复习资料

全新考点覆盖
题库真题练习
考前押题资料

绝密★考试结束前

温州大學

2021 年硕士研究生招生考试试题

科目代码及名称： 619 量子力学

适用专业（方向）：070200 物理学

请考生按规定用笔将所有试题的答案写在答题纸上，在此试题纸上答题无效

1、填空题（每题 5 分，共 20 分）

（1）粒子的波函数为$\psi(x,y,z)$，则$dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{+\infty}dz\left|\psi(x,y,z)\right|^2$表示________________。

（2）在量子力学中描述力学量的算符一般都为厄米算符，厄米算符平均值是__________（选实数或虚数），本征值是__________（选实数或虚数）。

（3）在不考虑电子自旋的情况下，描述氢原子的波函数为$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)$，其中 m 表示______________，其取值范围为____________________。

（4）由费米子所组成的全同粒子体系的波函数是__________（选对称或反对称）的，他们_____（选遵守或不遵守）费米统计。

2、简答题（每题 10 分，共 30 分）

（1）试述“轨道”和“电子云”的概念。

（2）简述波函数的统计解释。

（3）叙述量子力学的态叠加原理。

3、证明题（每题 10 分，共 20 分）

（1）已知厄米算符$\hat{F}$满足本征方程$\hat{F}\phi_n(x)=\lambda_n\phi_n(x)$，且$\hat{F}$在归一化波函数$\psi(x)$中的平均值为$\overline{F}=\int\psi^*(x)\hat{F}\psi(x)dx$，证明$\overline{F}=\int\psi^*(x)\hat{F}\psi(x)dx=\sum_n\lambda_n\left|c_n\right|^2$，其中展开系数$c_n=\int\phi_n^*(x)\psi(x)dx$。

（2）在$\hat{\sigma}_z$表象中$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\hat{\sigma}_y=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$，证明$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z=i$。

4、计算题（本题 20 分）

粒子在一维势场$U(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le 2a\\ +\infty, & x>2a, x<0\end{cases}$中运动，试从薛定谔方程出发求出粒子的定态能级和归一化波函数。

5、计算题（本题 20 分）

在坐标表象中，一维线性谐振子的基态波函数为$\psi(x)=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi^{1/2}}}e^{-\frac{1}{2}\alpha^2x^2}$，动量算符的本征态为$\psi_p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar}}$，求该谐振子的基态在动量表象中的波函数。（ 提示：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ ）

6、计算题（本题 20 分）

在$\hat{\sigma}_z$表象中$\hat{\sigma}_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,（1）求出$\hat{\sigma}_x$的本征值和本征态;（2）求在态$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}$中测得$\sigma_x=-1$的几率。

7、计算题（本题 20 分）

一量子体系没有受微扰作用时有三个非简并能级$E_1^{(0)}$、$E_2^{(0)}$、$E_3^{(0)}$，假设微扰矩阵为：$H'=\begin{pmatrix}b & 0 & a\\ 0 & b & 0\\ a & 0 & b\end{pmatrix}$，试用微扰论计算体系的能级至二级修正。(已知修正到二级的能级公式为：

$$E_n=E_n^{(0)}+H'_{nn}+\sum_m{}'\frac{\left|H'_{mn}\right|^2}{E_n^{(0)}-E_m^{(0)}},\quad n=1,2,3)$$

温州大學

2020年硕士研究生招生考试试题(A卷)

科目代码及名称：619量子力学　　　适用专业：070200物理学

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1、填空题（每题5分，共20分）

（1）如果$\psi(x,t)$表示粒子的归一化波函数，则$|\psi(x,t)|^2 dx$表示________________。

（2）在量子力学中描述力学量的算符$\hat{A}$一般都为__________算符，即$\hat{A}^\dagger =$__________。

（3）在不考虑电子自旋的情况下，描述氢原子的波函数为$\psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)$，其中$n$表示_____________，$l$表示__________________。

