年级下·山东济南·期末）

10．在学习全等三角形的知识时，数学兴趣小组发现这样一个模型：它是由两个共顶点且顶角相等的等腰三角形构成．在相对位置变化时，始终存在一对全等三角形．通过查询资料，他们得知这种模型称为“手拉手模型”，兴趣小组进行了如下操作：

(1)观察猜想

如图1，在$\triangle ABC$中，分别以AB，AC为边向外作等腰直角$\triangle ABD$和等腰直角$\triangle ACE$，$\angle BAD=\angle CAE=90°$，连接$BE$，$CD$，则$BE$与$CD$的数量关系为_，位置关系为_；

(2)类比探究

如图 2，在$\triangle ABC$中，分别以AB，AC为边作等腰直角$\triangle ABD$和等腰直角$\triangle ACE$，$\angle BAD=\angle CAE=90°$， 点$D$，$E$，$C$在同一直线上，$AM$为$\triangle ACE$中$CE$边上的高，猜想$DC$，$BC$，$AM$之间的数量关系并说明理由；

(3)解决问题

运用（1）（2）中所积累的经验和知识，完成下题：如图3，要测量池塘两岸相对的两点D，C的距离，已经测得$\angle ACB=45°$，$\angle DAB=90°$，$AB=AD$，$AC=15\sqrt{2}$米，$BC=40$

米，CD的长为_米．

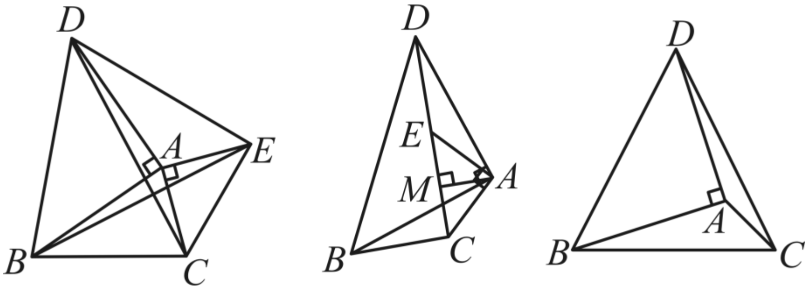


图1　　图2　　图3

（23-24 七年级下·山西运城·期末）

11．综合与实践

问题情境：

在$\triangle ABC$和$\triangle ADE$中，$AB=AC$，$AD=AE$，AD在$\triangle ABC$内部，连接CE,BD，延长BD交CE于点F，交AC于点G，设$\angle CAB=\angle EAD=\alpha$．

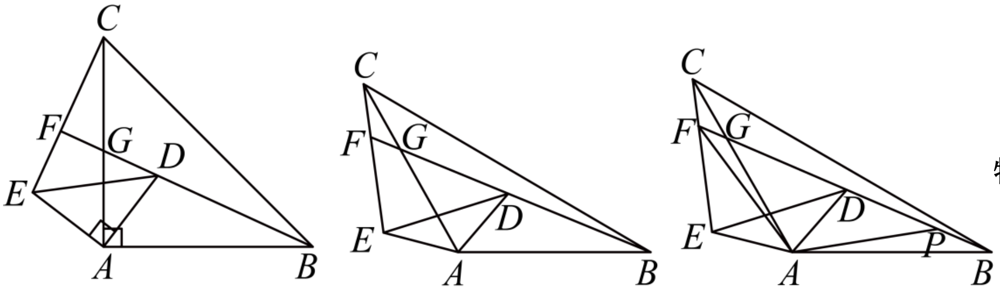


图1　　图2　　图3

特例思考：

（1）如图1，当$\alpha=90^{\circ}$时，试说明BD与CE之间的数量关系与位置关系；

一般猜想：

（2）如图2，当$0^{\circ}<\alpha<180^{\circ}$时，请直接用含$\alpha$的代数式表示$\angle BFC$的度数；

深度探究：

（3）如图3，在图2的基础上，在线段DB上截取$DP=EF$，连接AP,AF，求$\angle AFD$的度数．（用含α的代数式表示）

【题型四】三角形全等之倍长中线模型（共4题）

（23-24 八年级上·辽宁葫芦岛·期末）

12．某校八年级（1）班数学兴趣小组在一次活动中进行了试验探究活动，请你和他们一起活动吧．

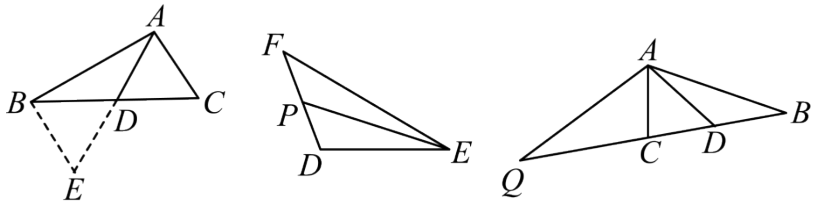


图1　　图2　　图3

【探究与发现】

（1）如图1，AD是$\triangle ABC$的中线，延长AD至点E，使$ED=AD$，连接BE，求证：$AC=BE$．

【理解与运用】

（2）如图2，EP是$\triangle DEF$的中线，若$EF=8$，$DE=5$，求EP的取值范围；

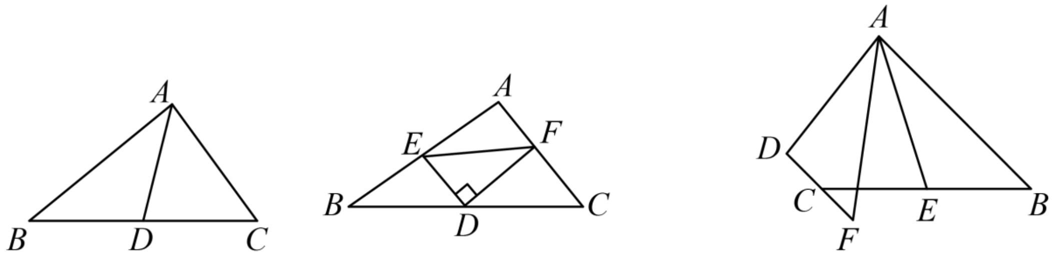
（3）如图3，AD是$\triangle ABC$的中线，$\angle BAC=\angle ACB$，点Q在BC的延长线上，$QC=AB$，求证：$AQ=2AD$．

