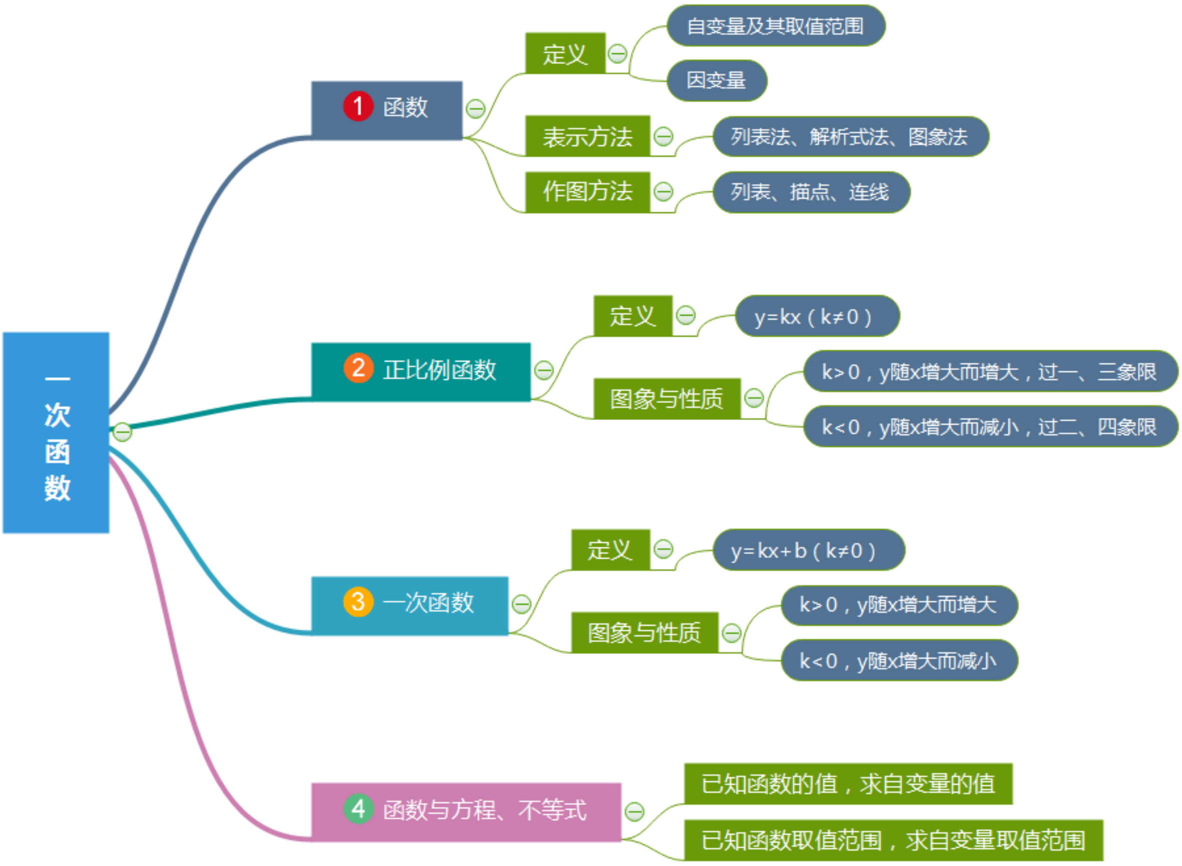
专题 08 一次函数重点知识讲义



典例解析

【函数】

【例 1】（2020·山东菏泽市月考）圆的周长公式是 $C=2\pi r$，那么在这个公式中，关于变量和常量的说法正确的是（　　）

A．2 是常量，*C*、π、*r* 是变量　　　　*B*．2、π 是常量，*C*、*r* 是变量

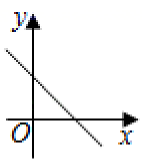
C．2 是常量，*r* 是变量　　　　*D*．2 是常量，*C*、*r* 是变量

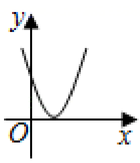
【答案】*B*.

