关于数值计算方法三次样条插值

4.4.1 分段插值

已知 $(x_j, y_j), j = 0,1,\ldots,n,$ 判断 $x \in [x_{j-1}, x_j]$

则 $f(x)$ 用 $[x_{j-1}, x_j]$ 上的现性插值函数表示

计算机上实现 $u \leftarrow x$，，若 $u < x_1$ 取 $j = 1,$

即 $x \in [x_0, x_1]$,(若 $u \leq x_0,$ 也选 $j = 1$，则外插)

若 $u \leq x_2,$ 取 $j = 2$

分段线性插值

一般的，$x_{j-1} \le u \le x_j$,则线性插值函数为

$$u = y_{j-1} + (u - x_{j-1})(y_j - y_{j-1})/(x_j - x_{j-1})$$

这是因为

$$y = \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} y_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} y_j$$

$$= y_{j-1} + (x - x_{j-1})(y_j - y_{j-1})/(x_j - x_{j-1})$$

分段线性插值

算法：

1.输入$x_i, y_i (i = 0,1,\ldots,n)$

2.按$k = 1,2,\ldots,m$做

(1)输入插值点u

(2)对于j = 1,2,…,n做

如果$u \le x_j$则

分段线性插值

$1^0 \quad v = y_{j-1} + (u - x_{j-1})(y_j - y_{j-1})/(x_j - x_{j-1})$

$2^0 \quad$ 输出u, v

分段插值函数

$$I(x) = \begin{cases} I_1(x) & x \in (x_0, x_1) \\ I_2(x) & x \in (x_1, x_2) \\ \quad \cdots\cdots \\ I_n(x) & x \in (x_{n-1}, x_n) \end{cases}$$

$$其中 I_j = \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j} y_{j-1} + \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} y_j$$

$$= y_{j-1} + (x - x_{j-1})(y_j - y_{j-1}) / (x_j - x_{j-1})$$

- 缺点：I(x)连续，但不光滑，精度较低,仅在

$h = \max_{1 \le j \le n} \{h_j = x_j - x_{j-1}\}$足够小才能较好的逼近

分段三次Hermite插值

- 上述分段线性插值曲线是折线，光滑性差，如果交通工具用这样的外形，则势必加大摩擦系数，增加阻力，因此用hermite分段插值更好。

分段三次Hermite插值

三次*Hermite*插值 $x \in [x_{j-1}, x_j]$时

$$H_3(x) = \alpha_{j-1}(x) y_{j-1} + \alpha_j(x) y_j + \beta_{j-1}(x) f'_{j-1} + \beta_j(x) f'_j$$

令 $$A_1 = \alpha_{j-1}(u) = (1 + 2\frac{u - x_{j-1}}{h_j})(\frac{u - x_j}{h_j})^2$$

$$A_2 = \alpha_j(u) = (1 + 2\frac{u - x_j}{h_j})(\frac{u - x_{j-1}}{h_j})^2$$

$$B_1 = \beta_{j-1}(u) = (u - x_{j-1})(\frac{u - x_j}{h_j})^2$$

$$B_2 = \beta_j(u) = (u - x_j)(\frac{u - x_j}{h_j})^2$$

分段三次Hermite插值算法

则 $v = A_1 y_{j-1} + A_2 y_j + B_1 f'_{j-1} + B_2 f'_j$

算法：

1.输入x_j, f_j, f'_j （$j = 0,1,\ldots,n$）；

2.计算插值

(1)输入插值点u;

(2)对于$j = 1,2,\ldots,n$做

如果$u \le x_j$则计算A_1, A_2, B_1, B_2;

$v = A_1 f_{j-1} + A_2 f_j + B_1 f'_{j-1} + B_2 f'_j$;