（23-24八年级上·安徽安庆·期末）

13．（1）如图①，在$\triangle ABC$中，若$AB=6$，$AC=4$，AD为BC边上的中线，求AD的取值范围；

（2）如图②，在$\triangle ABC$中，点D是BC的中点，$DE\perp DF$，DE交AB于点E，DF交AC于点F，连接EF，判断$BE+CF$与EF的大小关系并证明；

（3）如图③，在四边形$ABCD$中，$AB \parallel CD$，AF与DC的延长线交于点F，点E是BC的中点，若AE是$\angle BAF$的角平分线．试探究线段AB，AF，CF之间的数量关系，并加以证明．



图①　　图②　　图③

（23-24七年级下·陕西西安·期末）

14．数学兴趣小组在活动时，老师提出了这样一个问题：如图1，在$\triangle ABC$中，$AB=6, AC=10, D$是BC的中点，求BC边上的中线AD的取值范围．

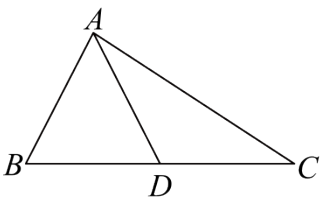


图1

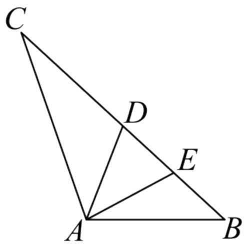


图2

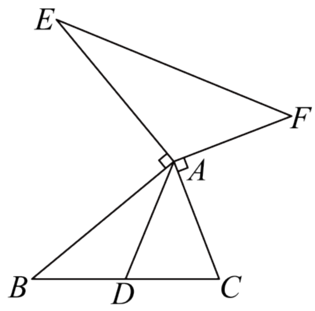


图3

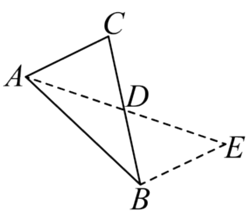
【方法探索】（1）小明在组内经过合作交流，得到了如下的解决方法：如图 1，延长 AD 到点 E，使 $DE=AD$，连接 BE．根据SAS可以判定 $\triangle ADC\cong\triangle EDB$，得出 $AC=BE$．这样就能把线段 $AB,AC,2AD$ 集中在 $\triangle ABE$ 中．利用三角形三边的关系，即可得出中线 AD 的取值范围是__________．

【问题解决】（2）由第（1）问方法的启发，请解决下面问题：如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一点，AE 是 $\triangle ABD$ 的中线，$CD=AB,\angle BDA=\angle BAD$，试说明：$AC=2AE$；

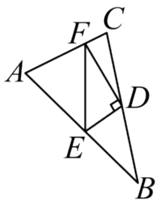
【问题拓展】（3）如图 3，AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，过点A 分别向外作 $AE\perp AB$、$AF\perp AC$，使得 $AE=AB,AF=AC$，判断线段 EF 与 AD 的关系，并说明理由．

（22-23 七年级下·四川达州·期末）

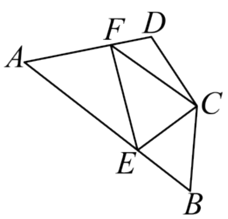
15．（1）阅读理解：



图①



图②



图③

如图①，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB=5$，$AC=3$，求 BC 边上的中线 AD 的取值范围．解决此问题可以用如下方法：延长 AD 到点 E 使 $DE=AD$，再连接 BE，这样就把 AB，AC，$2AD$ 集中在 ΔABE 中，利用三角形三边的关系可判断线段 AE 的取值范围是____；则中线 AD 的取值范围是 ____；

（2）问题解决：

如图②，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边的中点，$DE\perp DF$ 于点 D，DE 交 AB 于点 E，DF 交 AC 于点 F，连接 EF，此时：$BE+CF$ 与 EF 的大小关系，并说明理由．

（3）问题拓展：

如图③，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B+\angle D=180°$，$CB=CD$，$\angle BCD=160°$，以 C 为顶点作 $\angle ECF=80°$，边 CE，CF 分别交 AB，AD 于 E，F 两点，连接 EF，此时：BE、DF 与 EF 的数量关系

【题型五】三角形全等之截长补短模型（共 3 题）

（23-24 八年级上·福建南平期末）

16．【问题背景】

如图 1，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle BAD=120°$，$\angle B=\angle ADC=90°$，点 E、F 分别是边 BC、CD 上的点，且 $\angle EAF=60°$，试探究图中线段 BE、EF、FD 之间的数量关系．

小王同学探究此问题的方法是：延长 FD 到点 G，使 $GD=BE$，连结 AG，先证明 $\triangle ABE\cong\triangle ADG$，再证明 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$，可得出结论，他的结论应是_____．

【探索延伸】

如图 2，若在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，点 E、F 分别是边 BC、CD 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，上述结论是否仍然成立，并说明理由．

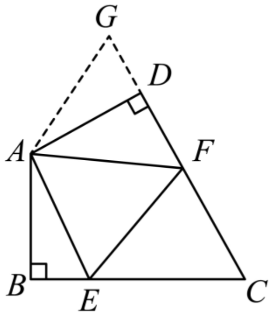


图1

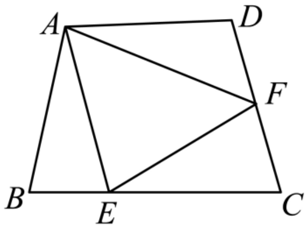
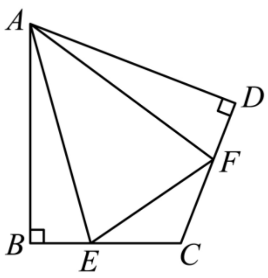


