2023年高考全国甲卷数学（理）真题

一、单选题

1．设全集$U=Z$,集合$M=\{x|\ x=3k+1,k\in Z\},N=\{x|\ x=3k+2,k\in Z\}$，$\complement_U(M\cup N)=$（　）

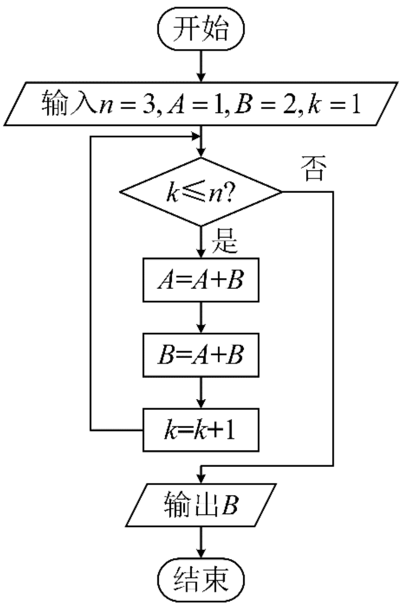
A．$\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$　　B．$\{x|\ x=3k-1,k\in Z\}$

C．$\{x|\ x=3k-2,k\in Z\}$　　D．$\varnothing$

2．设$a\in\mathrm{R},(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2,$，则$a=$（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

3．执行下面的程序框图，输出的$B=$（　）



A．21　　B．34　　C．55　　D．89

4．已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$（　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

5．设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前 n 项和S_n，若$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$（　）

A．$\frac{15}{8}$　　B．$\frac{65}{8}$　　C．15　　D．40

6．某地的中学生中有60%的同学爱好滑冰，50%的同学爱好滑雪，70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪.在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为（　）

A．0.8　　B．0.6　　C．0.5　　D．0.4

7．设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则（　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件　　D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，C 的一条渐近线与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$交于 A，B 两点，则$|AB|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9．现有 5 名志愿者报名参加公益活动，在某一星期的星期六、星期日两天，每天从这 5 人中安排 2 人参加公益活动，则恰有 1 人在这两天都参加的不同安排方式共有（　）

A．120　　B．60　　C．30　　D．20

10．函数$y=f\left(x\right)$的图象由函数$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到，则$y=f\left(x\right)$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

11．已知四棱锥$P-ABCD$的底面是边长为 4 的正方形，$PC=PD=3,\angle PCA=45^\circ$，则$\triangle \mathrm{PBC}$的面积为（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

12．设 O 为坐标原点，F_1,F_2为椭圆$C:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$的两个焦点，点 P 在 C 上，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$|OP|=$（　）

A．$\frac{13}{5}$　　B．$\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C．$\frac{14}{5}$　　D．$\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题

13．若$f\left(x\right)=\left(x-1\right)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$为偶函数，则$a=$________.

14．若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}3x-2y\le 3\\-2x+3y\le 3\\x+y\ge 1\end{cases}$，设$z=3x+2y$的最大值为____________.

15．在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F 分别为 AB，C_1D_1的中点，以 EF 为直径的球的球面

与该正方体的棱共有____________个公共点.

16．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60^{\circ}, AB=2, BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D，则 $AD=$__________.

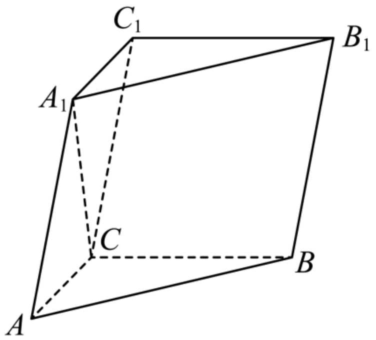
三、解答题

17．设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=1, 2S_n=na_n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18．如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C\perp$ 底面 ABC，$\angle ACB=90^{\circ}, AA_1=2$，$A_1$ 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.



(1)证明：$A_1C=AC$；

(2)已知 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

19．一项试验旨在研究臭氧效应.实验方案如下：选 40 只小白鼠，随机地将其中 20 只分配到实验组，另外 20 只分配到对照组，实验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境，对照组的小白鼠饲养在正常环境，一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量（单位：g）.