（4）由玻色子所组成的全同粒子体系的波函数是_________（选对称或反对称）的，它_____（选遵守或不遵守）泡利不相容原理。

2、简答题（每题10分，共30分）

（1）请简述量子隧道效应。

（2）请简述波恩对波函数的统计学解释。

（3）请简述处于定态的量子体系具有哪些性质。

3、证明题（每题10分，共20分）

（1）证明：厄米算符的本征值是实数。

（2）设$\hat{A}$和$\hat{B}$是厄米算符，且$[\hat{A},\hat{B}]=0$，证明$\hat{A}\hat{B}$也是厄密算符。

4、计算题（本题20分）

设质量为m的粒子在一维无限深势阱中运动，该势阱为：当0≤x≤a时，V(x)=0；当x<0或x>a时，V(x)=∞。试求该粒子的能量本征值和波函数。

5、计算题（本题20分）

线性谐振子在$t=0$时处于状态$\psi(x,0)=\sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\alpha x\right]\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)$，其中$\alpha=\sqrt{\mu\omega/\hbar}$，①写出谐振子能量本征值的表达式；②求该时刻谐振子在各能量的取值几率；③求该时刻谐振子的能量平均值。[注：已知线性谐振子的本征波函数为$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2x^2\right)H_n(\alpha x), n=0,1,2,3\ldots$，其中厄米多项式$H_0(\alpha x)=1$，$H_1(\alpha x)=\alpha x$]

6、计算题（本题 20 分）

已知算符 $\hat{L}_y$ 在 $\hat{L}_z$ 表象中的矩阵形式为：

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

试求 $\hat{L}_y$ 的本征值和归一化的本征函数。

7、计算题（本题 20 分）

已知某量子体系的哈密顿量的矩阵形式为：

$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，假设 $\lambda \ll 1$，①试写出 0 级哈密顿量 $\hat{H}_0$ 和微扰哈密顿量 $\hat{H}'$；

②试写出非简并微扰的能量一级和二级修正公式；③用微扰论求 $\hat{H}$ 的本征值到二级近似。

温州大學

2007 年研究生入学考试试题

考试科目：量子力学(A)　　　报考学科、专业：凝聚态物理、理论物理

请注意:全部答案必须写在答题纸上，否则不给分。

1、氢原子处在基态$\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}$，求：

(1) r 的平均值；　　(2) 势能$(-\frac{e^2}{r})$的平均值；

(3) 最可几半径。　　（已知：$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx=\frac{n!}{a^{n+1}}$）　　（25 分）

2、设一粒子处下列势场中，请指出哪些力学量（$H,p_x,p_y,p_z,p^2,L_x,L_y,L_z,L^2$,宇称$P$）是守恒量:：(1) 自由粒子势场，(2) 中心势场。（25 分）

3、在一维无限深势阱（阱宽为 0－a）中，粒子处在第 n 个本征态：

$$\psi_n(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}x, & 0<x<a\ ;\\ 0, & 0>x,\ x>a\end{cases}$$

现受到一个微扰H'为：$$H'=\begin{cases}0 & x<0,x>a\\ \varepsilon\sin\frac{\pi x}{a} & 0<x<a\end{cases}$$

其中ε为小量，试用微扰方法计算能量的一级修正。（25 分）

（已知公式：$2\sin\alpha\cdot con\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$）

4、设$\hat{S}=\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$是电子自旋算符，$x_{\pm\frac{1}{2}}$是自旋$(\hat{S}_Z)$分量的本征函数。

（1）写出三个泡利矩阵；　　（2）求证：$\hat{S}_x x_{\frac{1}{2}}=\frac{\hbar}{2}x_{-\frac{1}{2}}$，$\hat{S}_y x_{\frac{1}{2}}=\frac{i\hbar}{2}x_{-\frac{1}{2}}$；

（3）在$x_{\frac{1}{2}}$态下，求S_x的平均值。（25 分）

请注意:全部答案必须写在答题纸上，否则不给分。

5、（1）设 $\hat{L}_{\pm}=\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$，求证：$[\hat{L}_+,\hat{L}_-]=2\hbar\hat{L}_z$，$[\hat{L}_z,\hat{L}_{\pm}]=\pm\hbar\hat{L}_{\pm}$。

（2）在（L^2，L_Z）表象中，取 $l=1$ 三个基矢为：$\varphi_1=Y_{11}(\theta,\varphi),\varphi_2=Y_{10}(\theta,\varphi),\varphi_3=Y_{1-1}(\theta,\varphi)$。