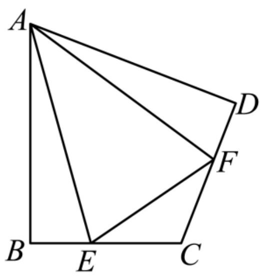
图2

（22-23 八年级上·贵州毕节·期末）

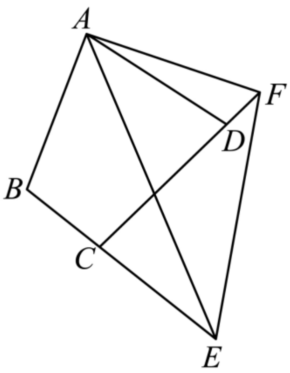
17．如图①，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B=\angle D=90°$，点 E，F 分别是边 BC，CD 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，求线段 EF，BE，FD 之间的数量关系．小明提供了这样的思路：延长 EB 到点 G，使 $BG=DF$，连接 AG．



图①



图②



图③

(1)根据小明的思路，请直接写出线段 EP，BE，FD 之间的数量关系：__________；

(2)如图②，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle D=180°$，点 E，F 分别是边 BC，CD 上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立说明理由.

(3)如图③，在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，$\angle B+\angle ADC=180°$，点 E，F 分别是边 BC，CD 延长线上的点，且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$，（1）中的结论是否仍然成立？若成立，请证明；若不成立，请写出它们之间的数量关系，并证明.

（23-24 七年级下·四川达州·期末）

18．在数学活动课上，李老师给出以下题目条件：在四边形 $ABCD$ 中，$AB=AD$，点 E、F 分别是直线 BC、CD 上的一点，并且 $EF=BE+FD$．请同学们在原条件不变的情况下添加条件，开展探究活动．

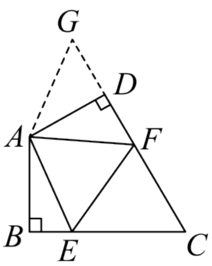


图1

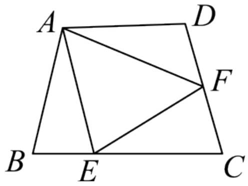


图2

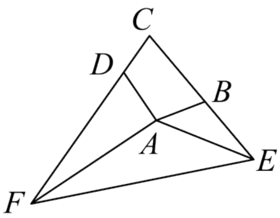


图3

【初步探索】

（1）“兴趣”小组做了如下探究：如图 1，若 $\angle B=\angle ADC=90°$，延长 FD 到点 G，使 $DG=BE$．连接 AG，再证明 $\triangle AEF\cong\triangle AGF$，由此可得出 $\angle BAE$，$\angle EAF$，$\angle FAD$ 之间的数量关系为________；

【灵活运用】

（2）“实践”小组提出问题：如图 2，若 $\angle B+\angle D=180°$，（1）中结论是否仍然成立？请说明

理由；

【延伸拓展】

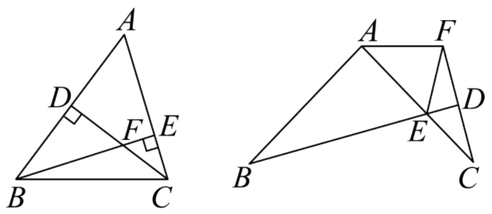
（3）“奋进”小组在“实践”小组的基础上，提出问题：如图 3，若 $\angle ABC+\angle ADC=180°$，点 E、F 分别在线段 CB、CD 的延长线上，连接 EF，且仍然满足 $EF=BE+FD$．请写出 $\angle EAF$ 与 $\angle DAB$ 的数量关系，并说明理由．

【题型六】三角形全等之新定义型综合问题（共 4 题）

（23-24 七年级下·陕西宝鸡·期末）

19．【阅读理解】

定义：在同一平面内，点 A，B 分别在射线 PM，PN 上，过点 A 垂直 PM 的直线与过点 B 垂直 PN 的直线交于点 Q，则我们把 $\angle AQB$ 称为 $\angle APB$ 的“边垂角”．



【迁移运用】

(1)如图 1，CD，BE 分别是 $\triangle ABC$ 的两条高，两条高交于点 F，根据定义，我们知道 $\angle DBE$ 是 $\angle DCE$ 的“边垂角”或 $\angle DCE$ 是 $\angle DBE$ 的“边垂角”，$\angle DAE$ 的“边垂角”是______；

(2)若 $\angle AQB$ 是 $\angle APB$ 的“边垂角”，则 $\angle AQB$ 与 $\angle APB$ 的数量关系是______；

(3)若 $\angle ACD$ 是 $\angle ABD$ 的“边垂角”，且 $AB=AC$．如图 2，BD 交 AC 于点 E，点 C 关于直线 BD 对称点为点 F，连接 AF，EF，且 $\angle CAF=45°$，求证：$BE=CF+CE$．

（23-24 七年级下·江苏南京·期末）

20．定义：只有一组对角相等的四边形叫做等角四边形．如：在四边形 $ABCD$ 中，若 $\angle A=\angle C$，且 $\angle B\neq\angle D$，则称四边形 $ABCD$ 为等角四边形，记作 (A,C) 等角四边形．

【初步认识】

（1）如图①，四边形 $ABCD$ 是 (A,C) 等角四边形，$\angle A=80°$，$\angle B=65°$，则 $\angle D=$ ______°；

