湖南省永州市2025届高三上学期第一次模拟考试数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设 $A=\left\{x \mid x^2-4x-5=0\right\}, B=\left\{x \mid x^2=1\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $\{-1,1,5\}$　　B. $\{-1,1,-5\}$　　C. $\{-1\}$　　D. $\{1\}$

【答案】A

【解析】由 $x^2-4x-5=0$，得到 $x=5$ 或 $x=-1$，所以 $A=\{-1,5\}$，

又由 $x^2=1$，得到 $x=\pm1$，所以 $B=\{-1,1\}$，得到 $A\cup B=\{-1,1,5\}$，

故选：A.

2. 复数 $\dfrac{2}{\mathrm{i}-1}$ 的共轭复数是（　　）

A. $\mathrm{i}-1$　　B. $\mathrm{i}+1$　　C. $-1-\mathrm{i}$　　D. $1-\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】因为 $\dfrac{2}{\mathrm{i}-1}=\dfrac{2(-1-\mathrm{i})}{2}=-1-\mathrm{i}$ ，所以复数 $\dfrac{2}{\mathrm{i}-1}$ 的共轭复数是 $\mathrm{i}-1$.

故选：A.

3. 已知 $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线，则“向量 $\vec{a}+k\vec{b}$ 与 $\vec{a}-k\vec{b}$ 垂直”是“$k=\dfrac{3}{4}$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】若向量 $\vec{a}+k\vec{b}$ 与 $\vec{a}-k\vec{b}$ 垂直，

则 $\left(\vec{a}+k\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-k\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2-k\vec{a}\cdot\vec{b}+k\vec{a}\cdot\vec{b}-k^2\left|\vec{b}\right|^2=9-16k^2=0$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{4}$，

所以“向量 $\vec{a}+k\vec{b}$ 与 $\vec{a}-k\vec{b}$ 垂直”是“$k=\dfrac{3}{4}$”必要不充分条件，

故选：B.

4. 函数 $f(x)=x^2+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程是（　　）

A. $3x-y-2=0$　　B. $2x-y-2=0$

C. $3x+y-2=0$　　　　D. $2x+y-2=0$

【答案】A

【解析】由 $f\left(x\right)=x^{2}+\ln x$，得到 $f'\left(x\right)=2x+\frac{1}{x}$，所以 $f'\left(1\right)=2+1=3$，

所以 $f\left(x\right)=x^{2}+\ln x$ 在点 $\left(1,1\right)$ 处的切线方程是 $y-1=3(x-1)$，即 $3x-y-2=0$，

故选：A.

5. 已知函数 $f\left(x\right)=\cos 2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，则 $f\left(x\right)$ 的对称轴可以是（　　）

A. $x=\frac{\pi}{24}$　　　　B. $x=\frac{\pi}{12}$　　　　C. $x=\frac{\pi}{6}$　　　　D. $x=\frac{\pi}{3}$

【答案】D

【解析】因为函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期为 π，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{2\pi}=1$，则 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，

对比选项可知，只有当 $k=1$ 时，$x=\frac{\pi}{3}$，符合题意，故 D 正确；

故选：D.

6. 在 2024 年巴黎奥运会中，甲、乙、丙、丁、戊 5 人参与接待、引导和协助三类志愿者服务工作，每类工作必须有志愿者参加，每个志愿者只能参加一类工作，若甲只能参加接待工作，那么不同的志愿者分配方案的种数是（　　）

A. 38　　　　B. 42　　　　C. 50　　　　D. 56

【答案】C

【解析】如果参加接待工作只有一人，则只能为甲，

再把其余 4 人分组有两类情况：$1:3$ 和 $2:2$.

把 4 人按 $1:3$ 分组，有 C_4^3 种分组方法，按 $2:2$ 分组，有 $\frac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$ 种分组方法，

因此不同分组方法数为$C_4^3+\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}$，

再把两组人安排到其余两类志愿者服务工作，有A_2^2种方法，

所以不同分配方法种数是$\left(C_4^3+\dfrac{C_4^2C_2^2}{A_2^2}\right)A_2^2=(4+3)\times 2=14$.

如果参加接待工作有 2 人，则除了甲之外，还需要再安排一人有C_4^1种情况，

再把其余 3 人分组成$1:2$，有C_3^2种分组方法，

再把两组人安排到其余两类志愿者服务工作，有A_2^2种方法，

所以不同分配方法种数是$C_4^1C_3^2A_2^2=4\times 3\times 2=24$.

