第3章 模糊逻辑

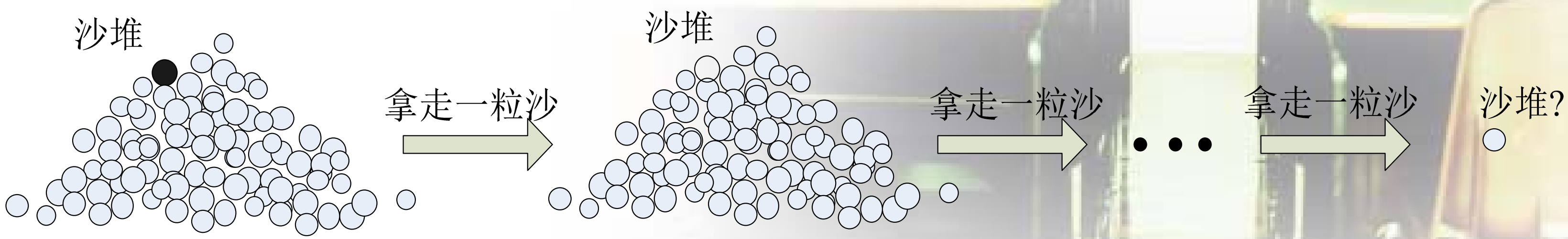
为什么需要模糊逻辑

❖ 著名的沙堆问题：

“从一个沙堆里拿走一粒沙子，这还是一个沙堆吗？”

是/否？

常识告诉我们应该回答“是”。然而，如果回答“是”，这样顺推下去就会掉入陷阱：从上次剩下的沙堆里再拿走一粒沙子，剩下的还是一个沙堆，那么，如此反复，直到只剩下两三粒沙子甚至没有一粒沙子时，这也还是一个沙堆了。



一粒沙子都没有也被称为沙堆，这显然有问题

为什么需要模糊逻辑

问题出在哪里？

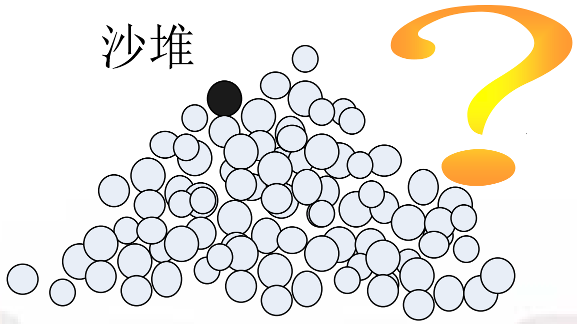
- 这里的问题就在于“沙堆”这个概念是模糊的，没有一个清晰的界限将“沙堆”与“非沙堆”分开。我们没有办法明确指出，在这个不断拿走沙子的过程中，什么时候“沙堆”不再是“沙堆”。

与“沙堆”相似的模糊概念还有“年轻人”、“小个子”、“大房子”等。
这种在生活中常见的模糊概念，在用传统数学方法处理时，
往往会出现问题。

为什么需要模糊逻辑

- 那么，如果尝试消除这些概念的模糊性，会怎样呢？

如果规定沙堆只能由10000粒以上的沙子组成，“沙堆”这个概念的模糊性就消除了。10000粒沙子组成的是沙堆，9999粒沙子组成的不是沙堆：这在数学上没有任何问题。



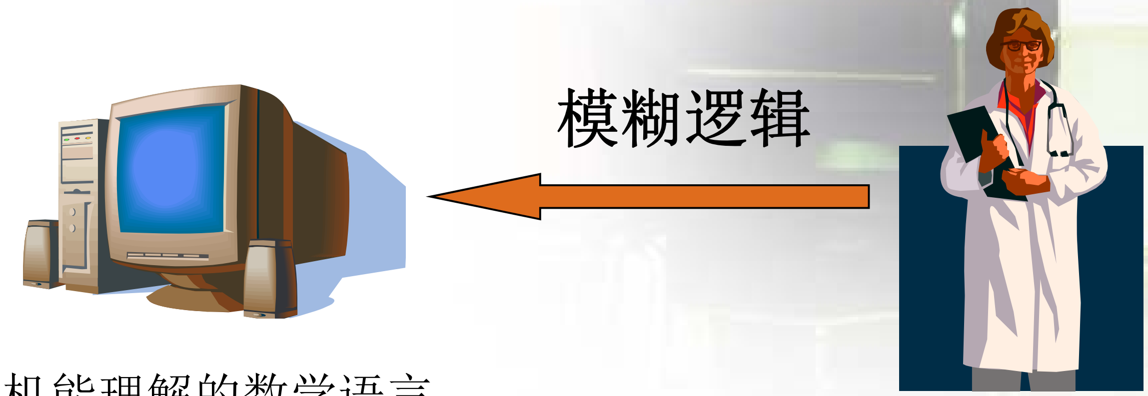
然而，仅仅取走微不足道的一粒沙子，
就将“沙堆”变为“非沙堆”，
这又不符合我们日常生活中的思维习惯

为什么需要模糊逻辑

- 在企图用数学处理生活中的问题时，精确的数学语言和模糊的思维习惯产生了**矛盾**。

传统的数学方法常常试图进行精确定义，而人关于真实世界中事物的概念往往是模糊的，没有精确的界限和定义。在处理一些问题时，精确性和有效性形成了矛盾，诉诸精确性的传统数学方法变得无效，而具有模糊性的人类思维却能轻易解决。例如人脸识别问题。

- 模糊逻辑就是用来解决这一矛盾的工具之一



计算机能理解的数学语言

自然语言

Motivation

- 一提到数学，人们自然会想到它是精确的(set)。然而精确数学却不能有效描述现实世界里普遍存在的模糊想象，如“好与坏”，“长与短”、“一大堆”，“一小撮”，“太冷”，“太热”，“物美价廉”，这些“量”在人们的头脑都有一个人们普遍接受的标准，利用这些模糊量非但没有影响人们的信息交流，反倒能便于理解与记忆。

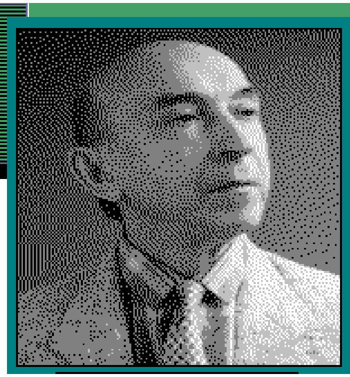
- 模糊逻辑是一种精确解决不精确、不完全信息的方法。模糊逻辑可以比较自然地处理人的概念，它是一种通过模仿人的思维方式来表示和分析不确定、不精确信息的方法和工具.