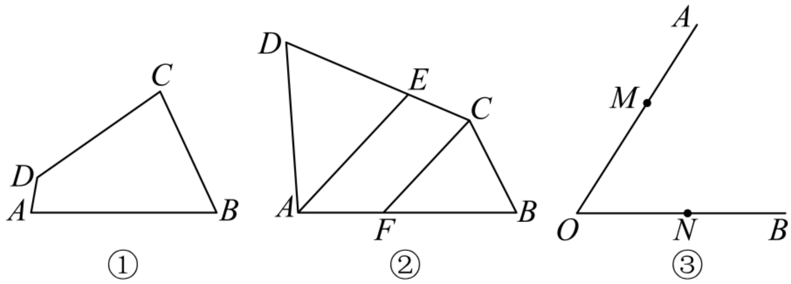
【继续探索】

（2）如图②，四边形 $ABCD$ 是 $(B，D)$ 等角四边形，AE 平分 $\angle DAB$，CF 平分 $\angle DCB$，求

证：$AE\parallel CF$；

（1）如图③，已知$\angle AOB$，点M、N分别在边OA、OB上．在$\angle AOB$的内部求作一点P，使四边形$OMPN$是$\left(O，P\right)$等角四边形，且$PM\neq OM$．

（要求：用无刻度直尺和圆规作图，保留作图痕迹，写出必要的文字说明.）



（23-24七年级下·辽宁本溪·期末）

21．新定义：如果两个三角形不全等但面积相等，那么这两个三角形叫做积等三角形.

【初步尝试】

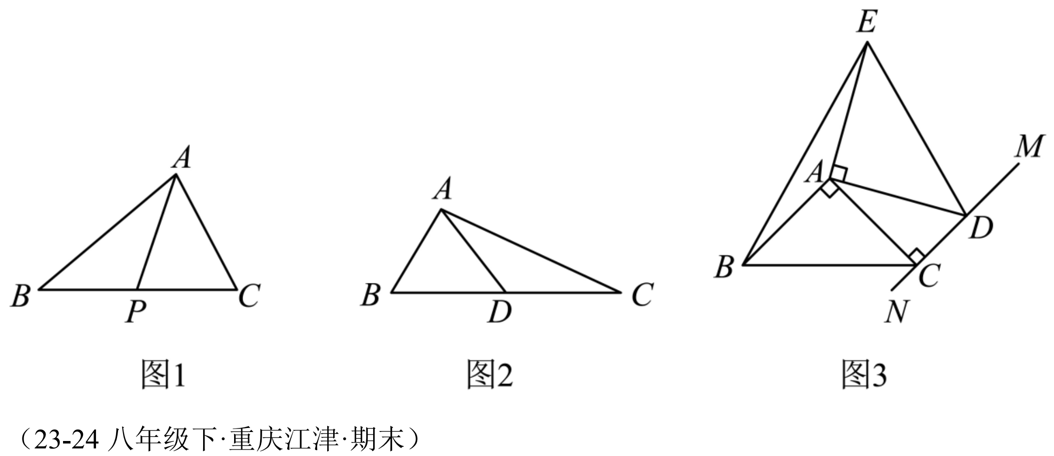
（1）如图1，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$BC=4$，P为边BC上一点，若$\triangle ABP$与$\triangle ACP$是积等三角形，求BP的长；

【理解运用】

（2）如图2，$\triangle ABD$与$\triangle ACD$为积等三角形，若$AB=2$，$AC=4$，且线段AD的长度为正整数，求AD的长.

【综合应用】

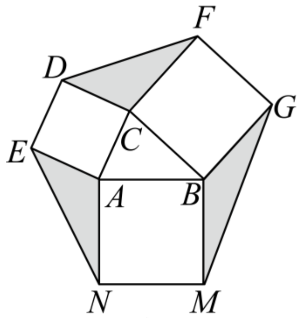
（3）如图3，在$\mathrm{Rt}\triangle ABC$中$\angle BAC=90°, AB=AC$，过点C作$MN\perp AC$，点D是射线CM上一点，以AD为边作$\mathrm{Rt}\triangle ADE, \angle DAE=90°, AD=AE$，连接$BE$．请判断$\triangle BAE$与$\triangle ACD$是否为积等三角形，并说明理由.



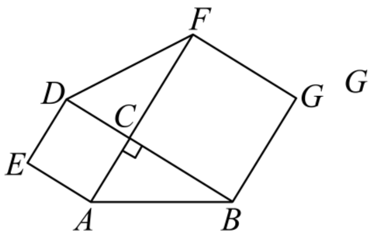
（23-24八年级下·重庆江津·期末）

22．定义：如图(1)，若分别以$\triangle ABC$的三边AC，BC，AB为边向三角形外侧作正方形$ACDE$，

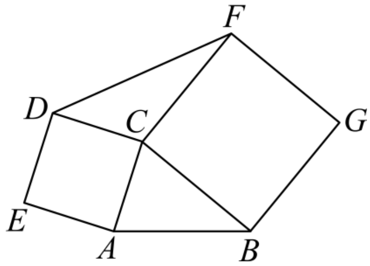
$BCFG$ 和 $ABMN$，则称这三个正方形为△ABC 的外展三叶正方形，其中任意两个正方形为△ABC 的外展双叶正方形.



图(1)



图(2)



图(3)

(1)作△ABC 的外展双叶正方形 $ACDE$ 和 $BCFG$，记△ABC，△DCF 的面积分别为 S_1 和 S_2；

①如图（2），当 $\angle ACB = 90°$ 时，求证：$S_1 = S_2$；

②如图（3），当 $\angle ACB \neq 90°$ 时，S_1 与 S_2 是否仍然相等，请说明理由.

(2)已知△ABC 中，$AC = 3$，$BC = 4$，作其外展三叶正方形，记△DCF，△AEN，△BGM 的面积和 S，请利用图（1）探究：当∠ACB 的度数发生变化时，S 的值是否发生变化？若不变，求出 S 的值；若变化，求出 S 的最大值.