如果参加接待工作有 3 人，则除了甲之外，还需要再安排两人有C_4^2种情况，

再把其余 2 人安排到其余两类志愿者服务工作，有A_2^2种方法，

所以不同分配方法种数是$C_4^2A_2^2=6\times 2=12$.

综上，不同的志愿者分配方案的种数是$14+24+12=50$.

故选：C.

7. 已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}}\left(n\in \mathbf{N}^*\right)$，且$a_1=1,a_{2024}=\dfrac{2}{2025}$，则

$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=$（　　）

A. $\dfrac{n}{2n+1}$　　B. $\dfrac{n}{n+2}$　　C. $\dfrac{2n}{2n+1}$　　D. $\dfrac{2n}{n+2}$

【答案】D

【解析】因为$\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}}\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1=1-\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n}+\dfrac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=2$，

所以$\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}=\dfrac{2}{a_{n+1}}\Leftrightarrow \dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}$，

所以$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，公差$d=\dfrac{\dfrac{1}{a_{2024}}-\dfrac{1}{a_1}}{2024-1}=\dfrac{\dfrac{2025}{2}-1}{2023}=\dfrac{1}{2}$，首项$\dfrac{1}{a_1}=1$，

所以$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=1+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$，所以$a_n=\frac{2}{n+1}$，

所以$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=\frac{4}{(1+1)\times(2+1)}+\frac{4}{(2+1)\times(3+1)}+\cdots+\frac{4}{(n+1)\times(n+2)}$

$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2n}{n+2}$.

故选：D.

8. 已知函数$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b+\frac{x}{4}(a,b\in\mathbf{R})$为奇函数，且$f(x)$在区间$(m,m^2)$上有最小值，则实数$m$的取值范围是（　　）

A. $(\sqrt{3},3)$　　B. $(\sqrt{2},2)$　　C. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$　　D. $(2,3)$

【答案】A

【解析】因为$f(x)=\ln\left|a+\frac{1}{1-x}\right|+b+\frac{x}{4}(a,b\in\mathbf{R})$为奇函数，所以其定义域关于原点对称，

易知$x\neq1$，所以$x\neq-1$，即有$a+\frac{1}{1-(-1)}=0$，得到$a=-\frac{1}{2}$，

所以$f(x)=\ln\left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-x}\right|+b+\frac{x}{4}=\ln\left|\frac{x+1}{2(1-x)}\right|+b+\frac{x}{4}$，函数定义域为$\{x\mid x\neq-1$且$x\neq1\}$，

得到$f(0)=\ln\frac{1}{2}+b=0$，所以$b=\ln2$，

故$f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{2(1-x)}\right|+\ln2+\frac{x}{4}=\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|+\frac{x}{4}$，

有$f(-x)=\ln\left|\frac{-x+1}{1+x}\right|-\frac{x}{4}=-\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|-\frac{x}{4}=-f(x)$，即$a=-\frac{1}{2}$，$b=\ln2$满足题意，

所以$f(x)=\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|+\frac{x}{4}=\ln|1+x|-\ln|1-x|+\frac{x}{4}$，定义域为$\{x\mid x\neq-1$且$x\neq1\}$，

又$m^2>0$，所以$m>1$或$0<m^2<1$，

当$0 < m^2 < 1$，即$-1 < m < 0$或$0 < m < 1$，$x \in (m, m^2)$时，

$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x) + \frac{x}{4}$，

此时$f(x) = \ln(x+1) - \ln(1-x) + \frac{x}{4}$在$(m, m^2)$上单调递增，不合题意，

当$m > 1$，$x \in (m, m^2)$时，$f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) + \frac{x}{4}$，

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{4} = \frac{x^2 - 9}{4(x^2-1)}$，

由$f'(x) = \frac{x^2-9}{4(x^2-1)} = 0$，得到$x = 3$或$-3$（舍去），

又$f(x)$在区间(m, m^2)上有最小值，所以$1 < m < 3 < m^2$，解得$\sqrt{3} < m < 3$，

此时$f(x)$在区间$(m, 3)$上单调递减，在区间$(3, m^2)$上单调递增，满足题意，

故选：A.