模糊逻辑发展历程

- 模糊逻辑的发展，是由理论准备到理论提出再到理论应用的过程

20世纪初 理论准备	20世纪70年代 模糊理论提出	20世纪70-80年代 模糊理论的应用	20世纪90年代 进一步发展
20世纪20年代，波兰数学家Lukasiewicz提出了多值逻辑。 1937年量子哲学家Max Black提出了不明确集合（vague set）。	美国加州大学伯克莱分校的L. Zadeh教授于1965年提出了模糊集合（fuzzy sets）[1]。 1973年又提出了模糊逻辑（fuzzy logic）[2]。	1974年，第一个模糊控制蒸汽引擎系统和第一个模糊交通指挥系统诞生。 1980年，丹麦的史密斯公司开始使用模糊控制操作水泥旋转窑。 1987年，模糊控制应用于仙台市地铁的自动驾驶。	1993年, 模糊理论的创始人L.Zadeh教授提出了软计算(Soft Computing)[3]

History



- Lotfi Zadeh（扎德 ）, at the University of California at Berkeley, first presented fuzzy logic in the mid-1960's.
- Zadeh developed fuzzy logic as a way of processing data. Instead of requiring a data element to be either a member or non-member of a set, he introduced the idea of partial set membership.(他首次提出fuzzy logical，引入部分属于的思想)

- 1965年发表关于模糊集合理论的论文。
- 1966年马里诺斯（Marinos）发表关于模糊逻辑的研究报告。
- 以后，扎德（L.A.Zadeh）又提出关于模糊语言变量的概念。
- 1974年扎德（L.A.Zadeh）进行有关模糊逻辑推理的研究。
- 扎德的重要贡献在于将模糊和数学统一在一起。

History

- 模糊理论起源于美国，但是它在美国却因为传统的习惯力量，发展并不顺利，同样在欧洲也受到一定程度的抵制。西方人喜欢在精确问题上钻牛角尖，偏好亚里斯多德的二元逻辑系统。东方人擅长兼蓄思维，西方人娴熟于分析推理，这种文化沉淀上的差异也可以从对模糊逻辑的接受程度上反映出来。
- 模糊是相对于精确而言的。对于多因素的复杂状况，模糊往往显示出更大的精确。过份精确还可能导致过于克板、缺乏灵活性。如，我们到机场去接一位不认识的朋友，需要知道的是对方的几个主要特徵，而不需要对他的高低胖瘦精确到几尺几寸；有的人作演讲，按提纲讲要点，临场发挥，就可以做到疏而不漏；
- 水至清则无鱼，人至察则无友！

Application

❖ 七十年代欧洲进行模糊逻辑在工业方面的应用研究：

- 实现了第一个试验性的蒸汽机控制；
- 热交换器模糊逻辑控制试验；
- 转炉炼钢模糊逻辑控制试验；
- 温度模糊逻辑控制；
- 十字路口交通控制；
- 污、废水处理等。

Application

八十年代日本情况：

列车的运行和停车模糊逻辑控制，节能11—14%；

汽车速度模糊逻辑控制（加速平滑、上下坡稳定）；

港口集装箱起重机的小车行走和卷扬机的运行控制；

家电模糊逻辑控制（电饭煲、洗衣机、微波炉、空 调、电冰箱等）。

Application

- 1987年,日本人研制成功新一代数字模糊微处理器;
- 1990年,美国加利福尼亚的Togai Infralogic公司推出第二代数字模糊微处理器FC110;
- 1992年,德国西门子公司宣布第三代数字模糊微处理器Fuzzy 166研制成功,从而标志着模糊控制理论、模糊控制系统应用和计算机的结合已进入成熟的实用阶段.

3.1 模糊逻辑简介

- 经典二值逻辑中，通常以0表示“假”以1表示“真”，一个命题非真即假
- 在模糊逻辑中，一个命题不再非真即假，它可以被认为是“部分的真”
- 模糊逻辑取消二值之间非此即彼的对立，用隶属度表示二值间的过度状态

例如，“室温在27ºC是高温度”，这个命题真值如何呢？无论认为是还是否，答案都过于极端。在模糊逻辑中，一个命题不再非真即假，它可以被认为是“部分的真”。模糊逻辑中的隶属度在[0,1]之间取值，用以表示程度。上面关于温度的问题，可以认为该温度对“高温度”的隶属度是0.6，即“部分的高温”。

