

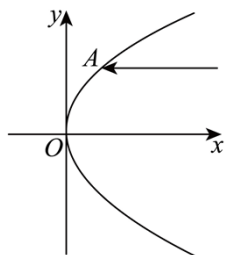
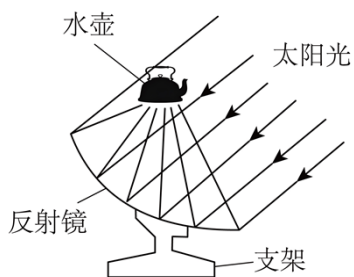
河南省郑州市中牟县第一高级中学 2024-2025 学年高二上学期

11 月月考数学试题

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

一、单选题

1. 双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  上一点  $P$  到该双曲线的一个焦点的距离为 7, 则点  $P$  到另一个焦点的距离是 ( )
- A. 13                      B. 15                      C. 1, 13                      D. 1, 15
2. 若向量  $\vec{a} = (1, \lambda, 1), \vec{b} = (2, -1, -2)$  且  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  的夹角余弦为  $\frac{\sqrt{2}}{6}$ , 则  $\lambda$  等于 ( )
- A. 2                      B.  $\sqrt{2}$                       C.  $-\sqrt{2}$  或  $\sqrt{2}$                       D.  $-\sqrt{2}$
3. 已知平面  $\alpha$  的一个法向量  $\vec{n} = (3, -1, \sqrt{6}), P(0, -x, 3)$  是平面  $\alpha$  内一点,  $Q(x^2, 3x, 3)$  是平面  $\alpha$  外一点, 则“ $x = 2$ ”是“点  $Q$  到平面  $\alpha$  的距离为 1”的 ( )
- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件
4. 已知  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 8x$  的焦点, 点  $M$  在  $C$  上, 且  $|MF| = 6$ , 则点  $M$  到  $y$  轴的距离为 ( )
- A. 6                      B. 5                      C. 4                      D.  $4\sqrt{2}$
5. 已知以坐标轴为对称轴, 原点为对称中心, 其中一条渐近线为  $y = \sqrt{3}x$ , 则此双曲线的离心率为 ( )
- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$                       B. 2                      C. 2 或  $\frac{\sqrt{6}}{2}$                       D. 2 或  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
6. 抛物线绕它的对称轴旋转所得到的曲面叫抛物面, 用于加热水和水壶食物的太阳灶应用了抛物线的光学性质: 一束平行于抛物线对称轴的光线, 经过抛物面的反射后, 集中于它的焦点. 已知一束平行于  $x$  轴的入射光线的一束光线与抛物线  $y^2 = 2px$  的交点为  $A(4, 4)$ , 则反射光线所在直线被抛物线截得的弦长为 ( )

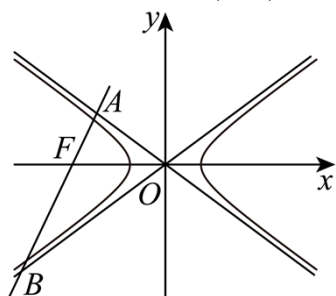


- A.  $\frac{27}{4}$       B.  $\frac{21}{4}$       C.  $\frac{25}{4}$       D.  $\frac{29}{4}$

7. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 从  $C$  上任意一点  $P$  向  $y$  轴作垂线段  $PP'$ ,  $P'$  为垂足, 则线段  $PP'$  的中点  $M$  的轨迹方程为 ( )

- A.  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq 0)$       B.  $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1 (x \neq 0)$   
 C.  $x^2 + y^2 = 4 (x \neq 0)$       D.  $x^2 + y^2 = 8 (x \neq 0)$

8. 如图, 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 过点  $F$  的直线  $l$  垂直于双曲线  $C$  的一条渐近线, 并分别交两条渐近线于  $A, B$  两点(其中点  $A$  为垂足), 且点  $A, B$  分别在第二、三象限内. 若  $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{3}{7}$ , 则双曲线  $C$  的渐近线方程为 ( )



