§3　二倍角的三角函数（一）

复习回顾

两角和与差的正弦和余弦公式:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

以上公式中α和β能够取任意角.

两角和与差的正切公式:

$\alpha,\beta \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ 且 $\alpha\pm\beta \neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in z)$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta};$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}.$$

以上两个公式中，α和β 可取使两边都有意义的任意角.

学习目标

1. 能够导出二倍角的正弦、余弦、正切公式. （要点）

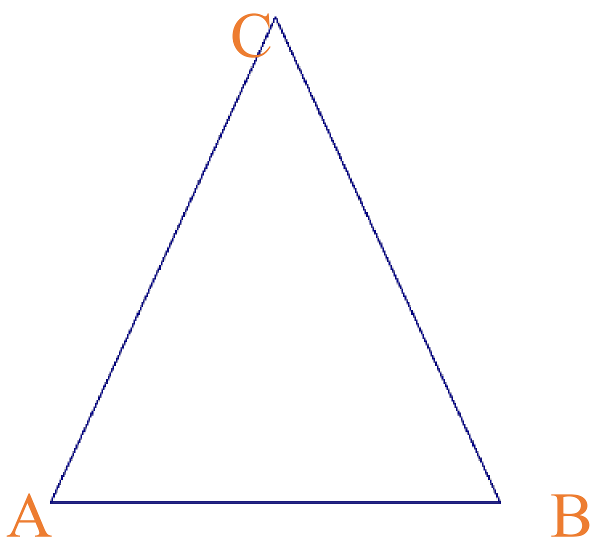
2. 掌握二倍角的正弦、余弦、正切公式. （要点）

3. 能灵活利用公式进行简朴三角函数的化简、求值和证明. （难点）

课堂探究

探究点　二倍角的三角函数

思考1 等腰三角形ABC的底角的余弦值是$\frac{3}{5}$，那么顶角的正弦值是多少?(如图)



解: 因为$\cos A=\frac{3}{5}$，得$\sin A=\frac{4}{5}$.

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin 2A=\sin(A+A)$

$=\sin A\cos A+\cos A\sin A$

$=2\sin A\cos A=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$.

思考2　两角和的正弦、余弦和正切公式都是恒等式，特别地，当$\beta=\alpha$时，这三个公式分别变为什么形式?

二倍角公式的推导：

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha$$

$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha + \alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha}$$

$$= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}.$$

利用 $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$，$\cos 2a$ 还可变为

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad ; \qquad S_{2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad C_{2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \qquad T_{2\alpha}$$

公式的特征与记忆：

1.左边角是右边角的二倍.

2.左边是2α的三角函数的一次式，右边是α的三角函数的二次式.

由左到右：升幂缩角；由右到左：降幂扩角.

3.二倍角的正弦是单项式，余弦是多项式，正切是分式.

练一练

填空：(1) $\sin 4\alpha = 2\sin\underline{2\alpha}\cos\underline{2\alpha}$;

(2) $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos^2\underline{\frac{\alpha}{4}} - \sin^2\underline{\frac{\alpha}{4}}$;

(3) $\cos\frac{\alpha}{3} = 2\underline{\cos^2\frac{\alpha}{6}} - 1$;

(4) $\tan 3\alpha = \dfrac{2\tan\underline{\frac{3\alpha}{2}}}{1-\tan^2\underline{\frac{3\alpha}{2}}}$.

提升总结：了解公式的推导措施

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\begin{matrix} S_{\alpha-\beta} \\ C_{\alpha-\beta} \end{matrix}} \arrow[d, "\text{作商}"'] & \begin{matrix} S_{\alpha+\beta} \\ C_{\alpha+\beta} \end{matrix} \arrow[l, "\text{以}-\beta\text{代}\beta"'] \arrow[r, "\beta=\alpha"] \arrow[d, "\text{作商}"'] & \boxed{\begin{matrix} S_{2\alpha} \\ C_{2\alpha} \end{matrix}} \arrow[d, "\text{作商}"'] \\
\boxed{T_{\alpha-\beta}} & \boxed{T_{\alpha+\beta}} \arrow[l, "\text{以}-\beta\text{代}\beta"'] \arrow[r, "\beta=\alpha"] & \boxed{T_{2\alpha}}
\end{tikzcd}
$$

有关公式的几种阐明：

1.公式 $S_{2\alpha}$和 $C_{2\alpha}$对任意角均成立，对于公式$T_{2\alpha}$

$$2\alpha \neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\alpha \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in Z).$$

2.等式中的“二倍角”的意义是相对的，如：

倍角公式不仅可运用于将2α作为α的2倍的情况，还可以运用于诸如将4α作为2α的2倍，将α作为$\frac{\alpha}{2}$的2倍，将$\frac{\alpha}{2}$作为$\frac{\alpha}{4}$的2倍，将3α作为$\frac{3\alpha}{2}$的2倍等情况.

3. 注意公式的多种变化，如：

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha; \quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha;$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\tan 2\alpha\left(1 - \tan^2\alpha\right) = 2\tan\alpha;$$

$$1 - \tan^2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{\tan 2\alpha}.$$

4. 注意公式的逆用：

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha; \quad \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha;$$

$$\frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = \tan 2\alpha; \quad 2\tan\alpha = \tan 2\alpha\left(1 - \tan^2\alpha\right).$$

典例精讲

例1　已知$\tan\alpha=\frac{1}{2}$，求$\tan 2\alpha$的值.

分析：直接代入二倍角的正切公式.

解　$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

例2　求下列各式的值：

(1) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.　(2) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$.

(3) $\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$.　(4) $1-2\sin^2 75^\circ$.

解 (1)原式 $=\frac{1}{2}(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ)=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$.

(2)原式 $=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)原式 $=\tan 45^\circ=1$

(4)原式 $=\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

点评：直接利用公式将已知角转化为特殊角求值.