经典集合

定义：设在论域U上给定一个映射

C_A : U—>{0,1}　　　　则：

集合C_A ={u| $C_A(u)$=1,u∈U}

集合A的特征函数为：

$$C_A(u)=\begin{cases}1 & u\in C_A\\ 0 & u\notin C_A\end{cases}$$

隶属函数为0或1的特例

模糊集合

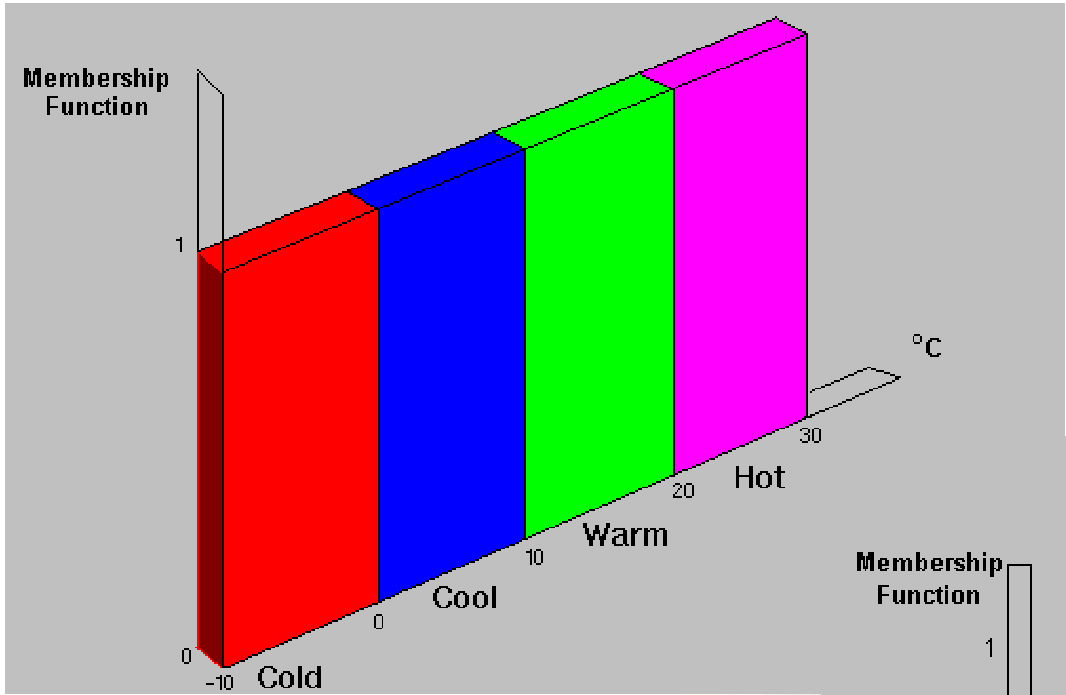
定义：设在论域U上给定一个映射

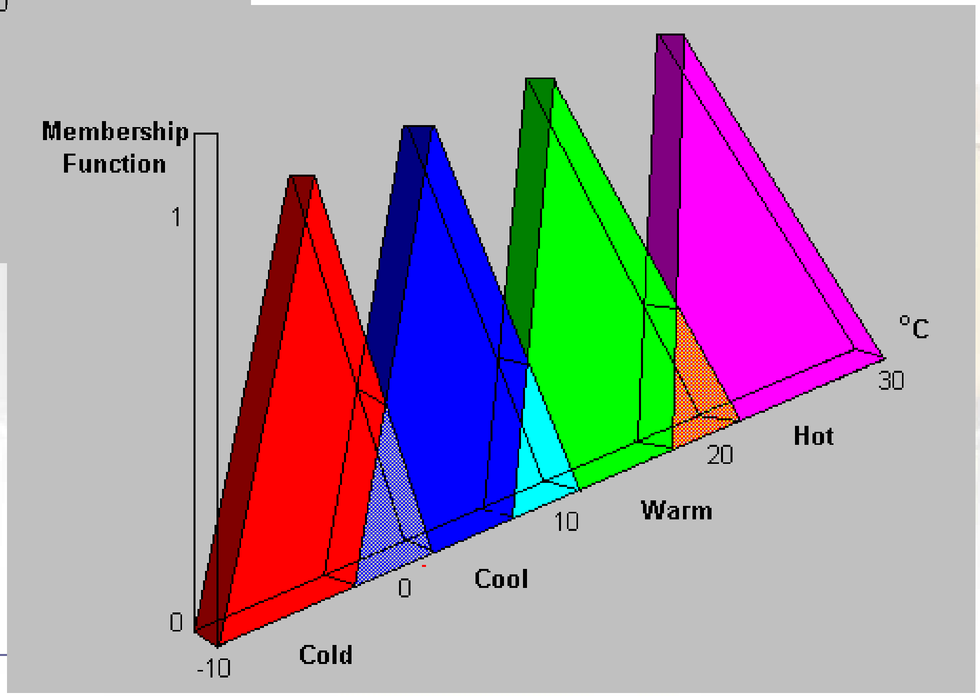
A: U—>[0,1]

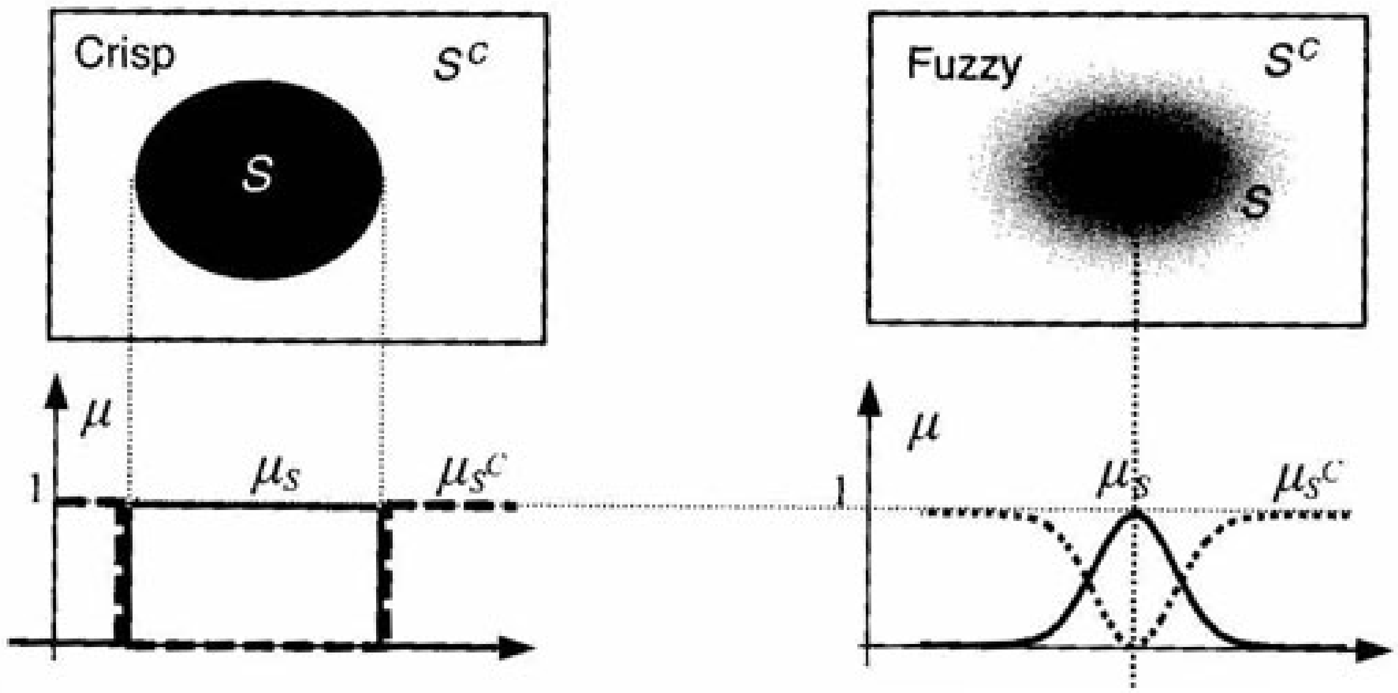
u|—>A(u)　　　　则:

