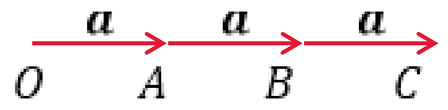
6.2 平面向量的运算

6.2.3 向量的数乘运算

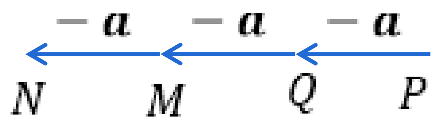
问题导入

思考1：已知非零向量$\boldsymbol{a}$，作出$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$和$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$.它们的长度和方向分别是怎样的？

如图，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$. 类比数的乘法，我们把$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$记作$3\boldsymbol{a}$，即$\overrightarrow{OC}=3\boldsymbol{a}$. 显然$3\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相同，$3\boldsymbol{a}$的长度是$\boldsymbol{a}$的长度的3倍，即$|3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$.



类似地，由图可知，$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MN}=(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$. 我们把$(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})+(-\boldsymbol{a})$记作$-3\boldsymbol{a}$，即$\overrightarrow{PN}=-3\boldsymbol{a}$.
显然$-3\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相反，$-3\boldsymbol{a}$的长度是$\boldsymbol{a}$的长度的3倍，即$|-3\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|$.



新知探索

一般地，我们规定实数λ与向量$\boldsymbol{a}$的积是一个向量，这种运算叫做向量的数乘，记作$\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当$\lambda > 0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相同；当$\lambda < 0$时，$\lambda\boldsymbol{a}$的方向与$\boldsymbol{a}$的方向相反.

由(1)可知，当$\lambda = 0$时，$\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

由(1)(2)可知，$(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

你对零向量、相反向量有什么新的认识？

零乘任何向量的结果为零向量；

-1乘任何向量得到这个向量的相反向量.

新知探索

思考2：如果把非零向量$\boldsymbol{a}$的长度伸长到原来的3.5倍，方向不变得到向量$\boldsymbol{b}$，向量$\boldsymbol{b}$该如何表示？向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$之间的关系怎样？ $\boldsymbol{b}=3.5\boldsymbol{a}$；$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$.

根据实数与向量的积的定义，可以验证下面的运算律是成立的.

设λ，μ为实数，那么

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

特别地，我们有：

$$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a}),$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}.$$

向量的加、减、数乘运算统称为向量的线性运算.向量线性运算的结果仍是向量.

对于任意向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，以及任意实数λ，μ_1，μ_2，恒有

$$\lambda(\mu_1\boldsymbol{a}\pm\mu_2\boldsymbol{b})=\lambda\mu_1\boldsymbol{a}\pm\lambda\mu_2\boldsymbol{b}.$$

例析

例5. 计算：

(1) $(-3)\times 4\boldsymbol{a}$；(2) $3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-2(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}$；(3) $(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

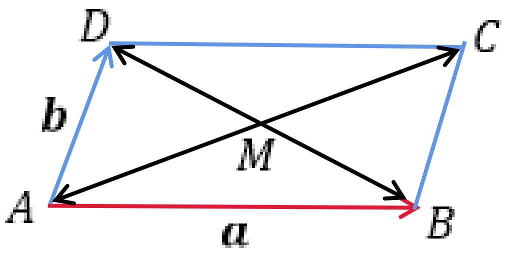
解：(1) 原式$=(-3\times 4)\boldsymbol{a}=-12\boldsymbol{a}$；

(2) 原式$=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=5\boldsymbol{b}$；

(3) 原式$=2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

例析

例6. 如图，▱$ABCD$的两条对角线相交于点M，且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.



解：在▱$ABCD$中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

由平行四边形的两条对角线互相平分，得：

$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{MD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

新知探索

思考3：引入向量数乘运算后，你能发现实数与向量的积与原向量之间的位置关系吗？

可以发现，实数与向量的积与原向量共线.

事实上，对于向量$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$，$\boldsymbol{b}$，如果有一个实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，那么由向量数乘的定义可知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线.

