3．2.2　基本初等函数的导数公式及导数的运算法则

自主学习

课本导学

1.能利用给出的基本初等函数的导数公式求函数的导数.

2．能利用初等函数的导数公式和导数的运算法则求简单函数的导数.

教材导读

1.基本初等函数的导数公式

(1)若 $f(x)=c$，则 $f'(x)=$ $\underline{\ 0\ }$.

(2)若 $f(x)=x^n$，则 $f'(x)=$ $\underline{\ nx^{n-1}\ }$.

(3)若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=$ $\underline{\ \cos x\ }$.

(4)若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=$ $\underline{\ -\sin x\ }$.

(5)若 $f(x)=a^x$，则 $f'(x)=$__$a^x\ln a$__.

(6)若 $f(x)=\mathrm{e}^x$，则 $f'(x)=$__e^x__.

(7)若 $f(x)=\log_a x$ 则 $f'(x)=$__$\dfrac{1}{x\ln a}$__.

(8)若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=$__$\dfrac{1}{x}$__.

2．导数运算法则

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=$ $\underline{f'(x)\pm g'(x)}$.

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=$ $\underline{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$.

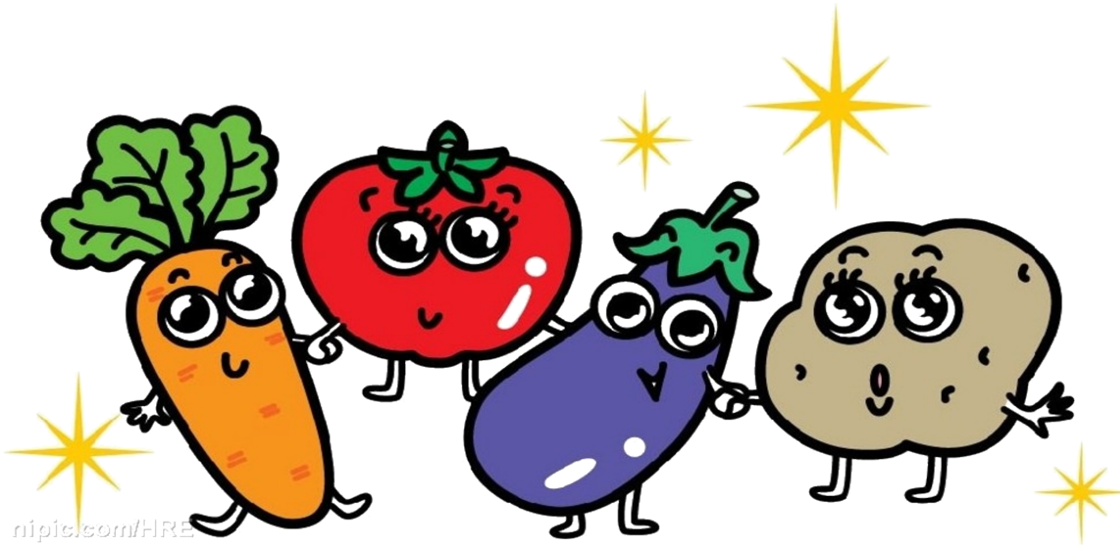
(3) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=$ $\underline{\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$.

思考探究

能否认为函数$f(x)=a^2+2ax-x^2$的导数$f'(x)$与函数$f(a)=a^2+2ax-x2$的导数$f'(a)$是相同的?

提示：求导是对自变量的求导，要分清表达式中的自变量，$f'(x)=2a-2x$，$f'(a)=2a+2x$.故$f'(x)$与$f'(a)$不相同.

Grammar Focus



基础自测

1.下列结论正确的个数为(　　)

①$y=\ln 2$，则 $y'=\frac{1}{2}$　②$y=\frac{1}{x^2}$，则 $y'|_{x=3}=-\frac{2}{27}$

③$y=2^x$，则 $y'=2^x\ln 2$　④$y=\log_2 x$，则 $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

A．0　　B．1

C．2　　D．3

解析：①$y=\ln 2$ 为常数，所以 $y'=0$，①错；②③④均正确，直接利用公式即可验证.

答案：D

2．曲线 $y=x^n$ 在 $x=2$ 处的导数为 12，则 n 等于(　　)

A．1　B．2

C．3　D．4

解析： $y'|_{x=2}=n\cdot 2^{n-1}=12$，解得 $n=3$.

答案： C

3．若曲线 $y=f(x)$在点$(x_0，f(x_0))$处的切线方程为 $2x+y-1=0$，则(　　)

A．$f'(x_0)>0$　　B．$f'(x_0)<0$

C．$f'(x_0)=0$　　D．$f'(x_0)$不存在

解析： 由题知，$f'(x_0)=-2<0$.

答案： B

4．函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$的导数为________．

解析：$y'=\dfrac{(\sin x)'x-\sin x\cdot(x)'}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$．

答案：$\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

5．已知 $f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x^2+cx+d$，又 $f(2x+1)=4g(x)$，且 $f'(x)=g'(x)$，$f(5)=30$，求 $g(4)$.