(1)设 X 表示指定的两只小白鼠中分配到对照组的只数，求 X 的分布列和数学期望；

(2)实验结果如下：

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为：

15.2 18.8 20.2 21.3 22.5 23.2 25.8 26.5 27.5 30.1

32.6 34.3 34.8 35.6 35.6 35.8 36.2 37.3 40.5 43.2

实验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为：

7.8 9.2 11.4 12.4 13.2 15.5 16.5 18.0 18.8 19.2

19.8 20.2 21.6 22.8 23.6 23.9 25.1 28.2 32.3 36.5

（i）求 40 只小鼠体重的增加量的中位数 *m*，再分别统计两样本中小于 *m* 与不小于的数据的个数，完成如下列联表：

	$<m$	$\geq m$
对照组		
实验组		

（ii）根据（i）中的列联表，能否有 95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与正常环境中体重的增加量有差异.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

k_0	0.100	0.050	0.010
$P\left(k^2\geq k_0\right)$	2.706	3.841	6.635

20．已知直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 交于 A,B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{15}$.

(1)求 p；

(2)设 F 为 C 的焦点，M，N 为 C 上两点，$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.

21．已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

(1)当 $a=8$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)<\sin 2x$ 恒成立，求 *a* 的取值范围.

22．已知点 $P(2,1)$，直线 $l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（t 为参数），$\alpha$ 为 l 的倾斜角，*l* 与 x 轴正半轴，y 轴正半轴分别交于 A，B 两点，且 $|PA|\cdot|PB|=4$.

(1)求 α；

(2)以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 *l* 的极坐标方程.

23．设 $a>0$，函数 $f(x)=2|x-a|-a$.

(1)求不等式 $f\left(x\right)<x$ 的解集；

(2)若曲线 $y=f\left(x\right)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 2，求 a .

2023 年高考全国甲卷数学（理）真题

一、单选题

1．设全集 $U=\mathrm{Z}$,集合 $M=\{x|\ x=3k+1,k\in Z\},N=\{x|\ x=3k+2,k\in Z\}$，$\complement_U(M\cup N)=$（　）

A．$\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$　　B．$\{x|\ x=3k-1,k\in Z\}$

C．$\{x|\ x=3k-2,k\in Z\}$　　D．$\varnothing$

【答案】A

【分析】根据整数集的分类，以及补集的运算即可解出．

【详解】因为整数集 $\mathbf{Z}=\left\{x\,|\,x=3k,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\,|\,x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{x\,|\,x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\right\}$，

$U=Z$，

所以，$\complement_U(M\cup N)=\{x|x=3k,k\in Z\}$.

故选：A.

2．设 $a\in\mathrm{R},\left(a+\mathrm{i}\right)\left(1-a\mathrm{i}\right)=2,$，则 $a=$（　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

【答案】C

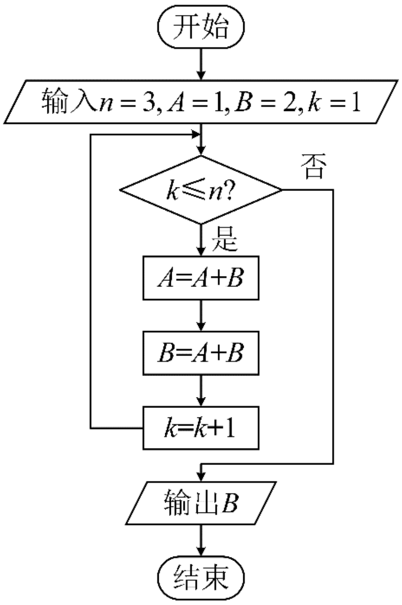
【分析】根据复数的代数运算以及复数相等即可解出．

【详解】因为 $\left(a+\mathrm{i}\right)\left(1-a\mathrm{i}\right)=a-a^2\mathrm{i}+\mathrm{i}+a=2a+\left(1-a^2\right)\mathrm{i}=2$，

所以 $\begin{cases}2a=2\\1-a^2=0\end{cases}$，解得：$a=1$．

故选：C.

3．执行下面的程序框图，输出的 $B=$（　）



A．21　　B．34　　C．55　　D．89

【答案】B

【分析】根据程序框图模拟运行，即可解出.

【详解】当$k=1$时，判断框条件满足，第一次执行循环体，$A=1+2=3$，$B=3+2=5$，$k=1+1=2$；

当$k=2$时，判断框条件满足，第二次执行循环体，$A=3+5=8$，$B=8+5=13$，$k=2+1=3$；

当$k=3$时，判断框条件满足，第三次执行循环体，$A=8+13=21$，$B=21+13=34$，$k=3+1=4$；

当$k=4$时，判断框条件不满足，跳出循环体，输出$B=34$.