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知A, B, C为随机事件，$P(A) = 0.5, P(B) = 0.4$，则下列说法正确的有（　　）

A. 若A, B相互独立，则$P(AB) = 0.2$

B. 若A, B相互独立，则$P(A \cup B) = 0.9$

C. 若A, B, C两两独立，则$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

D. 若B, C互斥，则$P(B \cup C | A) = P(B|A) + P(C|A)$

【答案】AD

【解析】对于 A，若A, B相互独立，则$P(AB) = P(A)P(B) = 0.5 \times 0.4 = 0.2$，故 A 正确；

对于 B，若A, B相互独立，则

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7$，故 B 错误；

对于C，若A,B,C两两独立，由独立事件的乘法公式得，$P(AB)=P(A)P(B)$，

$P(AC)=P(A)P(C)$，

$P(BC)=P(B)P(C)$，无法确定$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，故C错误；

对于D，若B,C互斥，则$P(BC)=0$，$P((B+C)A)=P(BA)+P(AC)$，

两边同时除以$P(A)$得，$\dfrac{P((B+C)A)}{P(A)}=\dfrac{P(BA)}{P(A)}+\dfrac{P(AC)}{P(A)}$，

即$P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$，故D正确；

故选：AD．

10．已知点$A(-2,0),B(1,0)$，圆$C:x^2+y^2-4x=0$，则（　　）

A．圆$M:x^2+(y-1)^2=1$与圆C公共弦所在直线的方程为$3x-y=0$

B．直线$y=k(x-3)$与圆C总有两个交点

C．圆C上任意一点M都有$|MA|=2|MB|$

D．b是a,c的等差中项，直线$l:ax+2by+c=0$与圆C交于P,Q两点，当$|PQ|$最小时，l的方程为$x+y=0$

【答案】BCD

【解析】对于A:两圆方程相减可得公共弦所在直线的方程：$y=2x$；错误；

对于B：$y=k(x-3)$过定点$(3,0)$，而$(3,0)$在圆$C:x^2+y^2-4x=0$的内部，所以直线$y=k(x-3)$与圆C总有两个交点，正确；

对于C:设$M\ (x,y)$，由$|MA|=2|MB|$可得：$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$化简可得：$x^2+y^2-4x=0$，所以满足条件的$M$轨迹就是圆$C$，正确；

对于D：因为b是a,c的等差中项，所以$2b=a+c$（不同时为0）

所以$l:ax+2by+c=0$可化为$ax+(a+c)y+c=0$，即$a(x+y)+c(y+1)=0$，

可令$\begin{cases}x+y=0\\y+1=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$，则直线$l$过定点$N\left(1,-1\right)$，

设$\left(x-4\right)^2+y^2=12$的圆心为$C$，

当CN与直线l垂直时，$\left|PQ\right|$最小，此时$k_{CN}\times k_l=-1$，

即$\frac{0+1}{2-1}\times k_l=-1$，得$k_l=-1$，结合$ax+\left(a+c\right)y+c=0$，

所以$k_l=-\frac{a}{a+c}=-1$，解得$c=0$，

$\therefore$直线l的方程为$x+y=0$.正确，

故选：BCD.

11. 在边长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N,P分别为棱AB,CC_1,C_1D_1的中点，O_1为正方形$A_1B_1C_1D_1$的中心，动点$Q\in$平面MNP，则（　　）

A. 正方体被平面MNP截得的截面面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

B. 若$\left|DQ\right|=\left|AB\right|$，则点$Q$的轨迹长度为$2\pi$

C. 若$\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{KB_1}$，则$\left|B_1Q\right|+\left|KQ\right|$的最小值为$\frac{\sqrt{22}}{3}$

D. 将正方体的上底面$A_1B_1C_1D_1$绕点O_1旋转$45°$，对应连接上、下底面各顶点，得到一个侧面均为三角形的十面体，则该十面体的体积为$\frac{2+\sqrt{2}}{3}$

【答案】ACD

【解析】对于 A，连接NP并延长，与DC,DD_1所在直线交于点E,F，连接EM，交BC于点H，交直线DA于点G，连接GF，交AA_1,A_1D_1于点I,J，连接PJ,HN,MI，如图所示，则正方体被平面MNP截得的截面为六边形$MHNPJI$，

连接A_1B,CD_1，则$A_1B//CD_1$，

因为$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，所以平面$ABB_1A_1//$平面DCC_1D_1，

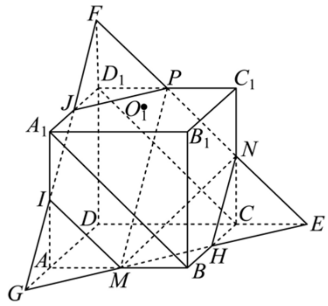
又平面$EFG\cap$平面$ABB_1A_1=IM$，平面$EFG\cap$平面$DCC_1D_1=PN$，