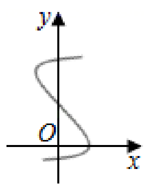
【解析】解：圆的周长计算公式是 $c=2\pi r$，*C* 和 *r* 是变量，2、π 是常量，

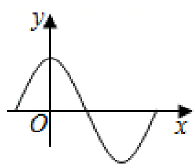
故答案为：*B*.

【例 2】(2020·青神县期中）下列各曲线表示的 *y* 与 *x* 之间的关系中，*y* 不是 *x* 的函数（　　）

A． 

B． 

C． 

D． 

【答案】C.

【解析】根据函数的定义可知，满足对于 x 的每一个取值，y 都有唯一确定的值与之对应关系，故答案为：C.

【例 3】(2020·河南许昌市期末）下列关系式中，y 不是 x 的函数的是（　　）

A． $y=\sqrt{x+1}$　　　　B． $y^2=2x$　　　　C． $y=x$　　　　D． $y=x^2-2$

【答案】B.

【例 4】下列变量之间是函数关系的有（　　）

①正方形的面积 S 与边长 a；②长方形的周长 C 与长 a；

③圆的周长 C 与半径 R；④$y=\sqrt{2x-1}$中的 y 与 x.

A．1 个　　　　B．2 个　　　　C．3 个　　　　D．4 个

【答案】C.

【解析】解：①正方形的面积$S=a^2$，是函数关系；

②当长方形的宽也变化时，有 3 个变量，不符合函数的概念，不是函数关系；

③圆的周长$C=2\pi R$，是函数关系；④$y=\sqrt{2x-1}$，是函数关系.

故答案为：C.

【例 5】某科研小组在网上获取了声音在空气中传播的速度与空气温度关系的一些数据

温度/℃	﹣20	﹣10	0	10	20	30
声速/m/s	318	324	330	336	342	348

下列说法错误的是（　　）

A．这个问题中，空气温度和声速都是变量

B．空气温度每降低 10℃，声速减少 $6m/s$

C．当空气温度为 20℃时，声音 $5s$ 可以传播 $1710m$

D．由数据可以推测，在一定范围内，空气温度越高，声速越快

【答案】B.

【解析】解：空气温度和声速都是变量，A 不符合题意；

在一定的范围内，空气温度每降低 10℃，声速减少 $6m/s$，B 符合题意；

当空气温度为 20℃时，声速为 $342m/s$，声音 $5s$ 可以传播 $342\times5=1710m$，C 不符合题意；

从表格可得，在一定范围内，空气温度越高，声速越快，D 不符合题意；

故答案为：*B*．

【例 6】是饮水机的图片．饮水桶中的水由图 1 的位置下降到图 2 的位置的过程中，如果水减少的体积是 y，水位下降的高度是 x，那么能够表示 y 与 x 之间函数关系的图象可能是(　　)

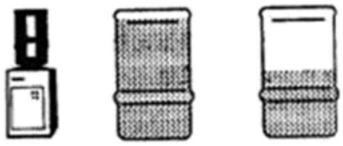
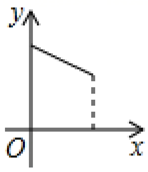
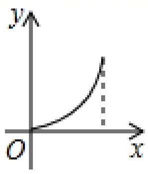
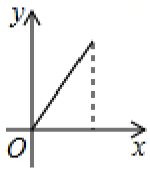
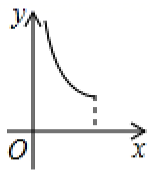


图 1　　图 2

A．

B．

C．

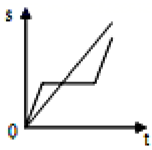
D．

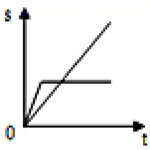
【答案】*C*.

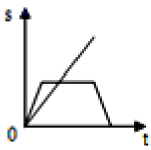
【解析】解：水减少的体积随着水位下降的高度而增加，且饮水机是圆柱形，均匀增加，

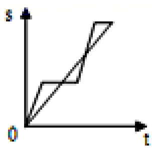
故答案为：*C*.

【例 7】(2019·福建漳州市期中）“龟兔赛跑”：龟跑得慢，但坚持不懈；而兔跑得快，看不起龟，中途睡觉，醒来龟已到终点．下列哪个图象能大致表示“龟兔赛跑”中路程 s 与时间 t 的关系（　　）

A．

B．

C．

D．

【答案】*B*.

