2023-2024学年云南省三校高三高考备考实用性联考卷（八）数学试题

一、单选题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分。在每小题给出的选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知z_1，z_2是方程$x^2-2x+2=0$的两个复根，则$\left|z_1^2-z_2^2\right|=$

A. 2　　B. 4　　C. 2*i*　　D. 4*i*

2. 已知集合$A=\{-1,0,1\}$，$B=\left\{a,a^2-3a+2\right\}$，若$A\cap B=\{0\}$，则$a=$(　)

A. 0 或 1　　B. 1 或 2　　C. 0 或 2　　D. 0 或 1 或 2

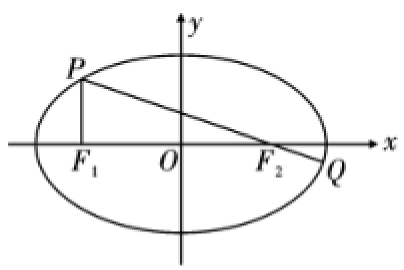
3. 有 7 个人排成前后两排照相，前排站 3 人后排站 4 人，其中甲同学站在前排，乙同学站在后排的概率为(　)

A. $\frac{1}{42}$　　B. $\frac{1}{14}$　　C. $\frac{2}{21}$　　D. $\frac{2}{7}$

4. 平面向量$\overrightarrow{a}$与$\overrightarrow{b}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，已知$\overrightarrow{a}=(6,-8)$，$|\overrightarrow{b}|=10$，则向量$\overrightarrow{b}$在向量$\overrightarrow{a}$上的投影向量的坐标为(　)

A. $(3,-4)$　　B. $(4,-3)$　　C. $(-4,3)$　　D. $(-3,4)$

5. 已知椭圆 *E*：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$(如图)，过$F_2$的直线交 *E* 于 *P*，*Q* 两点，且$PF_1\perp x$轴，$|PF_2|=9|F_2Q|$，则 *E* 的离心率为(　)



A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知正四棱锥的高为 *h*，其顶点都在同一球面上，若该球的体积为36π，且$\frac{3}{2}\leqslant h\leqslant\frac{9}{2}$，则当该正四棱锥体积最大时，高 *h* 的值为(　)

A. 2　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 4　　D. $\frac{9}{2}$

7. 定义方程 $f(x)=f'(x)$ 的实数根 x 叫做函数 $f(x)$ 的“奋斗点”.若函数 $g(x)=\ln x$， $h(x)=x^3-2$ 的“奋斗点”分别为 m，n，则 m，n 的大小关系为(   )

A. $m\geqslant n$ B. $m>n$ C. $m\leqslant n$ D. $m<n$

8. 若 $x,y\in R$，则 $\sqrt{(x-y)^2+(xe^x-y+1)^2}$ 的最小值为(   )

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{\sqrt{2}}{e}$

二、多选题：本题共 **4** 小题，共 **20** 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 **5** 分，部分选对的得 **2** 分，有选错的得 **0** 分。

9. 已知 $f(x)$， $g(x)$ 都是定义在 R 上且不恒为 0 的函数，则(   )

A. $y=f(x)\cdot f(-x)$ 为偶函数

B. $y=g(x)+g(-x)$ 为奇函数

C. 若 $g(x)$ 为奇函数， $f(x)$ 为偶函数，则 $y=f(g(x))$ 为奇函数

D. 若 $f(x)$ 为奇函数， $g(x)$ 为偶函数，则 $y=f(x)-g(x)$ 为非奇非偶函数

10. 已知 α， β 是两个不同的平面，m，n，l 是三条不同的直线，则下列命题正确的是(   )

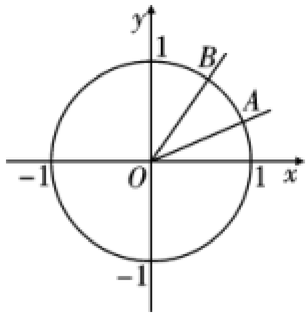
A. 若 $m\perp\alpha$， $n\perp\alpha$，则 $m//n$

B. 若 $m//\alpha$， $n//\alpha$，则 $m//n$

C. 若 $\alpha\perp\beta$， $\alpha\cap\beta=l$， $m\subset\alpha$， $m\perp l$，则 $m\perp\beta$

D. 若 $\alpha\cap\beta=l$， $m//\alpha$， $m//\beta$，则 $m//l$

11. 在如图所示的平面直角坐标系中，锐角 α， β 的终边分别与单位圆交于 A，B 两点.则(   )