所以$PN//IM$，又N,P分别为棱CC_1,C_1D_1的中点，所以$PN//CD_1$，

所以$IM//A_1B$，则点I为AA_1中点，$IM=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

同理可得，$PN=PJ=JI=MI=MH=HN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以六边形$MHNPJI$为正六边形，则$S_{MHNPJI}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，故A正确；



对于B，由A可知，平面MNP即为平面$MHNPJI$，

以D为原点，分别以DA,DC,DD_1所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系，连接

MP，取MP中点O_2，连接DO_2,O_2Q，如图所示，

则$D(0,0,0),M\left(1,\frac{1}{2},0\right),H\left(\frac{1}{2},1,0\right),N\left(0,1,\frac{1}{2}\right),P\left(0,\frac{1}{2},1\right)$，$O_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{MH}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right),\overrightarrow{HN}=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{DO_2}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

设平面MNP的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

因为$\begin{cases}\overrightarrow{MH}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{HN}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，所以$\begin{cases}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=0\\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，令$x=1$，则$\vec{n}=(1,1,1)$，

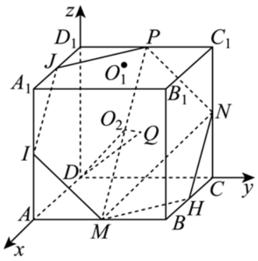
因为$\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DO_2}$，所以$\vec{n}//\overrightarrow{DO_2}$，所以$DO_2\perp$平面$MNP$，

又$QO_2\subset$平面MNP，所以$DO_2\perp QO_2$，

因为$\left|\overrightarrow{DO_2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\left|\overrightarrow{DQ}\right|=1$，

所以$\left|QO_2\right|=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，

所以点Q的轨迹为以O_2为圆心半径为$\frac{1}{2}$的圆，点Q的轨迹长度为$2\times\pi\times\frac{1}{2}=\pi$，故 B 错误；

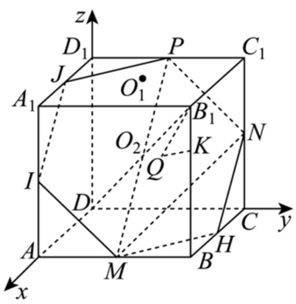


对于 C，因为$\overrightarrow{BK}=2\overrightarrow{KB_1}$，所以$K$为$BB_1$靠近$B_1$的三等分点，则$K\left(1,1,\frac{2}{3}\right)$，

连接B_1O_2，由$B_1\left(1,1,1\right)$，$O_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，得$\overrightarrow{O_2B_1}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{O_2B_1}=\overrightarrow{DO_2}$，所以$B_1$关于平面$MNP$的对称点为点$D$，

所以$\left|B_1Q\right|+\left|KQ\right|\geq\left|DK\right|=\sqrt{1^2+1^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{22}}{3}$，故 C 正确；

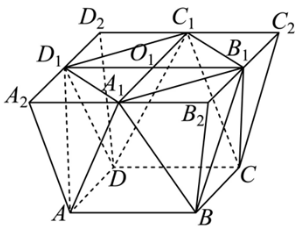


对于 D，如图所示，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$即为侧面均为三角形的十面体，在平面$A_1B_1C_1D_1$，以A_1C_1,B_1D_1为对角线作正方形$A_2B_2C_2D_2$，连接AA_2,BB_2,CC_2,DD_2，则$ABCD-A_2B_2C_2D_2$是上底和下底都是正方形的四棱台，底面边长为$\sqrt{2}$和 1，高为 1，

所以$V_{ABCD-A_2B_2C_2D_2}=\frac{1}{3}\times1\times\left(2+1+\sqrt{1\times2}\right)=\frac{3+\sqrt{2}}{3}$，

因为$V_{A-A_1A_2D_1}=V_{B-B_1B_2A_1}=V_{C-C_1C_2B_1}=V_{D-D_1D_2C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\times1=\frac{1}{12}$，

所以$V_{十面体}=V_{ABCD-A_2B_2C_2D_2}-4V_{A-A_1A_2D_1}=\frac{3+\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2+\sqrt{2}}{3}$，故 D 正确；



故选：ACD．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12. 在$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中，各项系数之和为$64$，则展开式中的常数项为__________.

【答案】15

【解析】$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^n$的展开式各项系数和为$2^n=64$，得$n=6$，

所以，$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式通项为$T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r\cdot\left(\sqrt{x}\right)^{6-r}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^r=\mathrm{C}_6^r\cdot x^{\frac{6-3r}{2}}$，

令$\frac{6-3r}{2}=0$，得$r=2$，因此，展开式中的常数项为$\mathrm{C}_6^2=15$.