1．(1) $DE=AD+BE$，证明见解析

(2)不成立，$DE=AD-BE$，理由见解析

【分析】本题主要考查全等三角形的判定和性质和线段和差关系，

（1）根据题意利用AAS证明$\triangle ADC\cong\triangle BEC$，则有$AD=CE$，$BE=CD$，结合$DE=CE+CD$即可证明结论；

（2）根据题意利用AAS证明$\triangle ADC\cong\triangle CEB$，则有$AD=CE$，$BE=CD$，结合$DE=CE-CD$即可证明结论．

【详解】（1）解：$DE=AD+BE$，理由如下：

$\because\angle ACB=90^\circ$，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle BEC=90^\circ$

$\therefore\angle ACD+\angle DAC=90^\circ$，$\angle ACD+\angle BCE=90^\circ$，

$\therefore\angle DAC=\angle BCE$，

在$\triangle ADC$与$\triangle BEC$中，

$$\because\begin{cases}\angle ADC=\angle BEC\\ \angle DAC=\angle BCE,\\ AC=BC\end{cases}$$

$\therefore\triangle ADC\cong\triangle BEC(\text{AAS})$；

$\therefore AD=CE$，$BE=CD$，

$\because DE=CE+CD$，

$\therefore DE=AD+BE$；

（2）解：$\because AD\perp MN$于D，$BE\perp MN$于E．

$\therefore\angle ADC=\angle BEC=\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore\angle CAD+\angle ACD=90^\circ$，$\angle ACD+\angle BCE=90^\circ$．

$\therefore\angle CAD=\angle BCE$．

在$\triangle ADC$和$\triangle CEB$中，

$$\because\begin{cases}\angle CAD=\angle BCE\\ \angle ADC=\angle BEC,\\ AC=BC\end{cases}$$

$\therefore\triangle ADC\cong\triangle CEB(\text{AAS})$．

$\therefore CE=AD$，$CD=BE$．

$\therefore DE=CE-CD=AD-BE$．

2．(1)证明见解答过程；

(2)①$8-t$；$6-3t$；②当$\triangle MDC$与$\triangle CEN$全等时，$t=3.5$秒或5秒或6.5秒

【分析】本题是三角形综合题目，考查的是全等三角形的判定和性质、折叠的性质、以及分类讨论等知识；掌握全等三角形的判定定理和性质定理，灵活运用分情况讨论思想是解题的关键．

（1）根据垂直的定义得到$\angle DAC=\angle ECB$，利用AAS定理证明$\triangle ACD\cong\triangle CBE$；

（2）①由折叠的性质可得出答案；

②动点N沿$F\to C$路径运动，点N沿$C\to B$路径运动，点N沿$B\to C$路径运动，点N沿$C\to F$路径运动四种情况，根据全等三角形的判定定理列式计算．

【详解】（1）证明：$\because AD\perp$直线l，

$\therefore\angle DAC+\angle ACD=90^\circ$，

$\because\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore\angle BCE+\angle ACD=90^\circ$，

$\therefore\angle DAC=\angle ECB$，

在$\triangle ACD$和$\triangle CBE$中，

$$\begin{cases}\angle ADC=\angle CEB\\ \angle DAC=\angle ECB\\ CA=CB\end{cases},$$

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle CBE\left(AAS\right)$；

（2）解：①由题意得，$AM=t$，

则$CM=8-t$，

根据题意得$FN=3t$，

由折叠的性质可知，$CF=CB=6$，

$\therefore CN=6-3t$．

故答案为：$8-t$；$6-3t$．

②由折叠的性质可知，$\angle BCE=\angle FCE$，

$\because\angle MCD+\angle CMD=90^\circ$，$\angle MCD+\angle BCE=90^\circ$，

$\therefore\angle NCE=\angle CMD$，

$\therefore$当$CM=CN$时，$\triangle MDC$与$\triangle CEN$全等，

当点N沿$F\to C$路径运动时，$8-t=6-3t$，

解得，$t=-1$（不合题意），

当点N沿$C\to B$路径运动时，$8-t=3t-6$，

解得，$t=3.5$，

当点N沿$B\to C$路径运动时，由题意得，$8-t=18-3t$，

解得，$t=5$，

当点N沿$C\to F$路径运动时，由题意得，$8-t=3t-18$，

解得，$t=6.5$，

综上所述，当$\triangle MDC$与$\triangle CEN$全等时，$t=3.5$秒或5秒或6.5秒.

3．(1)证明见详解

(2)证明见详解

(3)9

【分析】本题考查了全等三角形的综合问题，有关中点的相关计算，熟练掌握全等三角形的判定及性质，添加适当的辅助线是解题的关键.

（1）利用AAS证得$\triangle ACD\cong\triangle CBE$，即可求证结论；

（2）过B作$BH\perp CD$于H，由（1）得$\triangle ACD\cong\triangle CBH$，进而可得$AD=CH,CD=BH$，再利用AAS可证$\triangle DFG\cong\triangle HBG$，则可证$DG=GH$，根据数量关系可得$AD=2$，$DF=4$，进而可求证结论；

（3）过点B作$BH\perp CD$于H，由（2）得$AD=CH$，$CD=BH=FD$，$HG=DG$，再根据数量关系即可求解；

【详解】(1）证明：$\because\angle ACB=90^\circ$，

$\therefore\angle ACD+\angle BCD=90^\circ$，

$\because BE\perp CD$，

$\therefore\angle B+\angle BCD=90^\circ$，

$\therefore\angle B=\angle ACD$，

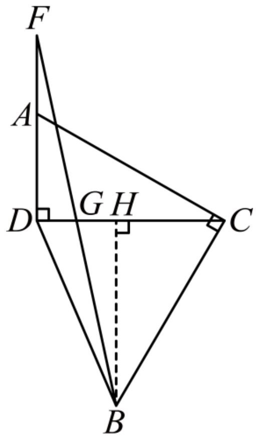
在$\triangle ACD$和$\triangle CBE$中，

$$\begin{cases}\angle ACD=\angle B\\ \angle ADC=\angle CEB=90^\circ\\ AC=BC\end{cases},$$

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle CBE(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AD=CE$；

（2）证明：过B作$BH \perp CD$于H，如图：



由（1）得：$\triangle ACD \cong \triangle CBH$，

$\therefore AD = CH, CD = BH$，

$\because DF = CD$，

$\therefore DF = BH$，

在$\triangle DFG$和$\triangle HBG$中，

$$\begin{cases} \angle DGF = \angle BGH \\ \angle ADH = \angle DHB = 90^\circ, \\ AD = BH \end{cases}$$

