第四章
指数函数与对数函数

考纲要求

1. 理解整数指数和有理指数幂的概念，掌握整数指数和有理指数幂的运算，了解幂函数的概念.
2. 理解对数的概念，了解对数的运算法则，理解指数函数的概念、图像和性质，了解对数函数的概念、图像和性质.
3. 了解换底公式，了解常用对数、自然对数.
4. 了解指数函数与对数函数的实际应用.

命题趋势

本章内容在历年真题中多以是非选择题、单项选择题和填空题的形式出现，有时也会结合其他知识点以解答题的形式出现，其分值比例约占10%，主要涉及的知识点有实数指数幂和对数的运算，换底公式的运用，指数函数和对数函数的单调性及运算.

知识结构

- 指数函数与对数函数
  - 实数指数幂与幂函数
    - 实数指数幂及其运算法则
    - 幂函数
  - 指数函数
    - 指数函数
    - 指数方程
  - 对数与对数函数
    - 对数
    - 对数函数
    - 对数方程

目录

§第一节

实数指数幂与幂函数

知识清单

知识点一　指数幂的性质与运算

1.定义

（1）正整数指数幂：$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n个}(n\in\mathbf{N}^*)$.

（2）负整数指数幂：$a^{-n}=\frac{1}{a^n}(a\neq 0,n\in\mathbf{N}^*)$.

（3）分数指数幂：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in N^*,n>1);a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*,n>1).$$

（4）零指数幂：$a^0=1(a\neq 0)$.

知识清单

知识点一　指数幂的性质与运算

2.有理数指数幂的性质

(1)$a^m a^n = a^{m+n}(a>0, m, n \in \mathbf{Q})$

(2) $a^m \div a^n = a^{m-n}(a \neq 0, m, n \in \mathbf{Q})$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}(a>0, m, n \in \mathbf{Q})$

(4) $(ab)^n = a^n b^n(a>0, b>0, n \in \mathbf{Q})$

知识清单

知识点一　指数幂的性质与运算

3.根式

一般地，如果$x^n=a$，那么，x叫作a的n次方根，其中，$n>1$，$n\in\mathbf{N}^*$.$\sqrt[n]{a}$叫作根式.n叫作根指数，a叫作被开方数.

其性质如下：

（1）当n是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当n是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a, a>0,\\ -a, a<0.\end{cases}$

（2）负数没有偶次方根.

（3）零的任何次根都是零.

（4）当n为任意正整数时，$\sqrt[n]{a}^n=a$.

知识清单

知识点二　幂函数

1.幂函数的概念

形如 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$的函数叫作幂函数，其中$\alpha$为常数.

2.幂函数的性质

(1)图像分布：幂函数的图像分布在第一、二、三象限，第四象限内无图像.幂函数是偶函数时，图像分布在第一、二象限(图像关于y轴对称)；幂函数是奇函数时，图像分布在第一、三象限(图像关于原点对称)；幂函数是非奇非偶函数时，图像只分布在第一象限.

知识清单

知识点二　幂函数

(2)过定点：所有的幂函数在$(0,+\infty)$上都有定义，并且图像都经过点$(1，1)$.

(3)单调性：如果$\alpha>0$，则幂函数的图像过原点，并且在（0，$+\infty$)上为增函数；如果$\alpha<0$，则幂函数的图像在$(0，+\infty)$上为减函数，在第一象限内，图像无限接近x轴与y轴.

(4)奇偶性：当α为奇数时，幂函数为奇函数；当α为偶数时，幂函数为偶函数.当$\alpha=\frac{q}{p}$(其中，p，q互质，p和$q\in\mathbf{Z}$)，若p为奇数，q为奇数，则$y=x^{\frac{q}{p}}$是奇函数；若p为奇数，q为偶数，则$y=x^{\frac{q}{p}}$是偶函数；若p为偶数，q为奇数，则$y=x^{\frac{q}{p}}$是非奇非偶函数.

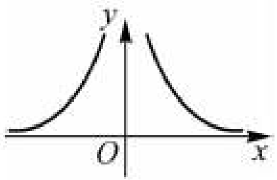
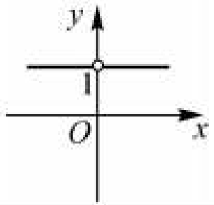
(5)图像特征：幂函数$y=x^{a}$,$x\in(0，+\infty)$，当$\alpha>1$时，若$0<x<1$，其图像在直线$y=x$下方，若$x>1$，其图像在直线$y=x$上方；当$\alpha<1$时，若$0<x<1$，其图像在直线$y=x$上方，若$x>1$，其图像在直线$y=x$下方.