【例 8-1】(2021·重庆月考）在函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 中，自变量 x 的取值范围是（　　）

A．$x\geq1$　　*B*．$x\neq2$　　*C*．$x\geq2$　　*D*．$x\geq1$ 且 $x\neq2$

【答案】*D*.

【解析】解：根据题意可知：$x-1\geq0$，$x-2\neq0$，

即 $x\geq1$，且 $x\neq2$，

故答案为：*D*.

【例 8-2】(2021·山东威海市期末）函数 $y=\dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$ 的自变 x 的取值范围是（　　）

A．$x\neq2$　　*B*．$x\geq2$　　*C*．$x>2$　　*D*．$x>2$ 且 $x\neq0$

【答案】*C*.

【解析】解：由题意知，

∴x-2>0，

∴x>2，

故答案为：C.

【例 9-1】（2020·浙江期末）一个物体自由下落时，它所经过的距离 h（米）和时间 t（秒）之间的关系我们可以用 $t=\sqrt{\frac{h}{5}}$ 来估算．假设物体从超过 10 米的高度自由下落，小明要计算这个物体每经过 1 米所需要的时间，则经过第 5 个 1 米时所需要的时间最接近（　　）

A．1 秒　　B．0.4 秒　　C．0.2 秒　　D．0.1 秒

【答案】D.

【解析】解：经过第 5 个 1 米的时间差为：

$t_5-t_4=\sqrt{\frac{5}{5}}-\sqrt{\frac{4}{5}}=1-\sqrt{0.8}$，

∵ $\sqrt{0.8}\approx 0.9$，

∴ $1-0.9=0.1$，

故答案为：D.

【例 9-2】（2020·湖南月考）若函数 $y=\begin{cases} x^2+2 & (x\le 2) \\ 2x & (x>2) \end{cases}$，则当函数值 y=8 时，自变量 x 的值是（　　）

A．$\pm\sqrt{6}$　　B．4　　C．$\pm\sqrt{6}$ 或 4　　D．4 或－$\sqrt{6}$

【答案】D.

【解析】解：把 y=8 代入 2x=8，

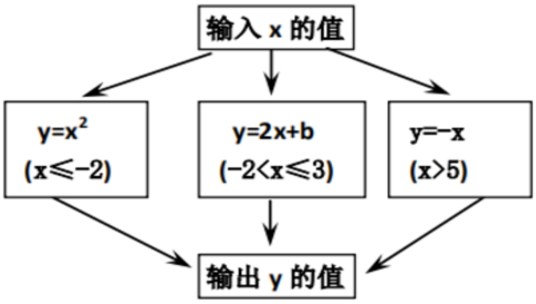
解得：x=4>2，所以符合题意；

把 y=8 代入 x^2+2，解得：　x=$\pm\sqrt{6}$，

∵x≤2，x=$\sqrt{6}$ 舍去，

故答案为：D.

【例 9-3】根据如图所示的程序计算函数 y 的值，若输入的 x 值是 6 和 2，输出的 y 值相等，则 b 等于（　　）



A．5　　　　　*B*．10　　　　　*C*．7　　　　　*D*．-10

【答案】*D*.

【解析】解：当 x=6 时，y=-x=-6，

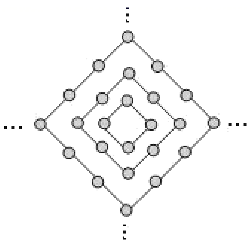
当 x=2 时，y=2x+b=4+b，

由题意得：4+b=-6，

解得：b=-10．

故答案为：*D*．

【例 10-1】(2020·辽宁锦州市期末）图中的圆点是有规律地从里到外逐层排列的．设 y 为第 n 层（n 为正整数）圆点的个数，则变量 y 与 n 之间的关系式为________．



【答案】y=4n.

【解析】解：第 1 层有 4 个；第 2 层有 8 个；第 3 层有 12 个；...