利用 $\hat{L}_x=\dfrac{1}{2}(\hat{L}_++\hat{L}_-)$，求 $\hat{L}_x$ 矩阵表示。（已知 $\hat{L}_{\pm}Y_{lm}=\sqrt{(l\mp m)(l\pm m+1)}\hbar Y_{lm\pm1}$）（25 分）

6、在一维无限深势阱（势阱位置从 0-a）中有二个电子，忽略之间相互作用。

（1）写出所有对称与反对称的二个电子总自旋波函数；

（2）求出这个体系最低二个能级的所有满足全同性原理的波函数（包括自旋部分），并讨论它们的能级简并度；

（3）若二个电子之间有一相互作用 $\hat{H}'=J\hat{s}_1\cdot\hat{s}_2$，其中 $\hat{s}_1,\hat{s}_2$ 分别是二个电子的自旋算符，J＞0，是常数、小量，则其最低二个能级又是多少？ （25 分）

温州大學

2008年硕士研究生招生入学考试试题A

科目代码及名称： 618，量子力学　　适用专业：凝聚态物理，理论物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1、已知 $\hat{A}$、$\hat{B}$ 是厄米算符，设 $\hat{K}_{\pm}=\hat{A}\pm i\hat{B}$，$\hat{D}=\hat{K}_{+}\hat{K}_{-}$。（30分）

（1）求证：a) $(K_{\pm})^{+}=\hat{K}_{\mp}$，　b) $\hat{D}$ 是厄米算符；

（2）若[$\hat{A}$，$\hat{B}$]=$i\hat{C}$，求：$[\hat{K}_{+},\hat{K}_{-}]$

（3）求证厄米算符 $\hat{F}$ 在某一表象的矩阵是厄米矩阵。

(4) 求证泡利算符满足关系式：$\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_x=0$，　$\sigma_x\sigma_y=i\sigma_z$

2、设质量为m的粒子处在半壁无限高势垒（25分）

$$V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<a\\ V_0 & x>a\end{cases}$$

中运动，考虑 $E<V_0(V_0>0)$，求粒子能量所满足关系式。

3、设质量为m粒子在一维势场中运动，其哈密顿算符为：$\hat{H}=\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+V(x)$。（20分）

求证：(1) $\frac{d\overline{x}}{dt}=\frac{\overline{p}_x}{m}$，　(2) $\frac{d\overline{p}_x}{dt}=-\overline{\frac{\partial V(x)}{\partial x}}=\overline{F_x}$

4、(1)（20分）a)、求一维谐振子基态的$\overline{x}$、$\overline{p}=?$；

b)、用测不准关系估计一维谐振子基态能量。

已知公式：$x\psi_n=\frac{1}{\alpha}[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}]$，$\frac{d}{dx}\psi_n=\alpha[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}-\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}]$

(2)（5分）在坐标表象里，处于势场为$V(\bar{r})$的粒子的能量本征方程为:

$[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}+V(\bar{r})]\psi(\bar{r})=E\psi(\bar{r})$。试写出在动量表象中的相应能量本征方程。

第 1 页，共 2 页

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

5．一粒子的哈密顿算符，在 Q 表象中的矩阵分别为：（25 分）

$$\hat{H}_0 = E_0\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\quad \hat{H}' = \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

其中 E_0 为正实数，$|\varepsilon| << E_0$，$\hat{H}'$ 为微扰。

（1） 忽略微扰，求出 $\hat{H}_0$ 的本征值与本征函数。

（2） 考虑微扰，求出基态的二级近似能量与一级近似波函数。

6、设有两个全同粒子，自旋都为 1/2，处在一维谐振子势阱：$V(x) = m\omega^2 x^2/2$ 中，（1）忽略二粒子间相互作用，求体系基态与第一激发态的能量和对应的符合全同原理的波函数（要考虑自旋部分）以及它的简并度。（2）若两个全同粒子自旋（$\hat{s}_1, \hat{s}_2$）有一个相互作用：$J\hat{s}_1 \cdot \hat{s}_2$，J＜0、小量，其结果又将如何？（25 分）

第 2 页，共 2 页

温州大學

2009 年硕士研究生入学考试试题 A

科目代码及名称：619 量子力学　　　适用专业：凝聚态物理，理论物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