知识清单

知识点二　幂函数

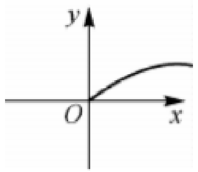
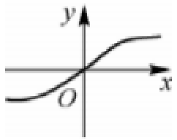
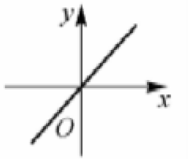
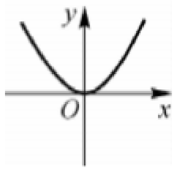
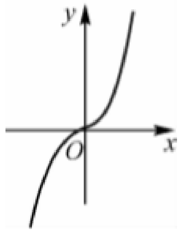
(6)几个常见幂函数的图像和性质见表4-1.

表 4-1

函　　数	图　　像	性　　质				
		定义域	值　　域	单调性	奇偶性	对称性
$y=x^{-2}$		$\{x\mid x\neq0\}$	$\{y\mid y>0\}$	在$(-\infty,0)$上单调递增，在$(0,+\infty)$上单调递减	偶函数	关于y轴对称
$y=x^{0}$		$\{x\mid x\neq0\}$	$\{y\mid y=1\}$	无增减性	偶函数	关于y轴对称

知识清单

续表

函　数	图　像	性　质				
		定义域	值　域	单调性	奇偶性	对称性
$y=x^{\frac{1}{2}}$		$\{x\mid x\geqslant 0\}$	$\{y\mid y\geqslant 0\}$	在$(0,+\infty)$上单调递增	非奇非偶函数	无
$y=x^{\frac{1}{3}}$		$x\in\mathbf{R}$	$y\in\mathbf{R}$	在$(-\infty,+\infty)$上单调递增	奇函数	关于原点对称
$y=x$		$x\in\mathbf{R}$	$y\in\mathbf{R}$	在$(-\infty,+\infty)$上单调递增	奇函数	关于原点对称
$y=x^2$		$x\in\mathbf{R}$	$\{y\mid y\geqslant 0\}$	在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增	偶函数	关于y轴对称
$y=x^3$		$x\in\mathbf{R}$	$y\in\mathbf{R}$	在$(-\infty,+\infty)$上单调递增	奇函数	关于原点对称

注意：进行幂运算时，要将小数指数、根式都统一为分数指数，以利于变换.

典例精析

例

例

例 1 计算：$\left(2\frac{1}{4}\right)^{0.5}+(0.1)^{-2}-(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+(\sqrt{2}+1)^{0}$.

解析 原式$=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}-(2\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+1$

$=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}+10^{2}-(2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}-2^{3}+1$

$=\frac{3}{2}+100-\frac{1}{2}-8+1$

$=94$.

技巧点拨 进行有理数指数幂运算时，若底数是带分数，则通常将带分数化成假分数；若底数为小数，则通常将小数化成分数；若底数为根式，则将底数化成有理数指数幂的形式，然后再利用幂的运算法则求解.

典例精析

例

例题

例 2　下列结论中，正确的是（　　）.

A. 幂函数的图像都经过(0,0)，(1,1)两点

B. 幂函数的图像不可能在第四象限

C. 当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的值随 x 的增大而增大

D. 当 $\alpha=0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像是一条直线

解析　当 $\alpha>0$ 时，幂函数的图像才经过(0,0)，(1,1)两点，此时函数在$(0,+\infty)$上为增函数，所以选项 A，C 错误；当$\alpha<0$时，幂函数的图像只经过点(1,1)，此时函数在$(0,+\infty)$上为减函数；当 $\alpha=0$ 时，幂函数 $y=x^{\alpha}$ 的图像不经过点(0,1)，此时它的图像是两条射线，所以选项 D 错误；幂函数的图像分布在第一、二、三象限，所以选项 B 正确. 故选 B.

技巧点拨　此题考查的是幂函数的性质. 幂函数的一般形式是 $y=x^{\alpha}$，而不同的 α 的值所对应幂函数的图像和性质都会发生变化，要注意分类区分.

巩固练习

基础实战

一、选择题

1. 下列各式中，计算正确的是(　　).

A. $4^{\frac{1}{2}}\cdot 4^2=4$　　B. $(5^{-\frac{1}{2}})^2=5$　　C. $(3^{m-n})^2=9^{m-n}$　　D. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=-\frac{1}{2}$

2. 下列函数中是幂函数的是(　　).

A. $y=3^x$　　B. $y=x^{-3}$　　C. $y=2x^{-3}$　　D. $y=\frac{1}{2x}$

3. 下列幂函数中，(　　)是非奇非偶函数.

A. $y=x^3$　　B. $y=x^{\frac{1}{3}}$　　C. $y=x^{-2}$　　D. $y=x^{\frac{1}{2}}$

二、解答题

计算：$(-1.8)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\times\sqrt[3]{\left(3\frac{3}{8}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{0.01}}+\sqrt{9^3}$.