- A.  $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}x$       B.  $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}x$   
 C.  $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$       D.  $y = \pm \frac{2\sqrt{10}}{5}x$

## 二、多选题

9. 已知方程  $C: (m-2)x^2 + (5-m)y^2 = 1$ , 则 ( )

- A. 当  $2 < m < 5$  时, 方程  $C$  表示椭圆  
 B. 当  $m > 5$  时, 方程  $C$  表示焦点在  $x$  轴上的双曲线  
 C. 存在  $m$ , 使得方程  $C$  表示两条直线  
 D. 存在  $m$ , 使得方程  $C$  表示抛物线

10. 下列给出的命题中正确的有 ( )

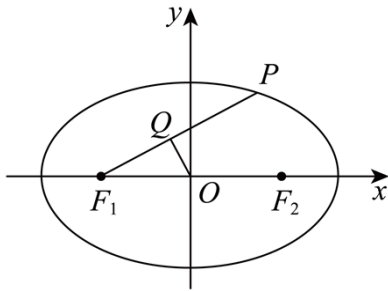
A. 若直线  $l_1: 2mx - y + 1 = 0$  与  $l_2: (m-1)x + my + 2 = 0$  互相垂直, 则实数  $m = 0$  或  $m = \frac{3}{2}$

B. 直线  $l$  经过点  $(1, 4)$ , 且点  $A(-2, 2), B(4, -2)$  到直线  $l$  的距离相等, 则直线  $l$  的方程为  $2x + 3y - 14 = 0$

C. 若圆  $(x-3)^2 + (y+5)^2 = r^2$  上有且只有两个点到直线  $4x - 3y = 2$  的距离为 1, 则  $4 < r < 6$ ;

D. 若直线  $y = x + b$  与圆  $x^2 + y^2 = 16$  交于  $A, B$  两点, 且  $|\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OA} - \vec{OB}|$  (其中  $O$  为坐标原点), 则实数  $b = \pm 4$

11. 如图所示. 已知椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ,  $F_1, F_2$  为左右焦点, 下列命题正确的是 ( )



A.  $P$  为椭圆上一点, 线段  $PF_1$  中点为  $Q$ , 则  $\frac{|PF_1| + 2|OQ|}{a}$  为定值

B. 直线  $y = kx$  与椭圆交于  $R, S$  两点,  $A$  是椭圆上异于  $R, S$  的点, 且  $k_{AR}, k_{AS}$  均存在, 则  $k_{AR} \cdot k_{AS} = 1 - e^2$

C. 若椭圆上存在一点  $M$  使  $\angle F_1 M F_2 = \frac{2\pi}{3}$ , 则椭圆离心率的取值范围是  $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$

D. 四边形  $ABCD$  为椭圆内接矩形, 则其面积最大值为  $2ab$

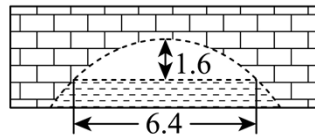
### 三、填空题

12. 已知圆  $C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$  与双曲线  $D: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线有公共点, 则双曲线  $D$  的离心率的取值范围为\_\_\_\_\_.

13. 已知点  $P$  是抛物线  $C: y^2 = 8x$  上任意一点, 则点  $P$  到直线  $2x - y + 2 = 0$  与到直线  $x = -2$

的距离之和的最小值是\_\_\_\_\_.

14. 如图, 赵州桥是一座位于河北省石家庄市赵县城南洺河之上的石拱桥, 因赵县古称赵州而得名. 赵州桥始建于隋代, 是世界上现存年代最久远、跨度最大、保存最完整的单孔石拱桥. 小明家附近的一座桥是仿赵州桥建造的抛物线形拱桥. 这座桥的拱顶离水面1.6m时, 水面宽6.4m, 当水面的宽度为8m时, 水面下降了\_\_\_\_\_m.



#### 四、解答题

15. 求适合下列条件的曲线的标准方程.