A称作论域U上的模糊集，A(u)称为A的隶属函数。

Bivalence and Fuzz






Crisp
S^C
S
μ
1
μ_S
μ_{S^C}
Fuzzy
S^C
S
μ
1
μ_S
μ_{S^C}

模糊与概率

- **Fuzzy systems and probability operate over the same numeric range. [0，1.0].**
- both describe uncertainty
- **The probabilistic approach yields(描述) the natural-language statement, "There is an 80% chance that John is balding." The fuzzy terminology(术语) corresponds to "John's degree of membership within the set of balding people is 0.80."**

模糊和概率

是否不确定性就是随机性？概率的概念是否包含了所有的不确定性的概念？

Bayesian camp：概率是一种主观的先验知识，不是一种频率和客观测量值(赌博为例，赌徒总认为他所认为事件概率大)

Lindley：概率是对不确定性唯一有效并充分的描述，所有其他方法都是不充分的(直接指向模糊理论)

<u>随机和模糊在概念和理论上都是有区别的</u>

相似：通过单位间隔[0,1]间的数来表述不确定性，都兼有集合和命题的结合律、交换律、分配律

区别：对待 $A \cap A^c$ 。经典集合论，$A \cap A^c = \phi, P(A \cap A^c) = P(\phi) = 0$ 代表概率上不可能的事件。而模糊建立在 $A \cap A^c \neq \phi$

3.2 模糊集合与模糊逻辑

本节是关于模糊集合、模糊逻辑、模糊关系的基础知识，为介绍模糊推理、模糊计算作理论准备，包括下列要点：

- 模糊集合的概念
- 模糊集合的隶属度函数
- 模糊集合上的运算及其基本定律
- 模糊逻辑及其基本定律
- 模糊关系及其合成运算

Randomness vs. Fuzziness

Example1:

- There is a 20% chance to rain. (probability & objectiveness， 客观)
- It’s a light rain. (fuzziness & subjectiveness， 主观)

Example 2:

- Next figure will be an ellipse or a circle, a 50% chance for every occasion. (probability & objectiveness)
- Next figure will be an inexact ellipse. (fuzziness & subjectiveness)

An inexact ellipse

模糊集合与隶属度函数

- 古典集合：对于任意一个集合***A***，论域中的任何一个元素***x***，或者属于***A***，或者不属于***A***。集合***A***也可以由其特征函数定义：

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

- 模糊集合：论域上的元素可以“部分地属于”集合***A*** 。一个元素属于集合***A***的程度称为隶属度，模糊集合可用隶属度函数定义。

> 定义3.1 设存在一个普通集合***U***，***U***到**[0,1]**区间的任一映射***f***都可以确定***U***的一个模糊子集，称为***U***上的模糊集合***A***。其中映射***f***叫做模糊集的隶属度函数，对于***U***上一个元素***u***，***f(u)***叫做***u***对于模糊集的隶属度，也可写作**A(u)**

模糊集合与隶属度函数

- 隶属度表示程度，它的值越大，表明***u***属于***A***的程度越高，反之则表明***u***属于***A***的程度越低
- 古典集合可以看作一种退化的模糊集合，即论域中不属于该古典集合的元素隶属度为**0**，其余元素隶属度为**1**

模糊集合的表示法

❖ 模糊集的表示方法有很多种，其中常用的有如下两种

(1)Zadeh表示法

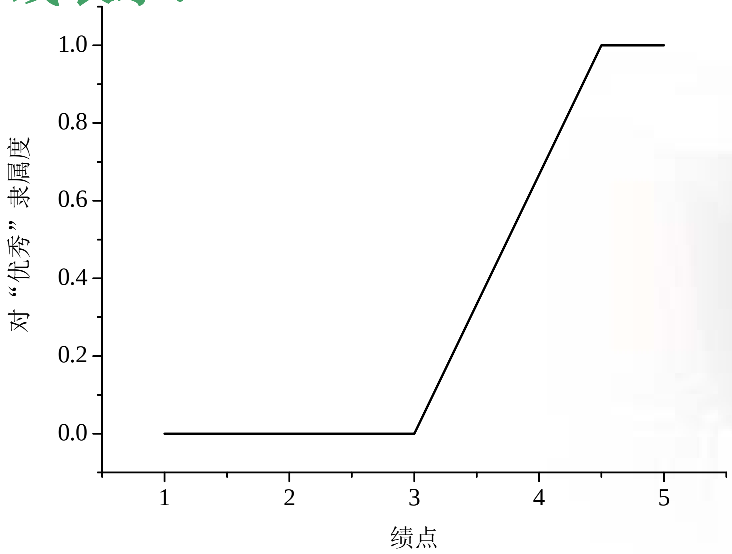
$$A=\sum_{u\in U}\frac{f_A(u)}{u} \quad \text{（离散）} \qquad\qquad A=\int_u \frac{f_A(u)}{u} \quad \text{（连续）}$$

(2)序对表示法

$$A=\{(u,\ f_A(u))\,|\,u\in U\}$$

模糊集合表示法示例

- 例**3.1** 在考核中，学生的绩点为**[0,5]**区间上的实数。按照常识，绩点在**3**以下显然不属于“优秀”，绩点在**4.5**以上则显然属于“优秀”，这是没有问题的。然而，绩点为**4.4**时该怎么算呢？这个成绩很接近**4.5**，如果和绩点为**3**一样，都不属于“优秀”，未免对绩点为**4.4**的同学太不公平。有了模糊集合这个工具，在**3**到**4.5**之间就可以认为是一个“灰色地带”，其间的成绩在一定程度上属于“优秀”这个模糊集。假设各绩点对“优秀”的隶属度可以用如图的曲线表示：



模糊集合表示法示例

- 在这个例子中，设模糊集合“优秀”为***A***，则隶属度函数为：

$$f_A(u)=\begin{cases}0 & 0\le u<3\\ \frac{2}{3}u-2 & 3\le u<4.5\\ 1 & 4.5\le u\le 5\end{cases}$$