A. 若 A 点的横坐标为 $\dfrac{12}{13}$，B 点的纵坐标为 $\dfrac{4}{5}$，则 $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{16}{65}$

B. $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$

C. $\sin\alpha>\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta$

D. 以 $\sin\alpha$， $\sin\beta$， $\sin(\alpha+\beta)$ 为三边构成的三角形的外接圆的面积为 $\dfrac{\pi}{3}$

12. 已知在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=BC=2$，$AA_1=2\sqrt{2}$，点 P 是四边形$A_1B_1C_1D_1$内（包含边界）的一动点，设二面角$P-AD-B$的大小为α，直线 PB 与平面 ABCD 所成的角为β，若$\alpha=\beta$，则(   )

A. 点 P 的轨迹为一条抛物线

B. 直线PA_1与直线 CD 所成角的最大值为$\frac{\pi}{4}$

C. 线段 PB 长的最小值为 3

D. 三棱锥$P-A_1BC_1$体积的最大值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分。

13. 在$(\frac{1}{x}+x^2)^6$的展开式中常数项是__________.（用数字作答）

14. 假设云南省 40 万学生数学模拟考试的成绩 X 近似服从正态分布$N(98,100)$，已知某学生成绩排名进入全省前9100名，那么该生的数学成绩不会低于__________分.（参考数据：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6827$，$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9545$)

15. 已知抛物线 C：$x^2=8y$，在直线$y=-4$上任取一点 P，过点 P 作抛物线 C 的两条切线，切点分别为 A，B，则原点到直线 AB 距离的最大值为__________.

16. 定义$||x||$表示与实数 x 的距离最近的整数（当 x 为两相邻整数的算术平均值时，$|x|$取较大整数），如$\left|\left|\frac{4}{3}\right|\right|=1$，$\left|\left|\frac{5}{3}\right|\right|=2$，$||2||=2$，$||2.5||=3$，令函数$K(x)=||x||$，数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{K(\sqrt{n})}$，其前 n 项和为$S_n$，则$S_6=$__________；$S_{2025}=$__________.

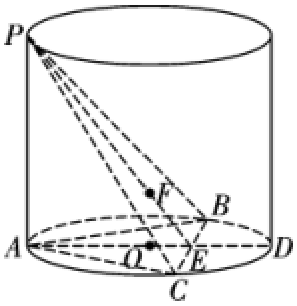
四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（本小题 10 分）

如图，正$\triangle ABC$是圆柱底面圆 O 的内接三角形，其边长为$a.AD$是圆 O 的直径，PA 是圆柱的母线，E 是 AD 与 BC 的交点，圆柱的轴截面是正方形.

(1) 记圆柱的体积为V_1，三棱锥$P-ABC$的体积为V_2，求$\frac{V_1}{V_2}$；

(2) 设 F 是线段 PE 上一点，且$FE=\frac{1}{2}PF$，求二面角$A-FC-O$的余弦值.



18.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=4\sin\omega x\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}$ 的相邻两条对称轴之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上的值域；

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $f(A)=\sqrt{3}$，$\sqrt{2}a=\sqrt{3}b$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19.（本小题 12 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，$S_{n+1}=2S_n+2^{n+1}$，$n\in N^*$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=\dfrac{S_n}{3^n}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，若对任意的正整数 n，不等式 $T_n>\dfrac{m^2-m+7}{27}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

20.

21.（本小题 12 分）

已知圆 C：$\left(x+\sqrt{5}\right)^2+y^2=4$，定点 $D\left(\sqrt{5},0\right)$，圆 C 上某一点 D_1 恰好与点 D 关于直线 PQ 对称，设直线 PQ 与直线 D_1C 的交点为 T.

(1) 求证：$||TC|-|TD||$ 为定值，并求出点 T 的轨迹 E 方程；

(2) 设 $A(-1,0)$，M 为曲线 E 上一点，N 为圆 $x^2+y^2=1$ 上一点 $(M,N$ 均不在 x 轴上$)$. 直线 AM，AN 的斜率分别记为 k_1，k_2，且 $k_1=-4k_2$. 求证：直线 MN 过定点，并求出此定点的坐标.

22.（本小题 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln(x+2)-x+2$， $g(x)=ae^x-x+\ln a$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值；

(2) 请在下列①②中选择一个作答（注意：若选两个分别作答则按选①给分）.

①若 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

②若关于 x 的方程 $f(x)=g(x)$ 有两个实根，求实数 a 的取值范围.

答案和解析

1.【答案】B

【解析】【分析】

本题考查关于 x 的实系数一元二次方程在复数集中根，复数的模的计算，属于基础题.

由题意可得 $z_1=1+i$ ， $z_2=1-i$ ，利用复数运算求解即可.