13. 已知α,β为锐角，且$\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3},\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta=2-\sqrt{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\beta\right)=$

______.

【答案】$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【解析】因$\alpha+2\beta=\frac{2\pi}{3}$，得到$\alpha=\frac{2\pi}{3}-2\beta$，又$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\beta=2-\sqrt{3}$，

所以$\tan(\frac{\pi}{3}-\beta)\tan\beta=\frac{(\sqrt{3}-\tan\beta)\tan\beta}{1+\sqrt{3}\tan\beta}=2-\sqrt{3}$，

整理得到$\tan^2\beta+(\sqrt{3}-3)\tan\beta+2-\sqrt{3}=0$，

解得$\tan\beta=1$或$\tan\beta=2-\sqrt{3}<0$，又α,β为锐角，所以$\tan\beta=2-\sqrt{3}$不合题意，

由$\tan\beta=1$，得到$\beta=\frac{\pi}{4}$，$\alpha=\frac{\pi}{6}$，

所以$\sin\left(2\alpha+\beta\right)=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

14. 已知双曲线$C:x^2-\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2，双曲线C上的点P在x轴上方，若$\angle PF_2F_1$的平分线交PF_1于点A，且点A在以坐标原点O为圆心，$\left|OF_1\right|$为半径的圆上，则直线PF_2的斜率为______.

【答案】$-\frac{\sqrt{15}}{7}$或$3\sqrt{7}$

【解析】依题意，$F_1(-2,0),F_2(2,0)$，

当点P在第一象限时，令$|PF_2|=m$，则$|PF_1|=2+m$，由F_2A平分$\angle PF_2F_1$，

得$\frac{|PA|}{|F_1A|}=\frac{S_{\triangle PAF_2}}{S_{\triangle F_1AF_2}}=\frac{\frac{1}{2}|PF_2||AF_2|\sin\angle PF_2A}{\frac{1}{2}|F_1F_2||AF_2|\sin\angle F_1F_2A}=\frac{m}{4}$，

则$|PA|=\frac{m(2+m)}{4+m},|F_1A|=\frac{4(2+m)}{4+m}$，

由点A在以坐标原点O为圆心，$\left|OF_1\right|$为半径的圆上，得$AF_2\perp PF_1$，

即$|F_1F_2|^2-|F_1A|^2=|PF_2|^2-|PA|^2$，代入整理得$(4+m)(4-m)=\frac{(4-m)(2+m)^2}{4+m}$，解得$m=4$，

当点P在第二象限时，令$|PF_2|=t$，则$|PF_1|=t-2$，由F_2A平分$\angle PF_2F_1$，

同理$|PA|=\frac{t(t-2)}{4+t},|F_1A|=\frac{4(t-2)}{4+t}$，又$AF_2\perp PF_1$，

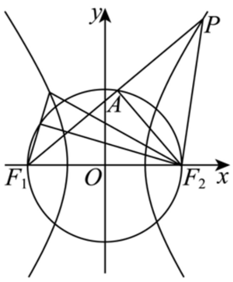
则$|F_1F_2|^2-|F_1A|^2=|PF_2|^2-|PA|^2$，

代入整理得 $(4+t)(4-t)=\dfrac{(4-t)(t-2)^2}{4+t}$，解得 $t=4$，

因此 $|PF_2|=4$，设 $P(x_0,y_0),y_0>0$，

则 $\begin{cases}3x_0^2-y_0^2=3\\(x_0-2)^2+y_0^2=16\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{5}{2}\\y_0=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\dfrac{3}{2}\\y_0=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\end{cases}$，

所以直线 PF_2 的斜率 $k=\dfrac{y_0}{x_0-2}=3\sqrt{7}$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{15}}{7}$.



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 记$\triangle ABC$的内角 A,B,C 的对边分别为a,b,c，已知$(b+c)(\sin B-\sin C)=(b-a)\sin A$.

（1）求C；

（2）若$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2},c=\sqrt{7}$，求$a+b$.