3.输出u, v。

例题

例　设 $f(1)=2$，$f(2)=3$，$f'(1)=1$，$f'(2)=-1$，求满足条件的 $Hermite$ 插值多项式。

解：$x_0=1, x_1=2, h=2-1=1$　则

$$A_1=(1+2(x-1))(x-2)^2=(2x-1)(x-2)^2$$

$$A_2=(1+2(x-2))(x-1)^2=(2x-3)(x-1)^2$$

$$B_1=(x-1)(x-2)^2$$

$$B_2=(x-2)(x-1)^2$$

例题

所以得

$$H_3(x) = 2(2x-1)(x-2)^2 + 3(2x-3)(x-1)^2$$

$$= (x-1)(x-2)^2 - (x-2)(x-1)^2$$

$$= -3x^3 + 8x^2 - 9x + 5$$

4.4.2 三次样条插值

定义 设函数$f(x)$是区间$[a,b]$上的二次连续可微函数，在区间$[a，b]$上给出一个划分

$$\Delta: \quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

如果函数$s(x)$满足条件

(1) $s(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0,1,2,\ldots n);$

(2) 在每个小区间$[x_{j-1}, x_j](j = 1,2,\ldots,n)$上$s(x)$是不超过三次多项式；

(3) 在开区间（a,b）上$s(x)$有连续的二阶导数

则称$s(x)$为区间$[a,b]$对应于划分Δ的三次样条函数。

三次样条插值

设三次样条函数$s(x)$在每个子区间$[x_{j-1},x_j]$上有表达式

$$s(x)=s_j(x)=a_jx^3+b_jx^2+c_jx+d_j \quad x\in(x_{j-1},x_j),j=1,2\ldots n$$

其中$a_j,b_j,c_j.d_j$为待定常数，插值条件为：

(1) $s(x_j)=f(x_j)$ （$j=0,1,\ldots,n$）；

(2) $(n-1)$内节点处连续及光滑性条件：

$$\left.\begin{aligned} s(x_j-0)&=s(x_j+0)\\ s'(x_j-0)&=s'(x_j+0)\\ s''(x_j-0)&=s''(x_j+0)\end{aligned}\right\} j=1,2,\ldots,n-1$$

三次样条插值

对于待定系数 $a_j,b_j,c_j.d_j \quad j=1,2,\ldots n,$ 即 $4n$ 个未知系数

而插值条件为 $4n-2$ 个，还缺两个，因此须给出两个条件称为边界条件，有以下三类：

第一类　已知两端点的一阶导数

$$\begin{cases} s'(x_0)=f'(x_0)=m_0 \\ s'(x_n)=f'(x_n)=m_n \end{cases}$$

三次样条插值

第二类:已知两端点二阶导数

$$\begin{cases} s''(x_0) = f''(x_0) = M_0 \\ s''(x_n) = f''(x_n) = M_n \end{cases}$$

当$M_0 = M_n = 0$时为自然边界条件

第三类：周期边界条件

$$\begin{cases} s(x_0) = s(x_n) \\ s'(x_0 + 0) = s'(x_0 - 0) \\ s''(x_n = 0) = s''(x_n - 0) \end{cases}$$

三次样条插值

用三弯矩阵构造三次样条插值函数

令$s''(x_i)=M_i(i=0,1,2,\ldots n)$。因为$s(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上是三次多项式，所以$s''(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上是一次多项式，故有

$$s'''(x)=\frac{M_{i+1}-M_i}{x_{i+1}-x_i}\quad \forall x\in[x_i,x_{i+!}]$$

三次样条插值

于是由$Taylor$展示有

$$s(x)=s(x_i)+s'(x_i)(x-x_i)+\frac{s''(x_i)}{2!}(x-x_i)^2+\frac{s'''(x_i)}{3!}(x-x_i)^3$$

$$=y_i+s'(x_i)(x-x_j)+\frac{M_i}{2!}(x-x_i)^2+\frac{M_{i+1}-M_i}{3!(x_{i+1}-x_i)}(x-x_i)^3$$

令$x=x_{i+1}$得

$$y_{i+1}=y_i+s'(x_i)(x_{i+1}-x_i)+\frac{M_i}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2+\frac{M_{i+1}-M_i}{3!}(x_{i+1}-x_i)^2$$

解得 $$s'(x_i)=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}-(\frac{1}{6}M_{i+1}+\frac{2}{6}M_i)(x_{i+1}-x_i) \qquad (1)$$

三次样条插值

同理在$[x_{i-1}, x_i]$上讨论得

$$s'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + (\frac{2}{6}M_i + \frac{1}{6}M_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \qquad (2)$$

因为$s'(x)$连续，所以（1）=（2）即

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - (\frac{1}{6}M_{i+1} + \frac{2}{6}M_i)(x_{i+1} - x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + (\frac{2}{6}M_i + \frac{1}{6}M_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

记$h_i = x_i - x_{i-1} \quad \mu_i = \dfrac{h_i}{h_{i+1} + h_i} \quad \lambda_i = 1 - \mu_i = \dfrac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i}$

三次样条插值

则上式为

$$f[x_{i+1},x_i]-\frac{1}{6}(M_{i+1}+2M_i)h_{i+1}=f[x_i,x_{i-1}]+\frac{1}{6}(2M_i+M_{i-1})h_i$$

即

$$(2M_i+M_{i-1})h_i+(M_{i+1}+2M_i)h_{i+1}=6(f[x_{i+1},x_i]-f[x_i,x_{i-1}])$$

也就是

$$h_iM_{i-1}+2(h_i+h_{i+1})M_i+h_{i+1}M_{i+1}=6(f[x_{i+1},x_i]-f[x_i,x_{i-1}])$$

两边同除

$$x_{i+1}-x_{i-1}=(x_{i+1}-x_i+x_i-x_{i-1})=h_{i+1}+h_i$$

得$\dfrac{h_i}{h_{i+1}+h_i}M_{i-1}+2M_i+\dfrac{h_i}{h_{i+1}+h_i}M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$