巩固练习

提升进阶

1.已知$3^a=2, 3^b=5$，求3^{3a+2b}.

2.设$x>0$，且$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=4$，求：

（1）$x+x^{-1}$；　　（2）x^2+x^{-2}.

3.已知幂函数的图像通过点$\left(8,\frac{1}{4}\right)$,求$f(64)$的值.

§第二节　指数函数

知识清单

知识点一　指数函数

1.指数函数的概念

一般地，形如$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）的函数叫作指数函数，其中x是自变量，$x\in\mathbf{R}$.

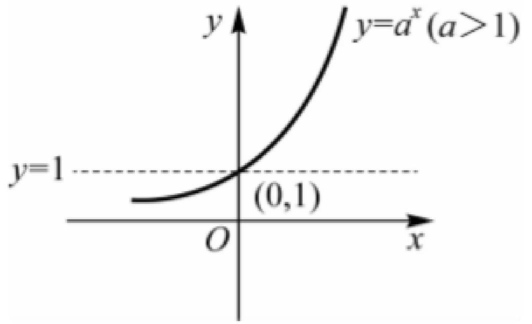
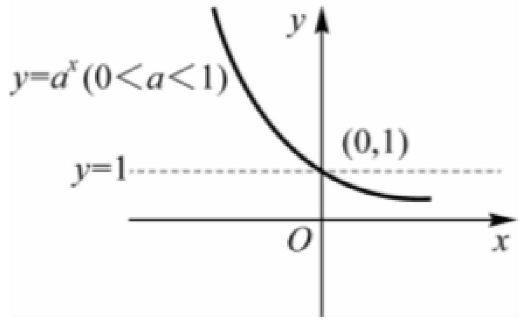
2.指数函数的图像和性质

指数函数的图像和性质见表4-2.

知识清单

知识点一　指数函数

表4-2

<table>
<tr><th>函数</th><th>$y=a^x(a>1)$</th><th>$y=a^x(0<a<1)$</th></tr>
<tr><td>图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">图像特征</td><td colspan="2">图像分布在第一、二象限，与 y 轴相交，图像在 x 轴的上方</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像经过点(0,1)</td></tr>
<tr><td>从左向右，图像逐渐上升</td><td>从左向右，图像逐渐下降</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td colspan="2">(1)定义域：$(-\infty,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2)值域：$(0,+\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(3)过定点(0,1)，即 $x=0$ 时，$y=1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4)当 $a>1$ 时，函数在定义域上是单调递增函数；当 $0<a<1$ 时，函数在定义域上是单调递减函数</td></tr>
</table>

知识清单

知识点二　指数方程

1.指数方程的定义

在指数里含有未知数的方程叫作指数方程.

2.一些特殊指数方程的解法

（1）形如$a^{f(x)}=a^{g(x)}$（$a>0$且$a\neq1$）的方程，一般可用指数的性质化成普通方程$f(x)=g(x)$去求解.

（2）形如$f(a^x)$（$a>0$且$a\neq1$）的方程，可以采用换元的方法设$a^x=t$（$t>0$），解方程$f(t)=0$，求出t，得到$a^x=t$（$t>0$）的方程，两边取对数进一步求解.

典例精析

例

例 1 比较下列各组中两个数的大小.

(1)$0.7^{-0.9}$与$0.7^{-1.2}$； (2)$3^{\frac{1}{4}}$与$3^{\frac{1}{5}}$.

例

解析 (1)设$f(x)=0.7^x$，因为$0<0.7<1$，所以函数$f(x)=0.7^x$是减函数.

因为$-0.9>-1.2$，所以$0.7^{-0.9}<0.7^{-1.2}$.

(2)设$f(x)=3^x$，因为$3>1$，所以函数$f(x)=3^x$是增函数.

因为$\frac{1}{4}>\frac{1}{5}$，所以$3^{\frac{1}{4}}>3^{\frac{1}{5}}$.

技巧点拨 比较两个幂大小的方法：一是转化为比较同一个指数函数的两个函数值.利用函数的单调性得到大小关系(适用于同底异指函数值)；二是利用幂函数的单调性得到大小关系(适用于同指异底的函数值)；三是借助于中间某个数(如0，1)来比较大小.

典例精析

例

例

例 2 求函数 $y=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-9}$ 的定义域.

解析 解析式中含有二次根式,需被开方式大于或等于零,从而转化为解含有指数幂的不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-9\geqslant0$,变形得 $3^{-x}\geqslant3^{2}$,根据指数函数 $y=3^{x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,可知 $-x\geqslant2$,即 $x\leqslant-2$,所以该函数的定义域是 $(-\infty,-2]$.