【解答】

解：由 $x^2-2x+2=0$，则 $(x-1)^2=-1$ ，

所以 $z_1=1+i$ ， $z_2=1-i$ ，

$\left|z_1^2-z_2^2\right|=|(z_1+z_2)(z_1-z_2)|=|2\times 2i|=4$ ，

故选 B.

2.【答案】C

【解析】解：由于 $A\cap B=\{0\}$，则 $0\in B$.

若 $a=0$，则 $a^2-3a+2=2$，此时 $B=\{0,2\}$ 符合题意.

若 $a^2-3a+2=0$，则 $a=1$ 或 2，

$a=1$ 时，$B=\{0,1\}$，此时 $A\cap B=\{0,1\}$ 不合题意；

$a=2$ 时，$B=\{0,2\}$ 符合题意.

因此 $a=0$ 或 2.

故选 C.

根据集合的并集的结果分类讨论求参数.

本题主要考查集合的基本运算，根据交集的定义进行计算是解决本题的关键，是基础题.

3.【答案】D

【解析】【分析】

本题考查古典概型及其计算，属于基础题.

先计算总基本事件数，可以看成 7 人站一排有 A_7^7 种，再计算甲同学站在前排，乙同学站在后排的基本事件数，根据古典概型的概率计算公式可得.

【解答】

解：先计算总事件数，可以看成 7 人站一排有 A_7^7 种.

现在考虑符合题意的情况，从余下 5 人中选 2 人与甲站在前排，

乙站在后排有 $C_5^2A_3^3A_4^4$ 种，概率为 $P=\frac{C_5^2A_3^3A_4^4}{A_7^7}=\frac{2}{7}$ ，故选 D.

4.【答案】D

【解析】【分析】

本题主要考查投影向量和数量积的坐标运算，属于基础题.

利用向量的数量积的坐标运算即可求解.

【解答】

解：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}|\left|\overrightarrow{b}\right|\cos\frac{2}{3}\pi=-50$，

向量 $\overrightarrow{b}$ 在向量 $\overrightarrow{a}$ 上的投影向量的坐标为

$\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}\cdot\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}=\frac{-50}{10}\times\frac{(6,-8)}{10}=(-3,4)$ ，故选 D.

5.【答案】A

【解析】【分析】

本题考查椭圆的标准方程和几何性质，考查运算求解能力、推理论证能力，考查数学运算及逻辑推理核心素养，属于中档题.

根据 $PF_1\perp x$ ， $|PF_2|=9|F_2Q|$ 求出点 Q 的坐标，然后代入 E 方程即可求出结果.

【解答】

解：依题意设 $P(-c,y_1),Q(x_2,y_2)$ ，则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ ，所以 $y_1=\frac{b^2}{a}$ ；

由于 $|PF_2|=9|F_2Q|$ ，所以 $\overrightarrow{PF_2}=9\overrightarrow{F_2Q}$, 所以 $(2c,-y_1)=9(x_2-c,y_2)$,

所以 $x_2=c+\frac{2c}{9}=\frac{11c}{9},y_2=-\frac{b^2}{9a}$,

由 $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$ 得 $\frac{(\frac{11c}{9})^2}{a^2}+\frac{(\frac{b^2}{-9a})^2}{b^2}=1$ ，化为 $121c^2+b^2=81a^2$ ，

所以 $3c^2=2a^2$ ，得 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$ ，

故选 A.

6.【答案】C

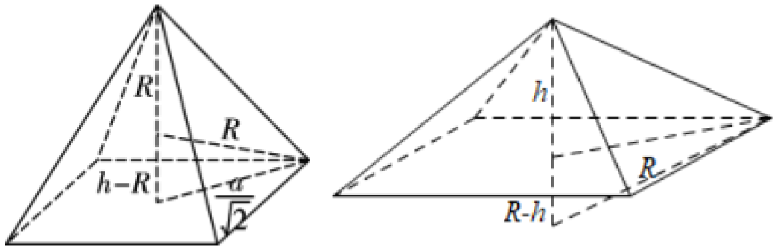
【解析】【分析】

本题主要考查球的切接问题以及锥体、球体的体积，属于中档题.

设正四棱锥的底边长为 *a*，球的半径为 *R*，则 $R^2=(h-R)^2+(\frac{a}{\sqrt{2}})^2$ ，根据球的体积公式求得 *R*，再由棱锥体积公式以及利用导数求得取最值时 *h* 的值即可.