即得

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] \quad i=1,2,\ldots n-1$$

三次样条插值

第一类边界条件：$s'(x_0)=f'(x_0) \quad s'(x_n)=f'(x_n)$

(1) 式中令 $i=0$ 得

$$s'(x_0)=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}-(\frac{1}{6}M_1+\frac{2}{6}M_0)(x_1-x_0)$$

既有 $\quad 2M_0+M_1=6f[x_0,x_0,x_1]$

三次样条插值

同理(2)式中令$i=n$得

$$M_{n-1}+2M_n=6f[x_{n-1},x_n,x_n]$$

即有

$$\begin{cases} 2M_0+M_1=6f[x_0,x_0,x_1] \\ \mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}] \quad (i=1,2,\ldots,n-1) \\ M_{n-1}+2M_n=6f[x_{n-1},x_n,x_n] \end{cases}$$

三次样条插值

第二类边界条件 $s''(x_0) = f''(x_0) = M_0, s''(x_n) = f''(x_n) = M_n$

同理可得

$$\begin{cases} 2M_1 + \lambda_1 M_2 = 6f[x_0, x_1, x_2] - \mu_1 M_0 \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_n = 6f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] - \lambda_{n-1} M_n \end{cases}$$

$$i = 2,3,\ldots,n-2$$

三次样条插值

周期函数边界条件下的弯方程

$$\begin{cases} 2M_1 + \lambda_1 M_2 + \mu_1 M_n = f[x_0, x_1, x_2] \\ \mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \\ \lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}] \end{cases}$$

$$i = 2,3,\ldots,n-1$$

例题

- 例4.4.1 已知函数y=f(x)的数表如下表所示。

x	0	0.15	0.30	0.45	0.60
$f(x)$	1	0.97800	0.91743	0.83160	0.73529

求满足边界条件 $s'(0)=0, s'(0.60)=-0.64879$ 三次样条函数 $s(x)$，并计算 $s(0.2)$。

- 解　做差商表(P111),由于是等距离节点,

$$h_i = x_i - x_{i-1} = 0.15 \quad i = 1,2,3,4$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_{i+1} + h_i} = \frac{1}{2}, \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_{i+1} + h_i} = \frac{1}{2}$$

- 由第二类边界条件得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 0.5 & 2 & 0.5 & & \\ & 0.5 & 2 & 0.5 & \\ & & 0.5 & 2 & 0.5 \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.86667 \\ -5.14260 \\ -3.36798 \\ -1.39740 \\ -0.26880 \end{bmatrix}$$

- 解方程得

$$M_0=-2.04462, M_1=-1.77757, M_2=-1.13031,$$
$$M_3=-0.43716, M_4=0.08418$$

- 将M_i代入式4.4.14)得

$$s(x)=\begin{cases}0.29672x^3-1.02231x^2+1, & x\in[0,0.15]\\ 0.71918x^3-1.21242x^2+0.02851x+0.99858, & x\in[0.15,0.30]\\ 0.77017x^3-1.25831x^2+0.04228x+0.99720, & x\in[0.30,0.45]\\ 0.57927x^3-1.00059x^2+0.07370x+1.01461 & x\in[0.45,0.60]\end{cases}$$

由于 $0.20\in[0.15,0.30]$ 故

$$s(0.20)=0.71918\times0.2^3-1.21242\times0.2^3+0.02851\times0.2+0.99858=0.96154$$

4．5 曲线拟合的最小二乘法

- 插值法是用多项式近似的表示函数,并要求在他们的某些点处的值相拟合.同样也可以用级数的部分和作为函数的近似表达式.无论用那种近似表达式,在实际应用中都要考虑精度,所以我们给出最佳逼近的讨论.

4.5.1 最佳平方逼近

- 定义4.5.1 设 $f(x), g(x) \in C[a,b]$, 称

$$(f,g) \triangleq \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

为函数 $f(x), g(x)$ 在区间[a,b]上的内积.

其中 $\rho(x)$ 为区间[a,b]上的权函数,且满足下面两个条件:

(1)　在$[a, b]$上，$\rho(x) \geq 0$, 并且最多只能有有限零点；

（2）　$\int_a^b x^i \rho(x) \mathrm{d}x$存在，$i = 0,1,2,\ldots$

容易验证,上述定义的函数内积满足一般内积概念中四条基本性质.

内积的性质

性质1 $(f,g)=(g,f)$;

性质2 $(\alpha f,g)=\alpha(f,g),\quad \alpha\in R$;

性质3 $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$;

性质4 $(f,f)\geq 0$, 切当且仅当 $f\equiv 0$ 是等号成立

函数的欧几里得范数

- 定义4.5.2 设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$, 称

$$\|f\|_2 \triangleq \sqrt{(f,f)}$$

为函数f(x)的欧几里得范数,或2范数.