解： 由 $f(2x+1)=4g(x)$，得

$4x^2+2(a+2)x+(a+b+1)=4x^2+4cx+4d$,

于是有 $\begin{cases} a+2=2c, & ① \\ a+b+1=4d. & ② \end{cases}$

由 $f'(x)=g'(x)$，得 $2x+a=2x+c$,

$\therefore a=c$.③

由 $f(5)=30$，得 $25+5a+b=30$.④

$\therefore$ 由①③可得 $a=c=2$.

又由④，得 $b=-5$.再由②，得 $d=-\frac{1}{2}$.

$\therefore g(x)=x^2+2x-\frac{1}{2}$.故 $g(4)=16+8-\frac{1}{2}=\frac{47}{2}$.

合 作 学 习

思维聚焦

1.对基本初等函数的导数公式的理解

(1)基本初等函数的求导公式只要求记住公式的形式，学会使用公式解题即可，对公式的推导不要求掌握.

(2)要注意幂函数与指数函数的求导公式的区别，这是易错点.

2．对导数的运算法则的理解

(1)两个函数和(或差)的函数的求导法则

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 是可导的，则 $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$，即两个函数的和(或差)的导数，等于这两个函数的导数的和(或差).

(2)两个函数积的函数的求导法则

设函数 $f(x)$，$g(x)$是可导的，则$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$. 即两个函数积的导数，等于第一个函数的导数乘上第二个函数，加上第一个函数乘上第二个函数的导数.

推论：常数与函数的积的导数，等于常数乘函数的导数.

即$[cf(x)]'=cf'(x)$.

(3)两个函数商的函数的求导法则

设函数 $f(x)$，$g(x)$是可导的，且 $g(x)\neq 0$

，则$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$，特别地，

当 $f(x)=1$ 时，

有$\left[\dfrac{1}{g(x)}\right]'=-\dfrac{g'(x)}{[g(x)]^2}$.

思维激活

利用求导公式和运算法则求导数

例 1 求下列函数的导数.

(1) $y=\tan x$;

(2) $y=3x^2+x\cdot\cos x$;

(3) $y=(\sqrt{x}-2)^2-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$.

[分析] 求函数的导数主要有直接求导和先变形然后再求导两种方法，要注意正确区分.

[解] (1) $y'=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{(\cos x)^2}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{(\cos x)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$.

(2) $y'=(3x^2+x\cdot\cos x)'=(3x^2)'+(x\cdot\cos x)'$

$=6x+x'\cdot\cos x+x\cdot(\cos x)'=6x+\cos x-x\sin x$.

(3) $y'=\left[(\sqrt{x}-2)^2-\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right]'=[(\sqrt{x}-2)^2]'-\left(\frac{1}{2}\sin x\right)'=(x-4\sqrt{x}+4)'-\frac{1}{2}\cos x=1-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\cos x$.

[点拨]　理解和掌握求导法则和公式的结构是灵活进行求导运算的前提条件，当函数解析式较为复杂时，应先变形，然后求导，当函数解析式不能直接用公式时，也要先变形，使其符合公式形式．

练 1　求下列函数的导数：

(1) $y=x^5-3x^3-5x^2+6$；

(2) $y=(2x^2+3)(3x-2)$；

(3) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

[解] (1)$y' =(x^5-3x^3-5x^2+6)'$

$=(x^5)'-(3x^3)'-5(x^2)'+6'$

$=5x^4-9x^2-10x$.

(2)解法一：$y' =(2x^2+3)'(3x-2)+(2x^2+3)(3x-2)'$

$=4x(3x-2)+(2x^2+3)\cdot 3=18x^2-8x+9$.

解法二：$\because y=(2x^2+3)\cdot(3x-2)$

$=6x^3-4x^2+9x-6$,

$\therefore y' =18x^2-8x+9$.

(3)解法一：$y'=(\frac{x-1}{x+1})'$

$$=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)2}.$$

解法二：$\because y=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$,

$$\therefore y'=(1-\frac{2}{x+1})'=(-\frac{2}{x+1})'$$

$$=-\frac{2'(x+1)-2(x+1)'}{(x+1)2}=\frac{2}{(x+1)2}.$$

求函数的解析式

例 2　已知 $f'(x)$是一次函数，$x^2\cdot f'(x)-(2x-1)\cdot f(x)=1$对一切$x\in \mathbf{R}$恒成立，求$f(x)$的解析式.

[分析]　根据$f'(x)$为一次函数，可设$f(x)$的解析式为$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，然后利用对一切$x\in \mathbf{R}$方程恒成立，转化为关于a，b，c的方程组，即可求出$f(x)$的解析式.

[解]　由 $f'(x)$为一次函数可知 $f(x)$为二次函数，

设 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则 $f'(x)=2ax+b$，

把 $f(x)$，$f'(x)$代入方程得 $x^2(2ax+b)-(2x-1)\cdot(ax^2+bx+c)=1$，即$(a-b)x^2+(b-2c)x+c-1=0$，

又对一切 $x\in\mathbf{R}$ 方程恒成立，所以$\begin{cases}a-b=0,\\ b-2c=0,\\ c-1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\ b=2,\\ c=1,\end{cases}$　所以 $f(x)=2x^2+2x+1$.

[点拨]　待定系数法就是用设未知数的方法分析所要解决的问题，然后利用已知条件解出所设未知数，进而将问题解决．待定系数法常用来求函数解析式，特别是已知具有某些特征的函数．