- 此处的论域是连续的，模糊集合用**Zadeh**表示法可以表示为

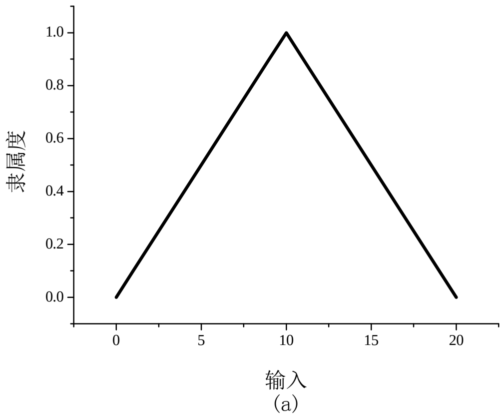
$$A=\int_{0\le u<3}\frac{0}{u}+\int_{3\le u<4.5}\frac{\frac{2}{3}u-2}{u}+\int_{4.5\le u<5}\frac{1}{u}$$

- 用序对表示法可以表示为

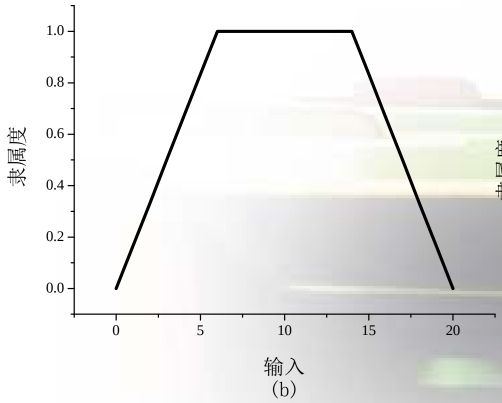
$$A=\{(u,0)\mid 0\le u<3\}+\left\{\left(u,\frac{2}{3}u-2\right)\middle| 3\le u<4.5\right\}+\{(u,1)\mid 4.5\le u<5\}$$

常用的隶属度函数

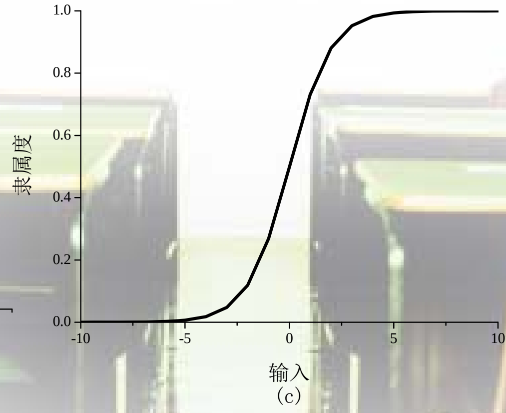
❖ 在不同的具体问题中，往往需要选择不同的隶属度函数，对隶属度函数的选择通常依赖相关领域的专家知识 。一下是一些常用的隶属度函数：



三角形函数



梯形函数



sigmoid函数

模糊集合上的运算

❖模糊集合的子集

定义3.2 当且仅当对论域U上任意元素u，都有$f_A(u) \le f_B(u)$，则称模糊集合A是模糊集合B的子集

❖模糊集合的交、并、补运算

交 $$\mu_{A\cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

并 $$\mu_{A\cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$$

补 $$\mu_{\bar{A}}(u) = 1 - \mu_A(u)$$

模糊集合的基本运算

1. 模糊集合的相等:

若有两个模糊集合A和B，对于所有的 $x \in X$ （对于每一个元素x），下列关系成立:

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

则称模糊集合A和模糊集合B相等。记作A=B.

2. 模糊集合的包含关系

若有两个模糊集合A和B，对于所有的 $x \in X$ （对于每一个元素x），下列关系成立:

$$\mu_A(x) \le \mu_B(x)$$

则称A包含于B或A是B的子集. 记作: $A \subseteq B$

或称B包含A. 记作: $B \supseteq A$

模糊集合的基本运算

3. 模糊空集

若对所有 $x \in X$，均有 $\mu_A(x) = 0$ ，则称A为论域X上的模糊空集，

记作 $A = \Phi$,即 $\mu_\Phi(x) = 0$。

4. 模糊集合的并集

若有三个模糊集合A，B 和C，$\forall$ $x \in X$，均有

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

则称C为A和B的并集，记作 $C = A \cup B$。其中 “ $\vee$ ” 为Zadeh 算子，表示“取大”运算。

模糊集合的基本运算

5. 模糊集合的交集

若有三个模糊集合A, B 和C， $\forall\ x \in X$，均有

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right]$$

则称C为A与B的交集。记为 $C = A \cap B$.

上式表示：对于所有的 $x \in X$，被逐点定义取小运算。其中Zadeh 算子" $\wedge$ " 表示"取最小值"运算。

6. 非运算

若有两个模糊集合A与B， $\forall\ x \in X$，均有

$$\mu_B(x) = 1 - \mu_A(x)$$

则称B为A的补集，记为 $B = \overline{A}$.

模糊集合的基本运算

例题： 设论域X={x1, x2, x3, x4} 以及模糊集合

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.5}{x_4}$$

$$B = \frac{0.9}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.7}{x_4}$$

求： $A \cup B$， $A \cap B$， $\overline{A}$和$\overline{B}$。

解：根据上面的定义，容易求得：

模糊集合的基本运算

例题： 设论域X={x1, x2, x3, x4} 以及模糊集合

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$B=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_4}$$

求： $A\cup B$， $A\cap B$， $\overline{A}$和$\overline{B}$。

解：根据上面的定义，容易求得：

$$A\cup B=\frac{1\vee 0.9}{x_1}+\frac{0.8\vee 0.4}{x_2}+\frac{0.4\vee 0}{x_3}+\frac{0.5\vee 0.7}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}$$

模糊集合的基本运算

例题： 设论域X={x1, x2, x3, x4} 以及模糊集合

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$B=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_4}$$

求： $A\cup B$， $A\cap B$， $\overline{A}$和$\overline{B}$。

解：根据上面的定义，容易求得：

$$A\cup B=\frac{1\vee 0.9}{x_1}+\frac{0.8\vee 0.4}{x_2}+\frac{0.4\vee 0}{x_3}+\frac{0.5\vee 0.7}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}$$

$$A\cap B=\frac{1\wedge 0.9}{x_1}+\frac{0.8\wedge 0.4}{x_2}+\frac{0.4\wedge 0}{x_3}+\frac{0.5\wedge 0.7}{x_4}=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.5}{x_4}$$