反过来，已知向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，且向量$\boldsymbol{b}$的长度是向量$\boldsymbol{a}$的长度的μ倍，即$\boldsymbol{b}=\mu|\boldsymbol{a}|$，那么当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$同方向时，有$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$；当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$反方向时，有$\boldsymbol{b}=-\mu\boldsymbol{a}$.

新知探索

综上，我们有如下定理：(共线向量定理)

向量$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$与共线的充要条件是：存在唯一一个实数$\lambda$，使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

根据这一定理，设非零向量$\boldsymbol{a}$位于直线l上，那么对于直线l上的任意一个向量$\boldsymbol{b}$，都存在唯一的一个实数λ，使$\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$. 也就是说，位于同一条直线上的向量可以由这条直线上的一个非零向量表示.

新知探索

辨析1：判断正误.

1. 若向量$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$共线，则存在唯一的实数λ使$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. （ ）

2. 若$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线. （ ）

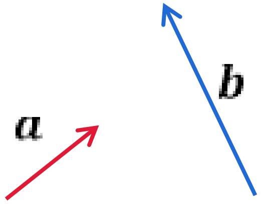
3. 若$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. （ ）

4. $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$. （ ）

答案：×，√，×，×.

例析

例7. 如图，已知任意两个非零向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，试作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$.猜想$A,B,C$三点之间的位置关系，并证明你的猜想.



解：分别作向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，过点A，C作直线AC(如图). 观察发现，

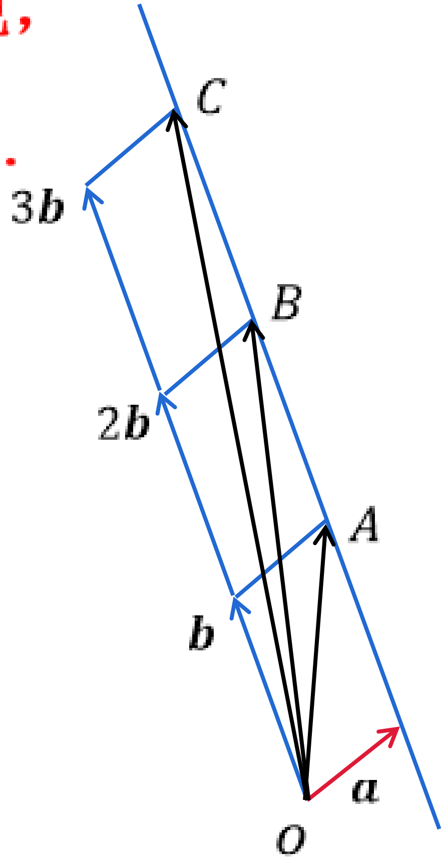
不论向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$怎样变化，点B始终在直线AC上，猜想A,B,C三点共线.

事实上，因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{b}$，

所以$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

因此A，B，C三点共线.



例析

例8. 已知$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$是两个不共线的向量，向量$\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$共线，求实数$t$的值.

解：由于$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，易知向量$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$为非零向量.由向量$\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$共线，

可知存在实数λ，使得$\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}=\lambda(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b})$，即$(t+\frac{1}{2}\lambda)\boldsymbol{a}=(\frac{3}{2}\lambda+1)\boldsymbol{b}$.

由$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$不共线，必有$t+\frac{1}{2}\lambda=\frac{3}{2}\lambda+1=0$.否则，不妨设$t+\frac{1}{2}\lambda\neq 0$，则$\boldsymbol{a}=\frac{\frac{3}{2}\lambda+1}{t+\frac{1}{2}\lambda}\boldsymbol{b}$.

由两个向量共线的充要条件知，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$共线，与已知矛盾.

由$\left\{\begin{array}{l} t+\frac{1}{2}\lambda=0, \\ \frac{3}{2}\lambda+1=0, \end{array}\right)$解得$t=\frac{1}{3}$.

因此，当向量$\boldsymbol{b}-t\boldsymbol{a}$，$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$共线时，$t=\frac{1}{3}$.