(1) 经过点  $\left(\frac{15}{4}, 3\right)$ , 且一条渐近线方程为  $4x + 3y = 0$  的双曲线;

(2) 两个焦点坐标分别为  $(-2, 0)$ ,  $(2, 0)$ , 并且经过点  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$  的椭圆;

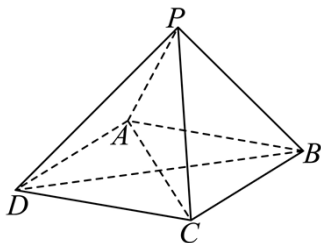
(3) 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ , 且抛物线上一点  $A(3, m)$  到焦点的距离为 5, 求抛物线的方程.

16. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 已知圆  $M$  的圆心在直线  $y = -2x$  上, 且圆  $M$  与直线  $x - y - 5 = 0$  相切于点  $P(2, -3)$ .

(1) 求圆  $M$  的方程;

(2) 过坐标原点  $O$  的直线  $l$  被圆  $M$  截得的弦长为  $\sqrt{6}$ , 求直线  $l$  的方程.

17. 如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 四边形  $ABCD$  为菱形,  $\angle ADC = 60^\circ$ ,  $PA \perp PC$ ,  $PD = AD = 2$ .



(1) 证明:  $BD \perp$  平面  $PAC$ ;

(2) 已知平面  $PAC$  与平面  $DPC$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{13}}{13}$ , 求  $PA$ .

18. 已知动点  $M(x, y)$  到直线  $x = -3$  的距离比它到定点  $(2, 0)$  的距离多 1

(1)求 $\Gamma$ 的方程;

(2)若过点 $D(4,4)$ 的直线 $l$ 与 $\Gamma$ 相交于 $A, B$ 两点,且 $OA \perp OB$ ,求直线 $l$ 的方程.

19. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点为 $A(-2,0), B(2,0)$ ,焦距为 $2\sqrt{3}$ . $O$ 为坐标原点,过点 $O, B$ 的圆 $G$ 交直线 $x=1$ 于 $M, N$ 两点,直线 $AM, AN$ 分别交椭圆 $E$ 于 $P, Q$ .

(1)求椭圆 $E$ 的方程;

(2)记直线 $AM, AN$ 的斜率分别为 $k_1, k_2$ ,求 $k_1 \cdot k_2$ 的值;

(3)证明:直线 $PQ$ 过定点,并求该定点坐标.



参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	A	C	D	C	C	B	BC	ACD
题号	11									
答案	ACD									

1. A

【分析】根据双曲线定义直接可得解.

【详解】由已知双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ , 可知  $a = 3$ ,  $2a = 6$ ,  $c = \sqrt{9+16} = 5$

设双曲线的两焦点分别为  $F_1, F_2$ ,

不妨设  $|PF_1| = 7$ ,

则  $\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = |7 - |PF_2|| = 2a = 6$ ,

解得  $|PF_2| = 1$  或  $|PF_2| = 13$ ,

又双曲线上的点到焦点的距离  $|PF_2| \geq c - a = 5 - 3 = 2$ ,

所以  $|PF_2| = 13$ ,

故选: A.

2. D

【分析】由向量夹角的余弦公式列出方程, 求出  $\lambda = -\sqrt{2}$ .

【详解】 $\cos \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(1, \lambda, 1) \cdot (2, -1, -2)}{\sqrt{1+\lambda^2+1} \cdot \sqrt{4+1+4}} = \frac{-\lambda}{3\sqrt{\lambda^2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ , 显然  $\lambda < 0$ ,

则  $\frac{-\lambda}{3\sqrt{\lambda^2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ , 两边平方后化简得  $2\lambda^2 = \lambda^2 + 2$ , 解得  $\lambda = -\sqrt{2}$ , 正值舍去.

故选: D

3. A

【分析】依题意先求得  $\vec{PQ}$ , 再利用点到平面的距离公式即可得解.