故选：B.

4．已知向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$满足$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$（　）

A．$-\frac{4}{5}$　　B．$-\frac{2}{5}$　　C．$\frac{2}{5}$　　D．$\frac{4}{5}$

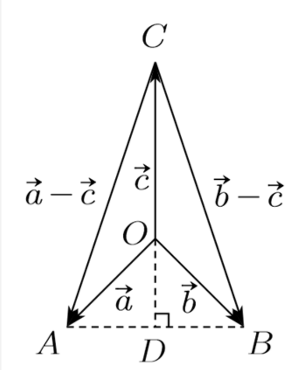
【答案】D

【分析】作出图形,根据几何意义求解.

【详解】因为$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$,所以□□□+□□□=-□□□,

即$\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}^2$,即 1+1+2□□□·□□□=2,所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

如图,设$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,



由题知,$OA=OB=1,OC=\sqrt{2}$,$\triangle OAB$是等腰直角三角形,

AB 边上的高$OD=\dfrac{\sqrt{2}}{2},AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

所以$CD=CO+OD=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\angle ACD=\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{1}{3},\cos\angle ACD=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$,

$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=\cos\angle ACB=\cos 2\angle ACD=2\cos^2\angle ACD-1=2\times\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2-1=\dfrac{4}{5}$.

故选:D.

5．设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前 n 项和S_n，若$a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$（　）

A．$\dfrac{15}{8}$　　B．$\dfrac{65}{8}$　　C．15　　D．40

【答案】C

【分析】根据题意列出关于q的方程,计算出q,即可求出S_4.

【详解】由题知$1+q+q^2+q^3+q^4=5\left(1+q+q^2\right)-4$,

即$q^3+q^4=4q+4q^2$,即$q^3+q^2-4q-4=0$,即$(q-2)(q+1)(q+2)=0$.

由题知$q>0$,所以$q=2$.

所以$S_4=1+2+4+8=15$.

故选:C.

6. 某地的中学生中有60%的同学爱好滑冰，50%的同学爱好滑雪，70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪.在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为（　）

A．0.8　　B．0.6　　C．0.5　　D．0.4

【答案】A

【分析】先算出同时爱好两项的概率,利用条件概率的知识求解.

【详解】同时爱好两项的概率为$0.5+0.6-0.7=0.4$,

记“该同学爱好滑雪”为事件A,记“该同学爱好滑冰”为事件B，则$P(A)=0.5, P(AB)=0.4$,

所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.5}=0.8$.

故选:A.

7．设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则（　）

A．甲是乙的充分条件但不是必要条件　　B．甲是乙的必要条件但不是充分条件

C．甲是乙的充要条件　　D．甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

【答案】B

【分析】根据充分条件、必要条件的概念及同角三角函数的基本关系得解.

【详解】当$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$时，例如$\alpha=\frac{\pi}{2}, \beta=0$但$\sin\alpha+\cos\beta\neq 0$,

即$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$推不出$\sin\alpha+\cos\beta=0$;

当$\sin\alpha+\cos\beta=0$时，$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=(-\cos\beta)^2+\sin^2\beta=1$,

即$\sin\alpha+\cos\beta=0$能推出$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$.

综上可知，甲是乙的必要不充分条件.

故选：B

8．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，C的一条渐近线与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$交于A，B两点，则$|AB|=$（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

【答案】D

【分析】根据离心率得出双曲线渐近线方程，再由圆心到直线的距离及圆半径可求弦长.

【详解】由$e=\sqrt{5}$，则$\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}=1+\frac{b^2}{a^2}=5$，解得$\frac{b}{a}=2$,

所以双曲线的一条渐近线不妨取$y=2x$，则圆心$(2,3)$到渐近线的距离$d=\frac{|2\times 2-3|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以弦长$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

故选：D

9．现有 5 名志愿者报名参加公益活动，在某一星期的星期六、星期日两天，每天从这 5 人中安排 2 人参加公益活动，则恰有 1 人在这两天都参加的不同安排方式共有（　）

A．120　　B．60　　C．30　　D．20

【答案】B

【分析】利用分类加法原理，分类讨论五名志愿者连续参加两天公益活动的情况，即可得解.