解：（1）由正弦定理得，$b^2-c^2=ab-a^2$，即$b^2+a^2-c^2=ab$，

由余弦定理得，$\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

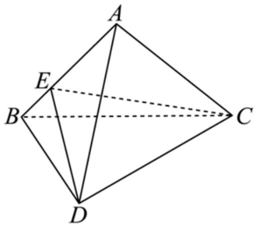
又$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）因为$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即$ab=6$，

由$c=\sqrt{7}$，则$\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}=\dfrac{b^2+a^2-7}{12}=\dfrac{1}{2}$，即$b^2+a^2=13$，

所以$b^2+a^2+2ab=\left(a+b\right)^2=13+2ab=13+12=25$，即$a+b=5$.

16. 如图，在三棱锥$A-BCD$中，$AB=AC=3\sqrt{2},BD=CD=2\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{6}$，点$E$在棱$AB$上，且$AE=2EB,DE\perp AB$.



（1）证明：平面$ABC\perp$平面BCD；

（2）求平面BCD与平面ECD的夹角的余弦值.

（1）证明：如图，取BC中点O，连接AO,DO，

因$AB=AC=3\sqrt{2},BD=CD=2\sqrt{3}$，所以$AO\perp BC,DO\perp BC$，

又$BC=2\sqrt{6}$，所以$\left|AO\right|=\sqrt{18-6}=2\sqrt{3}$，$\left|DO\right|=\sqrt{12-6}=\sqrt{6}$，

又$\left|AE\right|=2\left|EB\right|$，所以$\left|BE\right|=\dfrac{1}{3}\left|AB\right|=\sqrt{2}$，$\left|AE\right|=\dfrac{2}{3}\left|AB\right|=2\sqrt{2}$，

又$DE\perp AB$，所以$\left|DE\right|^2=\left|BD\right|^2-\left|BE\right|^2=12-2=10$，

$\left|AD\right|^2=\left|DE\right|^2+\left|EA\right|^2=10+8=18$，

所以$\left|AO\right|^2+\left|DO\right|^2=\left|AD\right|^2$，即$AO\perp OD$，

又$AO\perp BC$，$OD\cap BC=O,OD,BC\subset$面BCD，

所以$AO\perp$面BCD，又$AO\subset$面ABC，所以平面$ABC\perp$平面BCD.

（2）解：过E作$EH//AO$交BC于H，过H作$HN\perp DC$于N，连接EN,HD，

由（1）知$AO\perp$面BCD，所以$EH\perp$面BCD，

则$\angle ENH$为平面BCD与平面ECD的夹角，

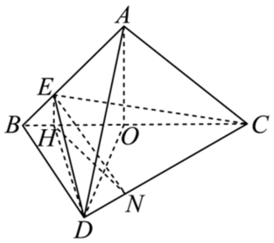
因为$\left|BE\right|=\dfrac{1}{3}\left|AB\right|$，$\left|AO\right|=2\sqrt{3}$，所以$\left|EH\right|=\dfrac{1}{3}\left|AO\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，又$\left|DO\right|=\sqrt{6}$，

易知$\left|BH\right|=\dfrac{1}{6}\left|BC\right|$，所以$S_{\triangle HDC}=\dfrac{5}{6}S_{\triangle BDC}$，得到$\dfrac{1}{2}\times\left|DC\right|\cdot\left|HN\right|=\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{2}\times\left|BC\right|\cdot\left|OD\right|$，

即$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\left|HN\right|=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times\sqrt{6}$，解得$\left|HN\right|=\frac{5\sqrt{3}}{3}$，

所以$\left|EN\right|=\sqrt{\left|EH\right|^2+\left|HN\right|^2}=\sqrt{\frac{25}{3}+\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{29}{3}}$，

在$\mathrm{Rt}\triangle EHN$中，$\cos\angle ENH=\frac{\left|HN\right|}{\left|EN\right|}=\frac{\frac{5\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{29}{3}}}=\frac{5\sqrt{29}}{29}$.



17. 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的短轴长为$2\sqrt{3}$，右焦点为$F\left(1,0\right)$.

（1）求椭圆E的标准方程;

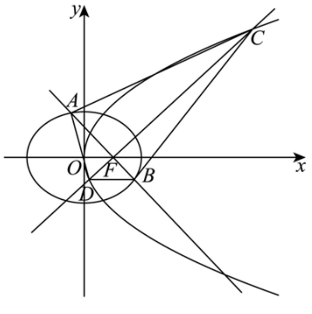
（2）已知过点F的直线l_1与椭圆E交于A,B两点，过点F且与l_1垂直的直线l_2与抛物线$y^2=4x$交于C、D两点，求四边形$ACBD$的面积S的取值范围.

解:（1）依题意可得：椭圆右焦点$F\left(1,0\right)$，且$2b=2\sqrt{3}$，即$b=\sqrt{3}$.