$\therefore \triangle DFG \cong \triangle HBG(\mathrm{AAS})$，

$\because DG = 1$，

$\therefore DG = GH = 1$，

$\because CG = 3$，

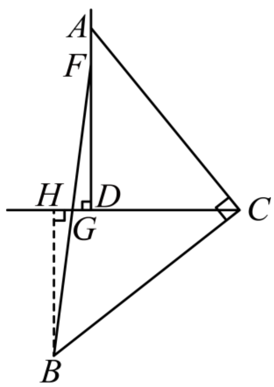
$\therefore CH = CG = GH = 3 - 1 = 2$，$CD = CH + DG = 4$，

$\therefore AD = 2$，$DF = 4$，

$\therefore A$是DF的中点；

（3）解：$CG = 9DG$，理由如下：

过点B作$BH \perp CD$于H，如图：



由（2）得：$AD=CH$，$CD=BH=FD$，$HG=DG$，

$\because FD=4AF$，

$\therefore AD=CH=5AF$，$CD=DF=4AF$，

$\therefore DH=CH-CD=AF$，

$\therefore DG=\frac{1}{2}DH=\frac{1}{2}AF$，

$\therefore CG=CD+DG=\frac{9}{2}AF$，

$\therefore CG=9DG$.

即$\frac{CG}{DG}=9$.

4．（1）见解析；（2）50；（3）①见解析；63

【分析】（1）证明$\triangle ABC\cong\triangle DAE(\mathrm{AAS})$，即可得证；

（2）同（1）法得到$\triangle AEP\cong\triangle BAG$，$\triangle CBG\cong\triangle DCH$，分割法求出图形面积即可；

（3）①过点D作$DP\perp AG$于P，过点E作$EQ\perp AG$交AG的延长线于Q，易证$\triangle AFB\cong\triangle DPA$，$\triangle AFC\cong\triangle EQA$，得到$DP=AF$，$EQ=AF$，再证明$\triangle DPG\cong\triangle EQG(\mathrm{AAS})$，即可得出结论；

②根据全等三角形的性质，求出AG的长，进而利用面积公式进行求解即可．

【详解】解：（1）证明：$\because\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore\angle BAC+\angle DAE=90^\circ$，

$\because BC\perp CA$，$DE\perp AE$，

$\therefore\angle ACB=\angle DEA=90^\circ$，

$\therefore\angle BAC+\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore\angle ABC=\angle DAE$，

在$\triangle ABC$和$\triangle DAE$中，

$$\begin{cases}\angle ACB=\angle DEA\\ \angle ABC=\angle DAE\\ BA=AD\end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DAE(\text{AAS})$，

$\therefore BC=AE$．

（2）由模型呈现可知，$\triangle AEP\cong\triangle BAG$，$\triangle CBG\cong\triangle DCH$，

$\therefore AP=BG=3$，$AG=EP=6$，$CG=DH=4$，$CH=BG=3$，

则$S_{实线围成的图形}=\frac{1}{2}\times(4+6)\times(3+6+4+3)-\frac{1}{2}\times3\times6-\frac{1}{2}\times3\times6-\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\times3\times4$

$=50$．

（3）①过点D作$DP\perp AG$于P，过点E作$EQ\perp AG$交AG的延长线于Q．

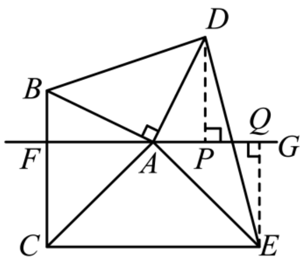


图 3

由【模型呈现】可知，$\triangle AFB\cong\triangle DPA$，$\triangle AFC\cong\triangle EQA$，

$\therefore DP=AF$，$EQ=AF$

$\therefore DP=EQ$，

$\because DP\perp AG$，$EQ\perp AG$

$\therefore \angle DPG=\angle EQG=90^\circ$，

在$\triangle DPG$和$\triangle EQG$中，

$$\begin{cases}\angle DPG=\angle EQG\\ \angle DGP=\angle EGQ\\ DP=EQ\end{cases}$$

$\therefore \triangle DPG\cong\triangle EQG(\text{AAS})$，

$\therefore DG=GE$．

②由①可知，$BF=AP$，$FC=AQ$，

$\therefore BC=BF+FC=AP+AQ$，

$\because BC=21$，

$\therefore AP+AQ=21$，

$\therefore AP+AP+PG+GQ=21$，

由①$\triangle DPG \cong \triangle EQG$得

$\therefore PG=GQ$，

$\therefore AP+AP+PG+PG=21$，

$\therefore AP+PG=10.5$，

$\therefore AG=10.5$，

$\therefore S_{\triangle ADG}=\dfrac{1}{2}\times 10.5\times 12=63$．

5．(1)见解析

(2)见解析

(3)8

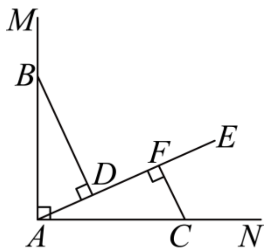
【分析】（1）先运用直角三角形的两个锐角互余以及角的等量代换得$\angle ABD=\angle CAF$，证明$\triangle ABD \cong \triangle CAF$（AAS），即可作答．

（2）先运用三角形的外角性质以及角的和差关系得出$\angle 1=\angle BAE+\angle ABE$, $\angle BAC=\angle BAE+\angle CAF$，证明$\triangle ABE \cong \triangle CAF$（ASA），即可作答．