模糊集合的基本运算

例题： 设论域X={x1, x2, x3, x4} 以及模糊集合

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$B=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_4}$$

求：$A\cup B$， $A\cap B$， $\overline{A}$和$\overline{B}$。

解：根据上面的定义，容易求得：

$$A\cup B=\frac{1\vee 0.9}{x_1}+\frac{0.8\vee 0.4}{x_2}+\frac{0.4\vee 0}{x_3}+\frac{0.5\vee 0.7}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}$$

$$A\cap B=\frac{1\wedge 0.9}{x_1}+\frac{0.8\wedge 0.4}{x_2}+\frac{0.4\wedge 0}{x_3}+\frac{0.5\wedge 0.7}{x_4}=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$\overline{A}=\frac{1-1}{x_1}+\frac{1-0.8}{x_2}+\frac{1-0.4}{x_3}+\frac{1-0.5}{x_4}=\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

模糊集合的基本运算

例题：　设论域X={x1, x2, x3, x4}　以及模糊集合

$$A=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$B=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_4}$$

求：$A\cup B$，　$A\cap B$，　$\overline{A}$和$\overline{B}$。

解：根据上面的定义，容易求得：

$$A\cup B=\frac{1\vee 0.9}{x_1}+\frac{0.8\vee 0.4}{x_2}+\frac{0.4\vee 0}{x_3}+\frac{0.5\vee 0.7}{x_4}=\frac{1}{x_1}+\frac{0.8}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}$$

$$A\cap B=\frac{1\wedge 0.9}{x_1}+\frac{0.8\wedge 0.4}{x_2}+\frac{0.4\wedge 0}{x_3}+\frac{0.5\wedge 0.7}{x_4}=\frac{0.9}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$\overline{A}=\frac{1-1}{x_1}+\frac{1-0.8}{x_2}+\frac{1-0.4}{x_3}+\frac{1-0.5}{x_4}=\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}$$

$$\overline{B}=\frac{1-0.9}{x_1}+\frac{1-0.4}{x_2}+\frac{1-0}{x_3}+\frac{1-0.7}{x_4}=\frac{0.1}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}$$

模糊集合上的运算定律

- ❖幂等律 $A \cup A = A,\ \ A \cap A = A$
- ❖交换律 $A \cap B = B \cap A,\ \ A \cup B = B \cup A$
- ❖结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- ❖分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- ❖吸收律 $A \cap (A \cup B) = A,\ \ A \cup (A \cap B) = A$
- ❖两极律 $A \cap U = A,\ \ A \cup \varnothing = A$

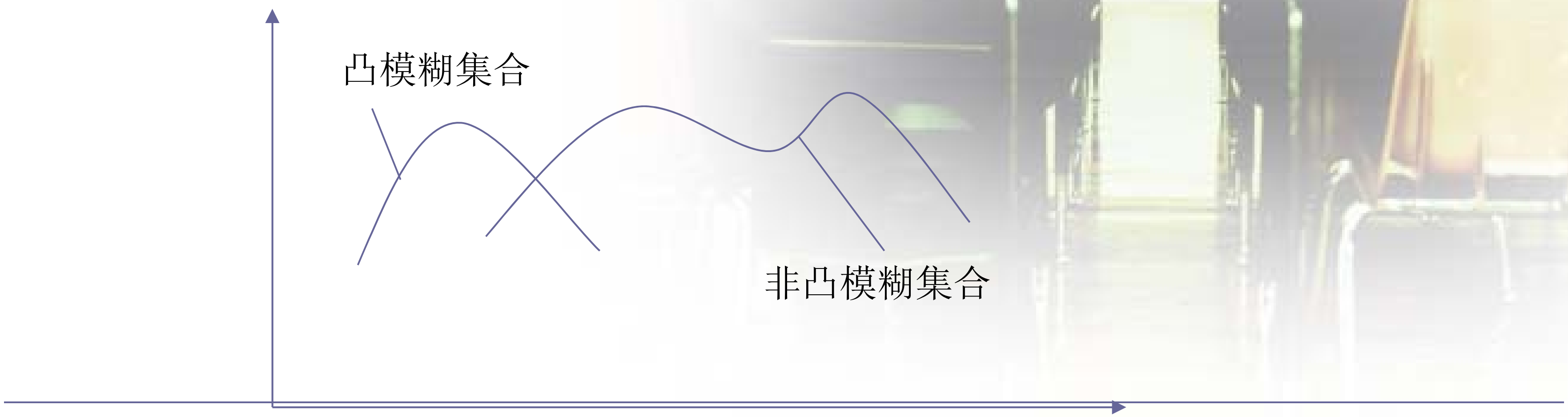
  $A \cap \varnothing = \varnothing,\ \ A \cup U = U$
- ❖复原律 $\overline{\overline{A}} = A$
- ❖摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

隶属度函数实质上反映的是事物的渐变性

遵守的基本原则：

1、表示隶属度函数的模糊集合必须是凸模糊集合；

例如“速度适中”的隶属度函数—在一定范围内或者一定条件下，模糊概念的隶属度具有一定的稳定性—从最大的隶属度函点出发向两边延伸时，其隶属度函数的值必须是单调递减的，而不许有波浪性—总之，隶属度函数呈单峰馒头形(凸模糊集合，一般用三角形和梯形作为隶属度函数曲线)