【详解】 $\vec{PQ} = (x^2, 4x, 0)$ , 若点  $Q$  到平面  $\alpha$  的距离为 1,

则  $\frac{|\vec{n} \cdot \vec{PQ}|}{|\vec{n}|} = \frac{|3x^2 - 4x|}{4} = 1$ , 解得  $x = 2$  或  $x = -\frac{2}{3}$ ,

故“ $x=2$ ”是“点 $Q$ 到平面 $\alpha$ 的距离为1”的充分不必要条件.

故选:A.

4. C

【分析】根据抛物线的定义求解.

【详解】由题意及抛物线定义, 点 $M$ 到 $C$ 的准线 $x=-2$ 的距离为6,

所以点 $M$ 到 $y$ 轴的距离为 $6-2=4$ .

故选: C.

5. D

【分析】分焦点在 $x$ 轴上和 $y$ 轴上讨论求解即可.

【详解】当焦点在 $x$ 轴上时, 可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ , 则 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2$ ;

当焦点在 $y$ 轴上时, 可得 $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ , 则 $e=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

综上, 双曲线的离心率为2或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

故选: D.

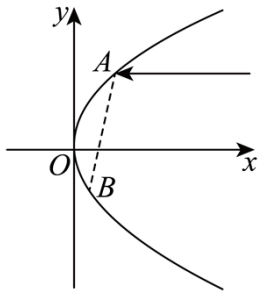
6. C

【分析】由题意可求得抛物线方程, 再根据光线的反射性质求出反射光线的方程, 即可求出反射光线与抛物线的交点坐标, 再利用两点间的距离公式即可求得结果.

【详解】因为点 $A(4,4)$ 在抛物线上, 所以 $16=8p$ , 解得 $p=2$ ,

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$ , 则焦点为 $F(1,0)$ ,

又因为反射光线经过点 $A(4,4)$ 及焦点 $F(1,0)$ ,  $k_{AB}=k_{AF}=\frac{4-0}{4-1}=\frac{4}{3}$ ,



所以反射光线 $AB$ 的方程为 $y=\frac{4}{3}(x-1)$ ,



联立抛物线方程得  $\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = \frac{4}{3}(x-1) \end{cases}$ , 解得  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = -1 \end{cases}$ ,

所以反射光线  $AB$  与抛物线的交点为  $B(\frac{1}{4}, -1)$ ,

由两点间距离公式可得  $|AB| = \sqrt{(4 - \frac{1}{4})^2 + (4 + 1)^2} = \frac{25}{4}$ ,

所以反射光线所在直线被抛物线截得的弦长为  $\frac{25}{4}$ .

故选: C.

7. C

【分析】由代入法即可求解.

【详解】设点  $M(x, y)$ , 根据中点的坐标公式可得  $P(2x, y)$ , 代入椭圆方程  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  得

$x^2 + y^2 = 4$ , 其中  $x \neq 0$ .

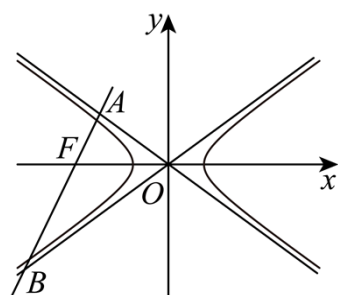
故选: C

8. B

【分析】先根据点到直线距离公式求得  $|FA| = b$ , 再由  $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{3}{7}$  用  $b$  表示出  $|FB|$ . 根据双曲线的渐近线方程及正切二倍角公式, 即可求得  $a$  与  $b$  的等量关系式, 进而求得双曲线的渐近线方程.

【详解】双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), 右焦点  $F(c, 0)$ , 渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

将渐近线方程化为一般式为  $bx \pm ay = 0, c^2 = a^2 + b^2$ ,



由点到直线距离公式可知  $|FA| = \frac{|bc|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b$ , 所以  $|OA| = a$ ,

根据题意  $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{3}{7}$ , 则  $|BF| = \frac{7b}{3}$ ,

设  $\angle AOF = \alpha$ , 由双曲线对称性可知  $\angle AOB = 2\alpha$ ,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/358104014061007005>