【详解】不妨记五名志愿者为a,b,c,d,e，

假设a连续参加了两天公益活动，再从剩余的 4 人抽取 2 人各参加星期六与星期天的公益活动，共有$\mathrm{A}_4^2=12$种方法，

同理：b,c,d,e连续参加了两天公益活动，也各有12种方法，

所以恰有 1 人连续参加了两天公益活动的选择种数有$5\times12=60$种.

故选：B.

10．函数$y=f\left(x\right)$的图象由函数$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到，则$y=f\left(x\right)$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为（　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

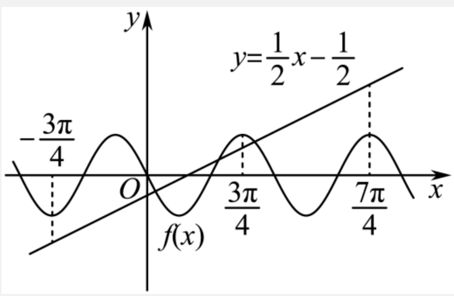
【答案】C

【分析】先利用三角函数平移的性质求得$f\left(x\right)=-\sin2x$，再作出$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的部分大致图像，考虑特殊点处$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的大小关系，从而精确图像，由此得解.

【详解】因为$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位所得函数为

$y=\cos\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin2x$，所以$f\left(x\right)=-\sin2x$，而$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$显然过$\left(0,-\frac{1}{2}\right)$与$\left(1,0\right)$两点，

作出$f\left(x\right)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的部分大致图像如下，



考虑 $2x=-\frac{3\pi}{2},2x=\frac{3\pi}{2},2x=\frac{7\pi}{2}$，即 $x=-\frac{3\pi}{4},x=\frac{3\pi}{4},x=\frac{7\pi}{4}$ 处 $f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的大小关系，

当 $x=-\frac{3\pi}{4}$ 时，$f\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-1$，$y=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{3\pi+4}{8}<-1$；

当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{2}=1$，$y=\frac{1}{2}\times\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3\pi-4}{8}<1$；

当 $x=\frac{7\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sin\frac{7\pi}{2}=1$，$y=\frac{1}{2}\times\frac{7\pi}{4}-\frac{1}{2}=\frac{7\pi-4}{8}>1$；

所以由图可知，$f(x)$ 与 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为 3.

故选：C.

11．已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形，$PC=PD=3,\angle PCA=45°$，则 $\triangle PBC$ 的面积为（　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．$3\sqrt{2}$　　C．$4\sqrt{2}$　　D．$6\sqrt{2}$

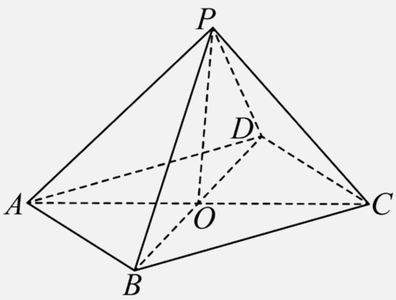
【答案】C

【分析】法一：利用全等三角形的证明方法依次证得 $\triangle PDO\cong\triangle PCO$，$\triangle PDB\cong\triangle PCA$，从而得到 $PA=PB$，再在 $\triangle PAC$ 中利用余弦定理求得 $PA=\sqrt{17}$，从而求得 $PB=\sqrt{17}$，由此在 $\triangle PBC$ 中利用余弦定理与三角形面积公式即可得解；

法二：先在 $\triangle PAC$ 中利用余弦定理求得 $PA=\sqrt{17}$，$\cos\angle PCB=\frac{1}{3}$，从而求得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=-3$，再利用空间向量的数量积运算与余弦定理得到关于 $PB,\angle BPD$ 的方程组，从而求得 $PB=\sqrt{17}$，由此在 $\triangle PBC$ 中利用余弦定理与三角形面积公式即可得解.

【详解】法一：

连结 AC,BD 交于 O，连结 PO，则 O 为 AC,BD 的中点，如图，



因为底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=4$，所以 $AC=BD=4\sqrt{2}$，则 $DO=CO=2\sqrt{2}$，

又 $PC=PD=3$，$PO=OP$，所以 $\triangle PDO\cong\triangle PCO$，则 $\angle PDO=\angle PCO$，