（3）这$\triangle ABC, \triangle ABD$运用等高算面积，则底的比就是它们的面积的比列式计算，再结合全等三角形的性质，即可作答．

本题考查了全等三角形的性质以及三角形的外角性质，直角三角形的两个锐角互余，正确掌握相关性质内容是解题的关键．

【详解】（1）证明：如图：



$\because CF\perp AE$，$BD\perp AE$，

$\therefore \angle BDA=\angle AFC=90^\circ$，$\angle ABD+\angle BAD=90^\circ$

$\because \angle MAN=90^\circ$,

$\therefore \angle ABD+\angle CAF=90^\circ$,

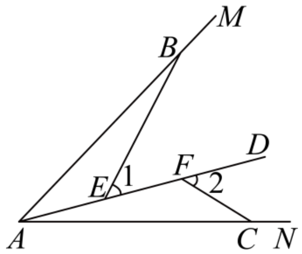
$\therefore \angle ABD = \angle CAF$，

在$\triangle ABD$和$\triangle CAF$中，

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle CFA \\ \angle ABD = \angle CAF \\ AB = AC \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAF$（AAS）；

（2）证明：如图：



易得$\angle 1 = \angle BAE + \angle ABE$，$\angle BAC = \angle BAE + \angle CAF$，$\angle 2 = \angle FCA + \angle CAF$，

$\because \angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$

$\therefore \angle BAE + \angle ABE = \angle BAE + \angle CAF = \angle FCA + \angle CAF$，

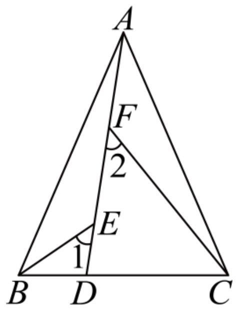
$\therefore \angle ABE = \angle CAF$，$\angle BAE = \angle FCA$，

在$\triangle ABE$和$\triangle CAF$中，

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CAF \\ AB = AC \\ \angle BAE = \angle ACF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$（ASA）；

（3）解：如图：



$\because \triangle ABC$的面积为24，$CD = 2BD$，且$\triangle ABC$,$\triangle ABD$分别以BC，BD为底来运算面积

$\therefore$此时它们的高是相等的，即$\triangle ABD$的面积是：$\frac{1}{3} \times 24 = 8$，

由（2）可知，$\triangle ABE \cong \triangle CAF$，

$\therefore \triangle ACF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和等于 $\triangle ABE$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和，

即等于 $\triangle ABD$ 的面积是 8，

答案为：8．

6．（1）见解析；（2）成立；理由见解析；（3）6

【分析】本题考查了全等三角形的判定与性质，三角形内角和定理，不同底等高的两个三角形的面积之比等于底的比．熟练掌握全等三角形的判定与性质是解题的关键．

（1）证明 $\triangle ADB \cong \triangle CEA(\mathrm{AAS})$，则 $AE = BD$，$AD = CE$，$DE = AE + AD = BD + CE$；

（2）同理（1）证明即可；

（3）同理（2）可得，$\triangle ABD \cong \triangle CAE(\mathrm{AAS})$，则 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CAE}$，设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的高为 h，则 $\triangle ACF$ 的底边 CF 上的高为 h，$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot h = 12$，$S_{\triangle ACF} = \dfrac{1}{2}CF \cdot h$，由 $BC = 2CF$，可得 $S_{\triangle ACF} = 6$，根据 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CEF} = S_{\triangle CAE} + S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ACF}$，求解作答即可．

【详解】（1）证明：$\because BD \perp$ 直线 m，$CE \perp$ 直线 m，

$\therefore \angle BDA = \angle AEC = 90^\circ$，

$\because \angle BAC = 90^\circ$，

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ = \angle BAD + \angle ABD$，即 $\angle CAE = \angle ABD$，

$\because \angle ABD = \angle CAE$，$\angle BDA = \angle AEC$，$AB = AC$，

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AE = BD$，$AD = CE$，

$\therefore DE = AE + AD = BD + CE$，

$\therefore DE = BD + CE$；

（2）解：结论 $DE = BD + CE$ 成立；理由如下：

$\because \angle BDA = \angle BAC = \alpha$，

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha$，即 $\angle ABD = \angle CAE$，

$\because \angle ABD = \angle CAE$，$\angle BDA = \angle AEC$，$AB = AC$，

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA(\mathrm{AAS})$，

$\therefore AE = BD$，$AD = CE$，

$\therefore DE = AE + AD = BD + CE$，

$\therefore DE = BD + CE$；

（3）解：同理（2）可得，$\triangle ABD \cong \triangle CAE(\mathrm{AAS})$，

$\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CAE}$，

设$\triangle ABC$的底边BC上的高为h，则$\triangle ACF$的底边CF上的高为h，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h=12$，$S_{\triangle ACF}=\frac{1}{2}CF\cdot h$，

$\because BC=2CF$，

$\therefore S_{\triangle ACF}=6$，

$\therefore S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CAE}+S_{\triangle CEF}=S_{\triangle ACF}=6$，

$\therefore \triangle ABD$与$\triangle CEF$的面积之和为6．

7．（1）$DE=BD+CE$，见解析；（2）$DE=CE-BD$，见解析；（3）（1）中结论不成立．线段BD, CE与DE之间的数量关系为$DE=BD-CE$

【分析】题目主要考查全等三角形的判定和性质，三角形外角的定义，理解题意，熟练掌握全等三角形的判定和性质是解题关键．

（1）根据三角形外角的性质及等量代换得出$\angle EAC=\angle ABD$，再由全等三角形的判定和性质得出$\triangle ABD \cong \triangle CAE(\mathrm{AAS})$，$EC=AD, BD=AE$，结合图形即可求解；

（2）同（1）中方法类似，利用全等三角形判定和性质求解即可；

（3）同（2）中方法类似，利用全等三角形判定和性质求解即可．

【详解】解：（1）$DE=BD+CE$，理由如下：

$\because \angle BAE=\angle BAC+\angle EAC, \angle BAE=\angle ADB+\angle ABD$，$\angle BDA=\angle BAC$，

$\therefore \angle EAC=\angle ABD$，

$\because \angle AEC=\angle ADB, AB=AC$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE(\mathrm{AAS})$，

$\therefore EC=AD, BD=AE$，

$\therefore DE=AD+AE=BD+CE$；

（2）结论不成立，$DE=CE-BD$，理由如下：

$\because \angle BDM=\angle ABD+\angle BAD, \angle BAC=\angle BAD+\angle CAD$，$\angle BDM=\angle BAC$，