技巧点拨 求解析式中含有指数幂的函数的定义域时,首先由求定义域的法则转化为求含有指数幂的不等式,然后转化底数,使它们的底数相同,最后利用指数函数的单调性求出定义域,实际上,它的主要过程就是解含有指数幂的不等式.

典例精析

例

例 3 解下列方程.

(1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{x}=9^{1-x}$；　　(2) $3^{2x+3}=3^{x+1}+2$.

例

解析 (1)原方程变形为 $(3^{-3})^{x}=(3^{2})^{1-x}$，即 $3^{-3x}=3^{2-2x}$，则有 $-3x=2-2x$，解得 $x=-2$.

(2)原方程变形为 $3^{3}\times(3^{x})^{2}-3\times3^{x}-2=0$，令 $3^{x}=t(t>0)$，原方程变为 $27t^{2}-3t-2=0$，解得 $t=\frac{1}{3}$ 或 $t=-\frac{2}{9}$(不符合题意，舍去)，则 $3^{x}=\frac{1}{3}$，解得 $x=-1$.

技巧点拨 (1)如果两个幂相等，底数相同，则指数也相等.

(2)用换元法求出指数幂，然后利用指数形式解方程.

典例精析

例

例

例4 我国某地区对 3×10^4 公顷荒漠化的草地进行治理，从2019年起，当地政府组织牧民种草，每年将荒漠的20%重改为草地，经过3年的治理还有多少公顷荒漠需要改造？（结果精确到0.001）

解析 以荒漠为研究对象，它以每年20%的速度减少，故符合指数衰减模型 $y=ca^x$，其中 $c=3\times10^4$（公顷），$a=1-20\%=0.8$，$x=3$（年），y 就是 x 年后还剩的荒漠的面积，于是得 $y=3\times10^4\times0.8^3=1.536\times10^4$（公顷）.

技巧点拨 有关增长率或减少率的问题，解析式一般可设为 $y=c(1\pm b\%)^x$ 的形式，其中 c 是基本量，$\pm$ 表示增加或减少，$b\%$ 表示增加或减少的百分数，x 表示增加或减少的次数.

巩固练习

基础实战

一、选择题

1. 下列各函数中，为指数函数的是（　　）.

A. $y=x$　　B. $y=\frac{2}{x^2}$　　C. $y=\pi^x$　　D. $y=x^a$

2. 设函数 $y=a^x$ 是减函数，则（　　）.

A. $a<1$　　B. $a>0$　　C. $a>1$　　D. $0<a<1$

3. 函数 $y=2.25^x$ 的图像经过点（　　）.

A. $(0,1)$　　B. $(1,0)$　　C. $(1,1)$　　D. $(2.25,1)$

4. 若指数函数的图像经过点 $\left(\frac{5}{2},243\right)$，则其解析式为（　　）.

A. $y=3^x$　　B. $y=9^x$

C. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$　　D. $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x$

巩固练习

基础实战

5. 函数 $y=8^{-x}$ 是(　　).

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 减函数　　D. 增函数

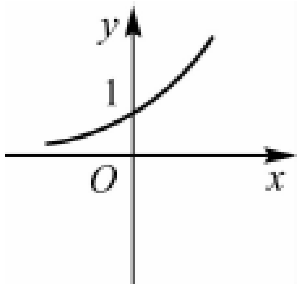
6. 函数 $y=5^x+3$ 的值域是(　　).

A. $(0,+\infty)$　　B. $(3,+\infty)$　　C. $(5,+\infty)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

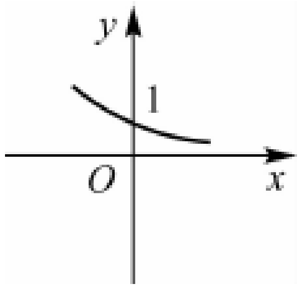
7. 已知 $\left(\frac{6}{7}\right)^{y-1}=\left(\frac{7}{6}\right)^{x^2}$，则 y 的最大值是(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

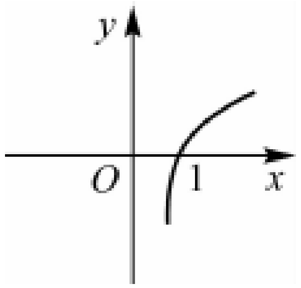
8. 函数 $y=2^{-x}$ 的图像是(　　).



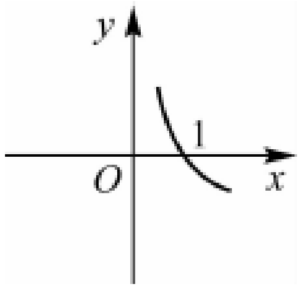
A



B



C



D