依此类推，第 n 层有 4n 个；

故答案为：y=4n．

【例 10-2】(2021·安徽安庆市期末）在学校，每一位同学都对应着一个学籍号，在数学中也有一些对应．现定义一种对应关系 f，使得数对 (x,y) 和数 z 是对应的，此时把这种关系记作：$f(x,y)=z$．对于任意的数 m，n（$m>n$），对应关系 f 由如表给出：

(x,y)	(n,n)	(m,n)	(n,m)
$f(x,y)$	n	$m-n$	$m+n$

如：$f(1,2)=2+1=3$，$f(2,1)=2-1=1$，$f(-1,-1)=-1$，则使等式

$f(1+2x,3x)=2$ 成立的 x 的值是__________.

【答案】-1．

【解析】解：①若 $1+2x=3x$，即 $x=1$，

则 $3x=2$，

解得 $x=\frac{2}{3}$，（舍去）；

②若 $1+2x>3x$，即 $x<1$，

则 $1+2x-3x=2$，

解得 $x=-1$，

③若 $1+2x<3x$，即 $x>1$，

则 $1+2x+3x=2$，

解得 $x=\frac{1}{5}$（舍去），

综上所述，x 的值是-1．

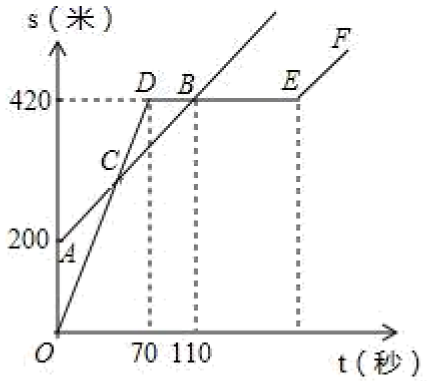
故答案为：-1．

【例 11】(2020·四川达州市期末）巴蜀中学的小明和朱老师一起到一条笔直的跑道上锻炼身体，到达起点后小明做了一会准备活动，朱老师先跑．当小明出发时，朱老师已经距起点 200 米了．他们距起点的距离 s(米)与小明出发的时间 t(秒)之间的关系如图所示(不完整)．据图中给出的信息，解答下列问题：

(1)在上述变化过程中，自变量是______，因变量是______；

(2)朱老师的速度为_____米/秒，小明的速度为______米/秒；

(3)当小明第一次追上朱老师时，求小明距起点的距离是多少米？



【答案】(1)t，s；(2)2，6；(3) 300 米．

【解析】解：(1)在上述变化过程中，自变量是 t，因变量是 s；

(2)朱老师的速度为 $\frac{420-200}{110}$ ＝2(米/秒)，小明的速度为 $\frac{420}{70}$ ＝6(米/秒)；

故答案为 t，s；2，6；

(3)设 t 秒时，小明第一次追上朱老师

根据题意得：$6t=200+2t$，解得 $t=50(s)$，

则 50×6＝300(米)，

当小明第一次追上朱老师时，小明距起点的距离为 300 米．

【一次函数】

【例 12-1】对于正比例函数 $y=-3x$，当自变量 x 的值增加 1 时，函数 y 的值增加（　　）

A．－3　　　B．3　　　C．$-\frac{1}{3}$　　　D．$\frac{1}{3}$

【答案】A.

【解析】解：当 $x=a$ 时，$y=-3a$，

当 $x=a+1$ 时，$y=-3$（$a+1$），

∵－3（a+1）－（－3a）＝－3a－3+3a＝－3，

∴当自变量 x 的值增加 1 时，函数 y 的值增加－3，

故答案为：A．

【例 12-2】(2021·浙江台州）若 $A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$是一次函数 $y=ax+2$ 图象上两个不同的点，且 $\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=3$，则 $a=$_______.

【答案】$\frac{1}{3}$.

【解析】解：把 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 代入 $y=ax+2$ 得，

$$\begin{cases}y_1=ax_1+2①\\y_2=ax_2+2②\end{cases}$$

①-②得 $y_1-y_2=a(x_1-x_2)$，

$$a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},$$

$$\because \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}=3$$

$\therefore a=\frac{1}{3}$,

故答案为：$\frac{1}{3}$.