$\therefore \angle ABD=\angle CAD$，

$\because \angle BDM=\angle CEM$，

$\therefore \angle ADB=\angle AEC$，

$\because AB = AC$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE(\text{AAS})$，

$\therefore BD = AE, EC = AD$，

$\therefore DE = AD - AE = CE - BD$；

（3）结论不成立，$DE = BD - CE$，理由如下：

$\because \angle BDM = \angle ABD + \angle BAD, \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$，$\angle BDM = \angle BAC$，

$\therefore \angle ABD = \angle CAD$，

$\because \angle BDM = \angle CEM$，

$\therefore \angle ADB = \angle AEC$，

$\because AB = AC$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAE(\text{AAS})$，

$\therefore BD = AE, EC = AD$，

$\therefore DE = AE - AD = BD - CE$．

8．(1)见解析

(2)见解析

(3)$\triangle ACF$与$\triangle BDE$的面积之和等于7

【分析】（1）由同角的余角相等证$\angle ABD = \angle CAF$，进而即可证明$\triangle ABD \cong \triangle CAF$（$AAS$）；

（2）根据三角形的外角性质证$\angle ABE = \angle CAF$，$\angle BAE = \angle ACF$，进而即可证明$\triangle ABE \cong \triangle CAF$（$ASA$）；

（3）过点A作$AH \perp BC$于H，　由$CD = 2BD$，得$BC = 3BD$，进而得$S\triangle ABD = \frac{1}{3}S\triangle ABC$$= \frac{1}{3} \times 21 = 7$，由（2）知，$\triangle ABE \cong \triangle CAF$，则$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CAF}$，从而即可得解．

【详解】（1）证明：$\because CF \perp AE$，$BD \perp AE$，$\angle MAN = 90°$，

$\therefore \angle BDA = \angle AFC = 90°$，$\angle BAD + \angle CAF = 90°$，

$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90°$，

$\therefore \angle ABD = \angle CAF$，

在$\triangle ABD$和$\triangle CAF$中，

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle CFA \\ \angle ABD = \angle CAF \\ AB = AC \end{cases}，$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAF$（$AAS$）；

（2）证明：$\because \angle 1 = \angle BAE + \angle ABE$，$\angle BAC = \angle BAE + \angle CAF$，

$\therefore \angle ABE = \angle CAF$，

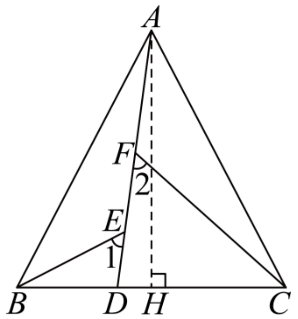
同理：$\angle BAE = \angle ACF$，

在$\triangle ABE$和$\triangle CAF$中，

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CAF \\ AB = AC \\ \angle BAE = \angle ACF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$（$ASA$）；

（3）解：如图，过点A作$AH \perp BC$于H，



$\because CD = 2BD$，

$\therefore BC = 3BD$，

$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \times AH$，$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} BD \times AH$，

$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times 21 = 7$

由（2）知，$\triangle ABE \cong \triangle CAF$，

$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CAF}$，

$\therefore S_{\triangle ACF} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABD} = 7$，

即：$\triangle ACF$与$\triangle BDE$的面积之和等于7．

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定及性质，三角形的外角性质，同角的余角相等，垂直定义，熟练掌握全等三角形的判定及性质是解题的关键．

9．(1)理由见解析；60

(2) $BD = CE$；90

(3) 8

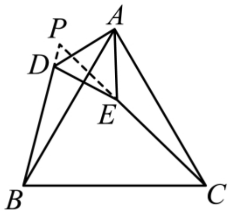
【分析】（1）证明$\triangle BAD\cong\triangle CAE\left(\mathrm{SAS}\right)$，$BD=CE$，$\angle DBA=\angle ECA$，根据三角形内角和$180^{\circ}$，即可求解，

（2）证明$\triangle BAD\cong\triangle CAE\left(\mathrm{SAS}\right)$，$BD=CE$，$\angle DBA=\angle ECA$，根据三角形内角和$180^{\circ}$，即可求解，

（3）由$BD=CE=4$，$\angle BPC=90^{\circ}$，得到$S_{BCDE}=S_{\triangle BCD}+S_{\triangle EBD}$，整理代入厚即可求解，

本题考查了，全等三角形的性质与判定，解题的关键是：熟练掌握相关性质定理．

【详解】（1）解：长BD和CE交于点 P，



$\because\angle BAC-\angle DAC=\angle DAE-\angle DAC$，

即$\angle BAD=\angle CAE$，

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中，$AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAE$，$AD=AE$，

$\therefore\triangle BAD\cong\triangle CAE\left(\mathrm{SAS}\right)$，

$\therefore BD=CE$，$\angle DBA=\angle ECA$，

$\therefore$

$\angle BPC=180^{\circ}-\angle PBC-\angle PCB=180^{\circ}-\left(\angle DBA+\angle ABC\right)-\left(\angle ACB-\angle ECA\right)=180^{\circ}-\angle ABC-\angle ACB=\angle BAC=\alpha=6$

故答案为：60；

（2）解：$\because\angle BAC+\angle DAC=\angle DAE+\angle DAC$，

即$\angle BAD=\angle CAE$，

在$\triangle BAD$和$\triangle CAE$中，$AB=AC$，$\angle BAD=\angle CAE$，$AD=AE$，

$\therefore\triangle BAD\cong\triangle CAE\left(\mathrm{SAS}\right)$，

$\therefore BD=CE$，$\angle DBA=\angle ECA$，

$\therefore$

$\angle BPC=180^{\circ}-\angle PBC-\angle PCB=180^{\circ}-\left(\angle ABC-\angle DBA\right)-\left(\angle ACB+\angle ECA\right)=180^{\circ}-\angle ABC-\angle ACB=\angle BAC=\alpha=9$