（共七道题,第 1 题 30 分，其余 6 题，每题 20 分，共 150 分）

1、（30 分）问答题：

（1）写出微观粒子波粒二象性的德布罗意关系式；（5 分）

（2）写出能量与时间的测不准关系表达式，由此说明为什么存在光谱的自然宽度。（10 分）

（3） 什么叫一维方势阱的共振透射，发生共振透射的条件是什么？（10 分）

（4） 全同粒子体系波函数有什么特点？（5 分）

2、(20 分) 对一维线性谐振子，求其 x, x^2 的平均值。

（已 知： $x|n\rangle = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}|n-1\rangle + \sqrt{\frac{n+1}{2}}|n+1\rangle\right)$ ）

3、(20 分) 求出如下对易关系：

$$[\hat{L}_x,\ \hat{p}_y],\ [\hat{L}^2, \vec{r}\cdot\vec{p}],\ [\hat{p}_x, x^2],\ [x, e^{-\beta\hat{p}_x}]。$$

4、(20 分) 在 t=0 时，自由粒子状态为 $\psi(x,0) = A\left(\sin kx + \sin^2 kx\right)$，求:

（1） t>0 时的波函数 $\psi(x,t)$；

（2） t>0 时的自由粒子的动量可能值、相应几率与动能平均值。

5.（20 分）设氢原子的状态是 $\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}R_{21}Y_{11} \\ CR_{20}Y_{00} \end{pmatrix}$，　试求：

（1）归一化系数 C;

（2）能量 E、轨道角动量 L_z 分量、电子自旋 S_z 分量的平均值;

（3）电子自旋 S_x 分量的可能值与相应几率。

温州大學

2009 年硕士研究生入学考试试题 A

科目代码及名称：619　量子力学　　适用专业：凝聚态物理，理论物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

6、（20 分）一维无限深势阱（$0<x<a$）中的粒子受到微扰

$$H'(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2\lambda\dfrac{x}{a} & (0\le x<\dfrac{a}{2})\\ 2\lambda(1-\dfrac{x}{a}) & (\dfrac{a}{2}<x\le a)\\ 0 & x>a\end{cases}$$

的作用，λ 是一小常量，求基态能量的一级修正。

（已知公式：$\int x\cos px\,dx=\dfrac{x}{p}\sin px+\dfrac{1}{p^2}\cos px$）

7、（20 分）在自旋态下 $\chi_{\frac{1}{2}}(s_z)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，求 $\overline{\Delta s_x^2}$ 和 $\overline{\Delta s_y^2}$。

温州大學

2010 年硕士研究生招生入学考试试题

科目代码及名称： 619 量子力学 A　　适用专业：理论物理 凝聚态物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1. （20 分）请证明：$\left[AB,C\right]=A\left[B,C\right]+\left[A,C\right]B$；$\left[A,BC\right]=\left[A,B\right]C+B\left[A,C\right]$。

   若定义反对易式：$\left[A,B\right]_+=AB+BA$，请进一步证明：

   $$\left[AB,C\right]=A\left[B,C\right]_+-\left[A,C\right]_+B\text{；}\left[A,BC\right]=\left[A,B\right]_+C-B\left[A,C\right]_+\text{。}$$

2. （25 分）已知某一维运动微观粒子的波函数为：

$$\psi_n=\begin{cases}A\sin\dfrac{n\pi}{a}(x+a), & |x|<a\\ 0, & |x|\ge a\end{cases}$$

   求归一化常数 A。

3. （25 分）设一个处在宽度为 a 的无限深势阱中的微观粒子，其归一化的能量本征波函数为 $\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$，求：在能量表象中粒子坐标算符和动量算符的矩阵表示。（提示：任何力学量算符 $\hat{F}$ 的矩阵元是：$F_{mn}=\int_0^a\psi_m^*\hat{F}\psi_n\,dx$）

4. （30 分）已知 $\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$\hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix}$，$\hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 分别是三个 Pauli 算符在 $\hat{\sigma}_z$ 表象中的矩阵表示，请在 $\hat{\sigma}_z$ 表象中分别求出 $\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z$ 的本征值和归一化的本征态。

5. （25 分）一维谐振子的哈密顿算符为:

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

引入无量纲算符：$\hat{Q}=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$；$\hat{P}=\sqrt{\frac{1}{m\omega\hbar}}\hat{p}$；$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}+\mathrm{i}\hat{P}\right)$；$\hat{a}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{Q}-\mathrm{i}\hat{P}\right)$。

计算：（1）$\left[\hat{Q},\hat{P}\right]$，$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\right]$，$\left[\hat{a},\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right]$，$\left[\hat{a}^{\dagger},\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right]$；（2）将 $\hat{H}$ 用 $\hat{a}$ 与 $\hat{a}^{\dagger}$ 表示。

6. （25 分）设 t=0 时，粒子的状态为

$$\psi(x)=A[\sin^2 kx+\tfrac{1}{2}\cos kx]$$

已知与动量本征值 $p_k=k\hbar$ 相应的本征波函数为 $\phi_k=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$，求：（1）将 t=0 时粒子的状态波函数 $\psi(x)$ 表达为动量本征波函数的叠加形式；（2）求 t=0 时粒子的平均动量和平均动能。

温州大學

2011年硕士研究生入学考试试题

科目代码及名称： 619 量子力学A　　适用专业：理论物理　凝聚态物理

（请考生在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

1.（20分）简述题：

（1） 简述波函数$\psi(x,y,z,t)$的统计解释；

（2） 简述量子态叠加原理。

2.（30分）一维无限深势阱

$$U(x)=\begin{cases}\infty, & (x<0\text{ 或 }x>a)\\ 0, & (0\le x\le a)\end{cases}$$

中运动的粒子的能量本征函数为$\psi_n=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi x}{a} & (x<0\text{ 或 }x>a)\\ 0 & (0\le x\le a)\end{cases}$，**相应的能量本征值为**$E_n=\dfrac{\pi^2\hbar^2n^2}{2\mu a^2}(n=1,\ 2,\ \cdots)$**。若粒子初始状态的波函数为**$\psi(x)=A\cos\dfrac{\pi x}{a}\sin\dfrac{2\pi x}{a}$**，求：（1）归一化常数*A*；（2）粒子能量的可能取值；（3）粒子能量的平均值。**

3. （30分）已知角动量算符关系式 $\hat{l}^2=\hat{l}_x^2+\hat{l}_y^2+\hat{l}_z^2$，以及角动量各分量间的对易关系 $[\hat{l}_\alpha,\hat{l}_\beta]=\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}i\hbar\hat{l}_\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in\{x,y,z\}$，其中Levi-Civita符号$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$在下标为*xyz*时等于1，即$\varepsilon_{xyz}=1$，当任何两个相邻下标交换位置时改变正负号，例如：$\varepsilon_{xyz}=-\varepsilon_{xzy}$，有两个下标相同时为0，

例如：$\varepsilon_{xxz}=0$。请证明：$[\hat{\vec{l}}^{\,2},\hat{l}_\alpha]=0,\quad \alpha=x,y,z$。

4. （30分）一维线性谐振子的哈密顿算符可表示为 $\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$，

其本征方程为 $\hat{H}|n\rangle=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)|n\rangle=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle$， 其中产生算符 $\hat{a}^\dagger$ 与消灭算符 $\hat{a}$ 满足以下关系式：

$$[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1,\quad \hat{a}|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle,\quad \hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

且与坐标算符及动量算符之间满足如下关系：

$$\hat{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right),\quad \hat{p}=\frac{1}{i\sqrt{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)。$$

能量本征态之间满足正交归一性关系 $\langle n|n'\rangle=\delta_{nn'}$。

请计算以下算符矩阵元：

$$\langle n|\hat{H}|n'\rangle;\quad \langle n|\hat{x}|n'\rangle;\quad \langle n|\hat{x}^2|n'\rangle.$$

5. （20分）若函数 $f(x)$ 存在任意阶导数，则相应的算符函数可有以下泰勒展开式：

$$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}A^n$$

其中上标$^{(n)}$表示n阶导数。已知$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$，

$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, x\in(-\infty,\infty)$。请证明：

$$e^{i\lambda\sigma_z}=\cos\lambda+i\sigma_z\sin\lambda\quad(\lambda\text{为常数})$$

6. （20 分）角动量z分量算符为$\hat{l}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$，求$\hat{l}_z$的本征态和本征值（提示：体系的状态在绕$z$轴旋转$2\pi$后保持不变）。