又 $PC=PD=3$，$AC=BD=4\sqrt{2}$，所以 $\triangle PDB\cong\triangle PCA$，则 $PA=PB$，

在 $\triangle PAC$ 中，$PC=3,AC=4\sqrt{2},\angle PCA=45°$，

则由余弦定理可得$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，

故$PA=\sqrt{17}$，则$PB=\sqrt{17}$，

故在△PBC中，$PC=3,PB=\sqrt{17},BC=4$，

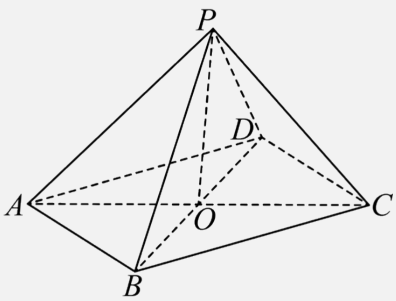
所以$\cos\angle PCB=\frac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\frac{9+16-17}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$，

又$0<\angle PCB<\pi$，所以$\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以△PBC的面积为$S=\frac{1}{2}PC\cdot BC\sin\angle PCB=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

法二：

连结AC,BD交于O，连结PO，则O为AC,BD的中点，如图，



因为底面$ABCD$为正方形，$AB=4$，所以$AC=BD=4\sqrt{2}$，

在$\triangle PAC$中，$PC=3,\angle PCA=45^\circ$，

则由余弦定理可得$PA^2=AC^2+PC^2-2AC\cdot PC\cos\angle PCA=32+9-2\times4\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=17$，故$PA=\sqrt{17}$，

所以$\cos\angle APC=\frac{PA^2+PC^2-AC^2}{2PA\cdot PC}=\frac{17+9-32}{2\times\sqrt{17}\times3}=-\frac{\sqrt{17}}{17}$，则

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\overrightarrow{PC}\right|\cos\angle APC=\sqrt{17}\times3\times\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)=-3$，

不妨记$PB=m,\angle BPD=\theta$，

因为$\overrightarrow{PO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)$，所以$\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}\right)^2=\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}\right)^2$，

即$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PC}^2+2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PD}^2+2\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$，

则$17+9+2\times(-3)=m^2+9+2\times3\times m\cos\theta$，整理得$m^2+6m\cos\theta-11=0$ ①，

又在$\triangle PBD$中，$BD^2=PB^2+PD^2-2PB\cdot PD\cos\angle BPD$，即$32=m^2+9-6m\cos\theta$，则

$m^2-6m\cos\theta-23=0$ ②，

两式相加得 $2m^2-34=0$，故 $PB=m=\sqrt{17}$，

故在△PBC 中，$PC=3,PB=\sqrt{17},BC=4$，

所以 $\cos\angle PCB=\dfrac{PC^2+BC^2-PB^2}{2PC\cdot BC}=\dfrac{9+16-17}{2\times3\times4}=\dfrac{1}{3}$，

又 $0<\angle PCB<\pi$，所以 $\sin\angle PCB=\sqrt{1-\cos^2\angle PCB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以△PBC 的面积为 $S=\dfrac{1}{2}PC\cdot BC\sin\angle PCB=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$.

故选：C.

12. 设 O 为坐标原点，F_1,F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{3}{5}$，则 $|OP|=$（ ）

A. $\dfrac{13}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\dfrac{14}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$

【答案】B

【分析】方法一：根据焦点三角形面积公式求出 $\triangle PF_1F_2$ 的面积，即可得到点 P 的坐标，从而得出 $|OP|$ 的值；

方法二：利用椭圆的定义以及余弦定理求出 $|PF_1||PF_2|,|PF_1|^2+|PF_2|^2$，再结合中线的向量公式以及数量积即可求出；

方法三：利用椭圆的定义以及余弦定理求出 $|PF_1|^2+|PF_2|^2$，即可根据中线定理求出.

【详解】方法一：设 $\angle F_1PF_2=2\theta,0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\dfrac{\angle F_1PF_2}{2}=b^2\tan\theta$，

由 $\cos\angle F_1PF_2=\cos2\theta=\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{3}{5}$，解得：$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，

由椭圆方程可知，$a^2=9,b^2=6,c^2=a^2-b^2=3$，

所以，$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times|F_1F_2|\times|y_p|=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times|y_p|=6\times\dfrac{1}{2}$，解得：$y_p^2=3$，

即 $x_p^2=9\times\left(1-\dfrac{3}{6}\right)=\dfrac{9}{2}$，因此 $|OP|=\sqrt{x_p^2+y_p^2}=\sqrt{3+\dfrac{9}{2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$.

故选：B.

方法二：因为 $|PF_1|+|PF_2|=2a=6$ ①，$|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\angle F_1PF_2=|F_1F_2|^2$，