【例 13-1】2021·陕西西安市月考)在平面直角坐标系中，O 为坐标原点. 若直线 $y=-x+3$ 分别与 y 轴、直线 $y=2x$ 交于点 A，B，则 $\triangle AOB$ 的面积为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

【答案】C.

【解析】解：在 $y=-x+3$ 中，令 $x=0$，得 $y=3$，

联立 $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x \end{cases}$ 得，$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$，

∴A（0，3），B（1，2），

∴△AOB 的面积=$\frac{1}{2}\times3\times1=\frac{3}{2}$，

故答案为：C.

【例 13-2】平面直角坐标系中，$P(x,y)$ 的横坐标与纵坐标的绝对值之和叫做 $P(x,y)$ 的勾股值，记为「P」，即「P」$=|x|+|y|$．若点 B 在第一象限且满足「B」$=4$，则满足条件的所有 B 点与坐标轴围成的图形的面积为（　　）

A．2　　B．4　　C．6　　D．8

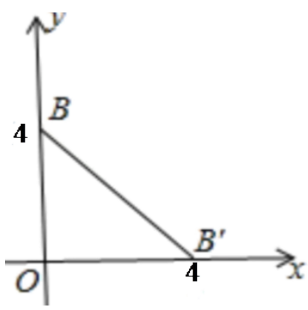
【答案】D.

【解析】解：

设 B（x，y），由「B」=4 且在第一象限知，$x+y=4$（$x>0$，$y>0$），

即：$y=-x+4$（$x>0$，$y>0$）.

故所有点 B 与坐标轴围成的图形如图所示的三角形，



面积=$\frac{1}{2}\times4\times4=8$.

故答案为：D．

【例 13-3】（2021·山东模拟）如图 1，四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD, \angle ADC=90^{\circ}$，点 P 从 A 点出发，以每秒一个单位长度的速度，按 $A-B-C-D$ 的顺序在边上匀速运动，设 P 点的运动时间为 t 秒，$\triangle PAD$ 的面积为 s，s 关于 t 的函数图象如图 2 所示，当 P 运动到 BC 中点时，$\triangle APD$ 的面积为_______．

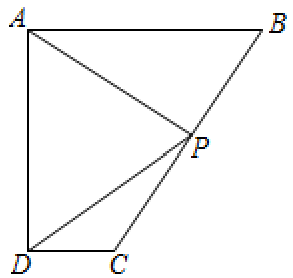


图1

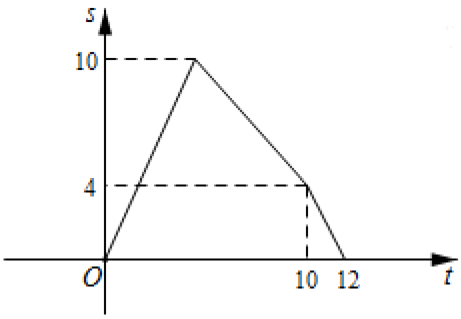


图2

【答案】7.

【解析】解：根据题意得：四边形 $ABCD$ 是梯形，

当点 P 从 C 运动到 D 处需要 2 秒，则 $CD=2$，$\triangle ADP$ 面积为 4，

则 $AD=4$，

根据图象可得：当点 P 运动到 B 点时，$\triangle ADP$ 面积为 10，则 $AB=5$，运动时间为 5 秒，

$\therefore E$（5，10），

设当 $5<t\leq 10$ 时，函数解析式为 $s=kt+b$，

$\therefore \begin{cases}5k+b=10\\10k+b=4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=-\dfrac{6}{5}\\b=16\end{cases}$，

当 $5<t\leq 10$ 时，函数解析式为 $s=-\dfrac{6}{5}t+16$，

当 P 运动到 BC 中点时时间 $t=7.5$，则 $s=7$，

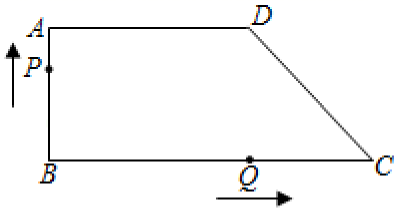
故答案为：7.