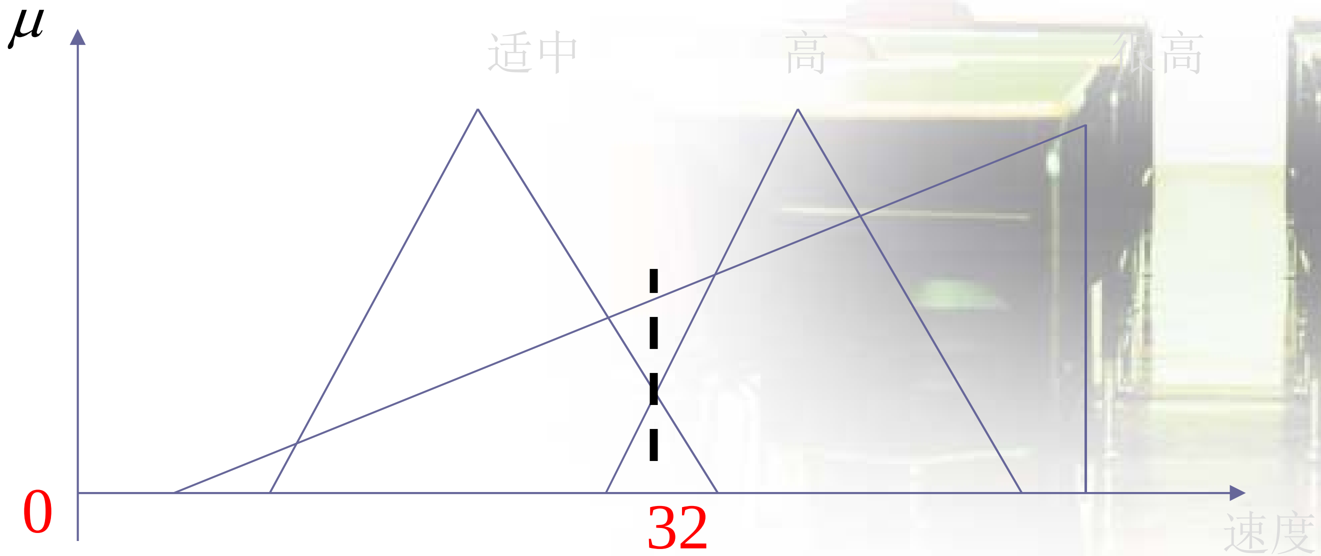


2、变量所取隶属度函数通常是对称和平衡的

模糊变量的标称值选择一般取3—9个为宜，通常取奇数（平衡）——在“零”、“适中”或者“合适”集合的两边语言值通常取对称（如速度适中，一边取“速度高”，一般另一边取“速度低”，满足对称）。

3、隶属度函数要符合人们的语义顺序，避免不恰当的重叠

在相同的论域上使用的具有语义顺序关系的若干标称的模糊集合，应该合理的排列。下面的排列是错误的。



交叉越界的隶属度函数示意图

隶属度函数是模糊控制的应用基础

如何确定隶属函数?