又因为$a^2-b^2=1$，所以$a=2$，

故椭圆E的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）显然直线l_2的斜率不为 0，设直线l_2的方程为$x=my+1$，$C\left(x_1,y_1\right),D\left(x_2,y_2\right)$.



联立$\begin{cases}x=my+1\\y^2=4x\end{cases}$，消去$x$，整理得$y^2-4my-4=0$，$\Delta>0$，

所以 $y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$，

所以 $|CD|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(m^2+1)$.

由垂直关系可设直线 l_1 的方程为 $y=-mx+m$，设 $A(x_3,y_3)$，$B(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases}y=-mx+m\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$，消去 y，整理得 $(3+4m^2)x^2-8m^2x+4(m^2-3)=0$，$\Delta'>0$，

则根据根与系数的关系，得 $x_3+x_4=\dfrac{8m^2}{3+4m^2},x_3x_4=\dfrac{4(m^2-3)}{3+4m^2}$，

所以 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\dfrac{12(m^2+1)}{4m^2+3}$，

所以 $S_{四边形ACBD}=\dfrac{1}{2}|CD|\cdot|AB|=\dfrac{1}{2}\times4(m^2+1)\times\dfrac{12(m^2+1)}{4m^2+3}=\dfrac{24(m^2+1)^2}{4m^2+3}$，

设 $4m^2+3=t(t\geq3)$，则 $S_{四边形ACBD}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{t^2+2t+1}{t}=\dfrac{3}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}+2\right)$，

因为 $y=t+\dfrac{1}{t}+2$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $S_{四边形ACBD}\geq\dfrac{3}{2}\times\left(3+\dfrac{1}{3}+2\right)=8$，

所以四边形 $ACBD$ 的面积 S 的取值范围为 $[8,+\infty)$.

18. 已知函数，$f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{2-ax}+1$，$g(x)=(x+1)^{ax}\mathrm{e}^{2+(1-a)x}+1$.

（1）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值；

（2）当 $a<0$ 时，讨论 $f(x)$ 零点个数；

（3）当 $x\geq0$ 时，$f(x)\geq g(x)$，求实数 a 的取值范围.

解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=(x+1)\mathrm{e}^{2-x}+1$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{2-x}-(x+1)\mathrm{e}^{2-x}=-x\mathrm{e}^{2-x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，

所以$f\left(x\right)$有极大值$f(0)=\mathrm{e}^2+1$，无极小值.

（2）$f'(x)=\mathrm{e}^{2-ax}-a\left(x+1\right)\mathrm{e}^{2-ax}=\mathrm{e}^{2-ax}\left(-ax-a+1\right)$，

令$f'(x)=0$，则$x=\dfrac{1-a}{a}$，因为$a<0$，所以$-a>0$，$\dfrac{1-a}{a}<0$ ∞

当$x\in\left(-\infty,\dfrac{1-a}{a}\right)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$\left(-\infty,\dfrac{1-a}{a}\right)$上单调递减，

当$x\in\left(\dfrac{1-a}{a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$\left(\dfrac{1-a}{a},+\infty\right)$上单调递增，

所以$f(x)\geq f(\dfrac{1-a}{a})=\left(\dfrac{1-a}{a}+1\right)\mathrm{e}^{2-a\frac{1-a}{a}}+1=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{1+a}+1$，

设$h(a)=\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{1+a}+1,a<0$，则$h'(a)=-\dfrac{1}{a^2}\mathrm{e}^{1+a}+\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{1+a}=\mathrm{e}^{1+a}\dfrac{a-1}{a^2}$，

因为$a<0$，所以$h'(a)<0$，所以$h(a)$在$\left(-\infty,0\right)$单调递减，

又因为$h(-1)=0$，

所以当$a<-1$时，$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{1+a}+1>0$，则$f(x)>0$，无零点；

当$a=-1$时，$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{1+a}+1=0$，$f(x)$有 1 个零点，

当$-1<a<0$时，$\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{1+a}+1<0$，又$f\left(0\right)=\mathrm{e}^2+1>0$，当$x\to-\infty$时，$f\left(x\right)\to1$，

$f(x)$有 2 个零点.