【例 13-4】（2020·广西南宁市月考）如图在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD//BC$，$\angle B=90^{\circ}$，$AB=5\text{cm}$，$AD=8\text{cm}$，$BC=14\text{cm}$，点 P，Q 同时从点 B 出发，其中点 P 以 1cm/s 的速度沿着点 $B\to A\to D$ 运动；点 Q 以 2cm/s 的速度沿着点 $B\to C$ 运动，当点 Q 到达 C 点后，立即原路返回，当点 P 到达 D 点时，另一个动点 Q 也随之停止运动．

（1）当运动时间 t=4s 时，则三角形 BPQ 的面积为_____ cm^2；

（2）当运动时间 $t=6\text{s}$ 时，则三角形 BPQ 的面积为_____cm^2；

（3）当运动时间为 $t(t\le 13\text{s})$ 时，请用含 t 的式子表示三角形 BPQ 的面积．



【答案】（1）16；（2）30；（3）见解析．

【解析】解：（1）$AB=5cm$，$AD=8cm$，$BC=14cm$，点 Q 的速度是 $2cm/s$，点 P 的速度是 $1cm/s$，

当运动时间 $t=4s$ 时，$QB=2t=2\times4=8$（cm），$BP=t=4$（cm），

则三角形 BPQ 的面积=$\frac{1}{2}BQ\cdot BP=\frac{1}{2}\times8\times4=16\left(\text{cm}^2\right)$，

故答案为：16；

（2）当运动时间 $t=6s$ 时，

∵$AB=5cm$，点 P 的速度是 $1cm/s$，

∴点 P 运动到了 AD 上，$BQ=12cm$，

则三角形 BPQ 的面积=$\frac{1}{2}BQ\cdot AB=30cm^2$，

故答案为：30；

（3）当 P 在 AB 上时，$t\leqslant5$，

则三角形 BPQ 的面积=$\frac{1}{2}BQ\cdot BP=\frac{1}{2}\times2t\cdot t=t^2$；

当 P 在 AD 上，且 Q 沿着点 $B\to C$ 运动时，

∵$BC=14cm$，点 Q 的速度是 $2cm/s$，

此时 $5<t\le\frac{14}{2}$，即 $5<t\leqslant7$，

则三角形 BPQ 的面积为 $\frac{1}{2}BQ\cdot AB=\frac{1}{2}\times2t\times5=5t$；

当 P 在 AD 上，且 Q 沿着点 $C\to B$ 运动时，

∵$AB=5cm$，$AD=8cm$，点 P 的速度是 $1cm/s$，

此时 $7<t\leqslant13$，

则三角形 BPQ 的面积=$\frac{1}{2}BQ\cdot AB=\frac{1}{2}\times(2\times14-2t)\times5=5(14-t)$；

当运动时间为 t 时，三角形 BPQ 的面积 $=\begin{cases} t^2(t \leqslant 5) \\ 5t(5<t \leqslant 7) \\ 5(14-t)(7<t \leqslant 13) \end{cases}$.

【例 14】(2021·西安市模拟）把直线 $y=-x+4$ 向下移 n 个单位长度后，与直线 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ 的交点在第二象限，则 n 的取值范围是（　　）

A．$1<n<\dfrac{11}{2}$　　　B．$1<n<10$　　　C．$n>1$　　　D．$n<7$

【答案】C.

【解析】解：直线 $y=-x+4$ 向下移 n 个单位后可得：$y=-x+4-n$，

联立得：$\begin{cases} y=-x+4-n \\ y=-\dfrac{1}{2}x+3 \end{cases}$，

解得：$\begin{cases} x=2-2n \\ y=n+2 \end{cases}$，

即交点坐标为$(2-2n，n+2)$，

∵交点在第二象限，

∴$\begin{cases} 2-2n<0 \\ n+2>0 \end{cases}$，

解得：$n>1$．

故答案为：C.

【例 15-1】（2020·重庆月考）请根据函数相关知识，对函数 $y=2|x-3|-1$ 的图象与性质进行探究，并解决相关问题：

①列表：

x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
y	…	5	m	1	-1	1	3	n	…

②描点；

③连线.

（1）在函数 $y=2|x-3|-1$ 中，自变量 x 的取值范围为______；

（2）表格中，$m=$______，$n=$______；