自学习修改和完善

初步确定隶属函数

隶属函数的选择方法

- 模糊统计法
- 例证法
- 专家经验法
- 二元对比排序法

(1)模糊统计法

模糊统计法的基本思想是对论域U上的一个确定元素v是否属于论域上的一个可变的清晰集的判断。

模糊集——如：年轻人

清晰集——“17—30岁的人“、25—35岁的人”，对于同一个模糊集可以有不同的清晰集。

模糊统计法计算步骤：

$$v_0\text{对}A\text{的隶属频率} = \frac{v_0 \in A\text{的次数}}{\text{试验总次数}\,n}$$

N越大，隶属频率就越稳定，但是计算量比较大。

（2）例证法　　例证法由已知的有限个隶属函数的值，来估计论域U上的模糊子集A的隶属函数。

（3）专家经验法　　专家经验法是根据专家的实际经验给出模糊信息的处理算式或者相应的权系数值隶属函数的一种方法。

（4）二元对比排序法　二元对比排序法是通过多个事物之间两两对比来确定某种特征下的顺序，由此来确定这些失去对该特征的隶属函数的大体形状。

模糊控制中的隶属函数图形大概有以下三大类：

1、左大右小的偏小型下降函数（Z函数）

2、左小右大的偏大型上升函数（S函数）

3、对称型凸函数（II函数）

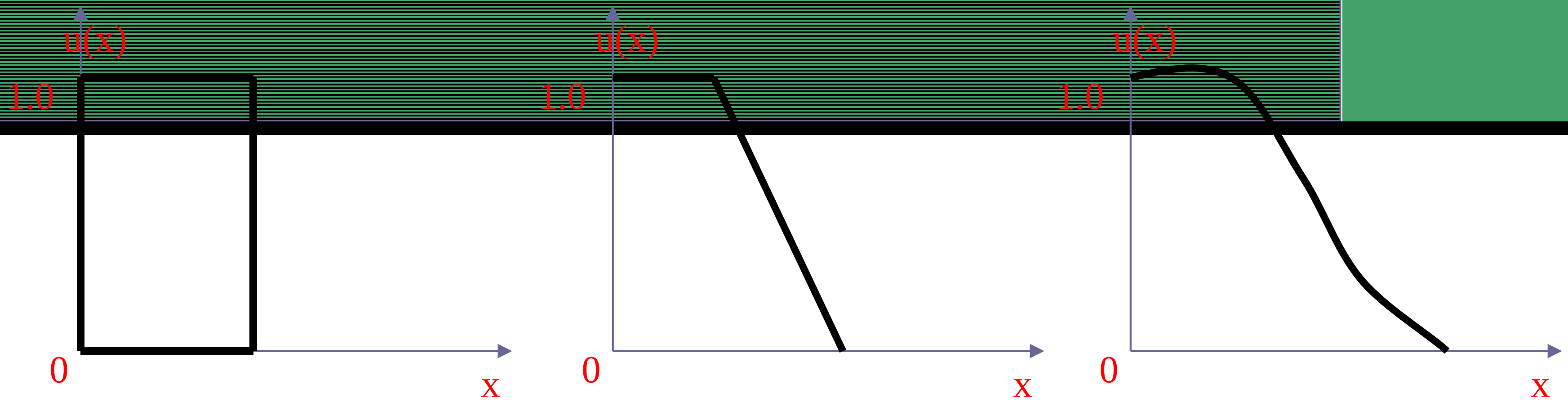


图　Z函数

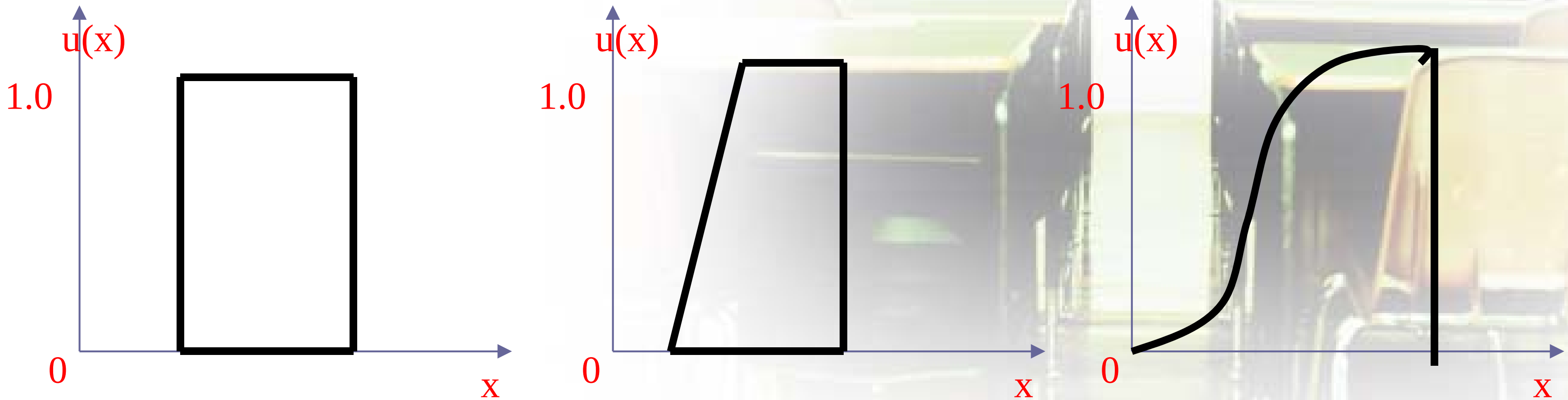


图　S函数

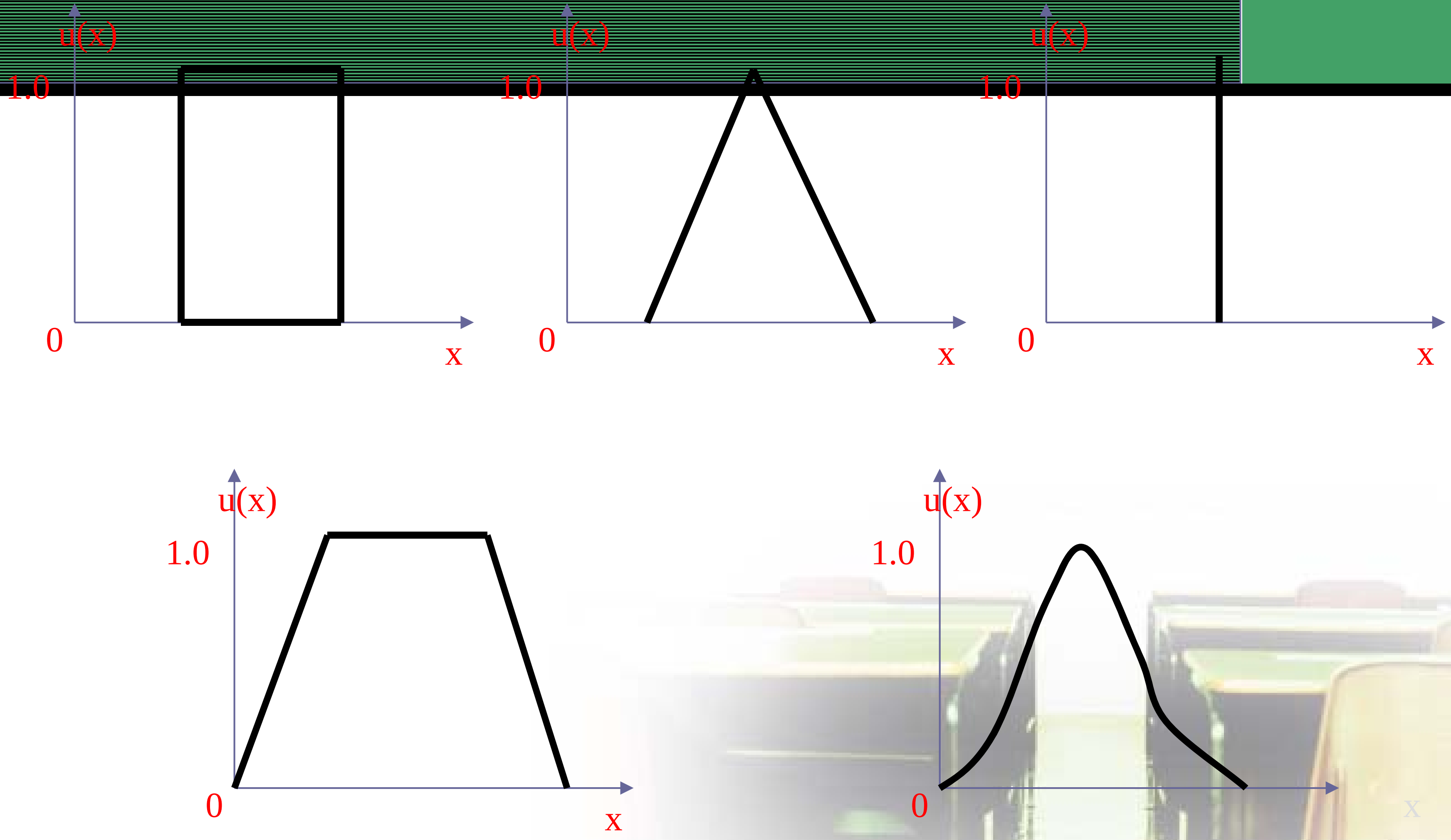


图　II函数

3.3 模糊逻辑

- 经典逻辑是二值逻辑，其中一个变元只有“真”和“假”（**1**和**0**）两种取值，其间不存在任何第三值。
- 模糊逻辑也属于一种多值逻辑，在模糊逻辑中，变元的值可以是**[0,1]**区间上的任意实数。
- 设***P***、***Q***为两个变元，模糊逻辑的基本运算定义如下：

补　$\overline{P} = 1 - P$

交　$P \wedge Q = \min(P, Q)$

并　$P \vee Q = \max(P, Q)$

蕴含　$P \rightarrow Q = ((1 - P) \vee Q)$

等价　$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

关系

描写事物之间联系的数学模型之一就是关系。

如：

例如 **x** 对 **y** 有余弦关系（ **y=cos x** ）；

a 对 **b** 有大小次序关系（ **a>b** ）。

在现代数学中，关系常用集合来表现。

在集合 **A** 与集合 **B** 中各取出一元素排列成序对（或称序偶），所有这样的序对构成的集合叫做 **A** 和 **B** 的直积集，记为：

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}。$$

序对 **(a， b)** 是和顺序有关的，即 $(a, b) \neq (b, a)$，所以 $A \times B \neq B \times A$

注意：关系是有向的