（3）$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)\Leftrightarrow\left(x+1\right)\mathrm{e}^{2-ax}+1\geq(x+1)^{ax}\mathrm{e}^{2+(1-a)x}+1$

$\Leftrightarrow\left(x+1\right)\mathrm{e}^{2-ax}\geq(x+1)^{ax}\mathrm{e}^{2+(1-a)x}$，

因为$x\geq0$时，$x+1\geq1,\mathrm{e}^{2-ax}>0$，

所以$f\left(x\right)\geq g\left(x\right)\Leftrightarrow1\geq(x+1)^{ax-1}\mathrm{e}^x\Leftrightarrow\mathrm{e}^{-x}\geq(x+1)^{ax-1}$，

两边同时取自然对数得，$-x\geq\left(ax-1\right)\ln\left(x+1\right)$，

当$x=0$时，$0\ge 0$成立，

当$x>0$时，$\ln\left(x+1\right)>0$，则$-x\ge\left(ax-1\right)\ln\left(x+1\right)\Leftrightarrow\dfrac{-1}{\ln\left(x+1\right)}+\dfrac{1}{x}\ge a$，

设$m(x)=\dfrac{-1}{\ln\left(x+1\right)}+\dfrac{1}{x},x>0$，

则$m'(x)=\dfrac{1}{\ln^2\left(x+1\right)}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-\left(x+1\right)\ln^2\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)\ln^2\left(x+1\right)}$，

设$n(x)=x^2-\left(x+1\right)\ln^2\left(x+1\right),x>0$，

则$n'(x)=2x-\ln^2\left(x+1\right)-\left(x+1\right)\cdot 2\cdot\ln\left(x+1\right)\cdot\dfrac{1}{x+1}=2x-\ln^2\left(x+1\right)-2\ln\left(x+1\right)$，

设$p(x)=2x-\ln^2\left(x+1\right)-2\ln\left(x+1\right),x>0$，

则$p'(x)=2-2\ln\left(x+1\right)\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x-2\ln\left(x+1\right)}{x+1}$，

设$k\left(x\right)=2x-2\ln\left(x+1\right),x>0$，

则$k'\left(x\right)=2-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{2x}{x+1}>0$，所以$k\left(x\right)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$k\left(0\right)=2\times 0-2\ln\left(0+1\right)=0$，所以$k\left(x\right)>0$，

所以$p'\left(x\right)>0$，则$p\left(x\right)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$p(0)=2\times 0-\ln^2\left(0+1\right)-2\ln\left(0+1\right)=0$，所以$p\left(x\right)>0$，

所以$n'\left(x\right)>0$，则$n\left(x\right)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又$n(0)=0^2-\left(0+1\right)\ln^2\left(0+1\right)=0$，所以$n\left(x\right)>0$，

所以$m'\left(x\right)>0$，则$m\left(x\right)$在$(0,+\infty)$单调递增，

又当$x\to 0$时，$m\left(x\right)\to-\dfrac{1}{2}$，所以$m\left(x\right)>-\dfrac{1}{2}$，

所以$a\le-\dfrac{1}{2}$.

19. 将数字$1,2,3,4,\cdots,n$任意排成一列，如果数字$k\left(k=1,2,\cdots,n\right)$恰好在第$k$个位置上，则称有一个巧合，巧合的个数称为巧合数，记为X_n．例如$n=4$时，2，1，3，4 为可能的一个排列，此时$X_4=2$．$X_n=0$的排列称为全错位排列，并记数字$1,2,3,4,\cdots,n$的全错位排列种数为a_n．

（1）写出a_1,a_2,a_3的值，并求X_4的分布列；

（2）求$E\left(X_n\right)$；

（3）求a_n．

解：（1）由题可知，$n=1$时，只有 1 个数，不存在全错位排列，故$a_1=0$；

$n=2$时，有 2 个数 1，2，故$a_2=1$；

$n=3$时，有 3 个数 1,2,3，故$a_3=2$；

由题可知，X_4的可能取值有$0,1,2,4$，

当$X_4=0$时，$P\left(X_4=0\right)=\dfrac{9}{\mathrm{A}_4^4}=\dfrac{3}{8}$，

当$X_4=1$时，$P\left(X_4=1\right)=\dfrac{2\mathrm{C}_4^1}{\mathrm{A}_4^4}=\dfrac{1}{3}$，

当$X_4=2$时，$P\left(X_4=2\right)=\dfrac{\mathrm{C}_4^2}{\mathrm{A}_4^4}=\dfrac{1}{4}$，

当$X_4=4$时，$P\left(X_4=4\right)=\dfrac{1}{\mathrm{A}_4^4}=\dfrac{1}{24}$，

所以X_4的分布列如下．

X_4	0	1	2	4
P	$\dfrac{3}{8}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{24}$