【解答】

解：如图，设正四棱锥的底边长为 *a*，球的半径为 *R*，



因为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=36\pi$ ，

$\therefore R=3$ ，

可知 $R^2=(h-R)^2+(\frac{a}{\sqrt{2}})^2$ ，则 $a^2=-2h^2+12h$，

该正四棱锥的体积为 $V=\frac{1}{3}a^2\cdot h=\frac{1}{3}(-2h^3+12h^2)$，

则 $V'=-2h^2+8h=-2h(h-4)$，

又 $h\in[\frac{3}{2},\frac{9}{2}]$ ，

则当 $h\in\left[\frac{3}{2},4\right)$ 时， $V'>0$；当 $h\in\left(4,\frac{9}{2}\right]$ 时， $V'<0$；

故当 $h=4$ 时，*V* 取得最大值.

故选 C.

7.【答案】*D*

【解析】【分析】

本题考查导数的新定义问题，属于中档题.

根据题意分别求得 *m*，*n* 的范围，即可得解.

【解答】

解：函数 $g(x)=\ln x$ ，得 $g'(x)=\frac{1}{x}$ 由题意可得， $g(m)=g'(m)$ ，即 $\frac{1}{m}=\ln m$ ，

设 $H(x)=\frac{1}{x}-\ln x$ ， $H'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$ ，因为 $x>0$ ，所以 $H'(x)<0$ ，易得 $H(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减且 $H(1)=1>0$ ， $H(2)=\frac{1}{2}-\ln\ 2=\ln\ \frac{\sqrt{e}}{2}<0$ ，故 $1<m<2$ ，

由 $h(x)=x^3-2$ ，得 $h'(x)=3x^2$ ，由题意得： $n^3-2=3n^2$ ， $n=3+\frac{2}{n^2}>3$ ，

所以 $m<n$ ，故选 D.

8.【答案】A

【解析】【分析】

本题主要考查两点间的距离公式，点到直线的距离，导数的几何意义应用，属于拔高题.

将求最值问题转化成求两点距离问题，再利用导数求出切线斜率，最终转化成点到直线的距离.

【解答】

解： $\sqrt{(x-y)^2+(xe^x-y+1)^2}$ 可以看成点 $P(x,xe^x)$ 与点 $Q(y,y-1)$ 之间的距离，

而点 $P(x,xe^x)$ 是函数 $f(x)=xe^x$ 图象上的点，

点 $Q(y,y-1)$ 是直线 l： $y=x-1$ 上的点，

即 $\sqrt{(x-y)^2+(xe^x-y+1)^2}=|PQ|$ 的最小值，

即为函数 $f(x)$ 上的点到直线 l： $y=x-1$ 上的点的距离的最小值，

$f'(x)=(x+1)e^x$ ，

设函数 $f(x)=xe^x$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线 l_1 与直线 l 平行，

则直线 l_1 的斜率为 1，可得 $f'(x_0)=(1+x_0)e^{x_0}=1$，

整理得 $e^{x_0}(1+x_0)-1=0$，

$\because g(x)=e^x(1+x)-1$ 在定义域内单调递增，且 $g(0)=0$，

$\therefore$ 方程 $e^{x_0}(1+x_0)-1=0$ 有且仅有一个解 $x_0=0$，则 $M(0,0)$，

故 $|PQ|$ 的最小值为点 $M(0,0)$ 到直线 l： $x-y-1=0$ 的距离 $d=\frac{|0-0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选 A.

9.【答案】AD

【解析】【分析】

本题考查了函数的奇偶性的判断，属于中档题.

利用奇偶函数的定义分别判断即可.

【解答】

解：设 $h(x)=f(x)\cdot f(-x)$ ，因为 $f(x)$ 是定义在 R 上的函数，

所以 $h(x)$ 的定义域为 R ， $h(-x)=f(-x)\cdot f(x)=h(x)$ ，

所以 $h(x)$ 为偶函数，故 A 正确；

$t(x)=g(x)+g(-x)$ ，因为 $g(x)$ 是定义在 *R* 上的函数，所以 $t(x)$ 的定义域为 *R* ，

$t(-x)=g(-x)+g(x)=t(x)$ ，所以 $t(x)$ 为偶函数，故 *B* 错误；

设 $m(x)=f(g(x))$ ，因为 $f(x)$ ， $g(x)$ 都是定义在 *R* 上的函数，

所以 $m(x)$ 的定义域为 *R* ，因为 $g(x)$ 为奇函数， $f(x)$ 为偶函数，所以

$m(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x))=m(x)$ ，所以 $m(x)$ 为偶函数，故 *C* 错误；

设 $n(x)=f(x)-g(x)$ ，因为 $f(x)$ ， $g(x)$ 都是定义在 *R* 上的函数，所以 $n(x)$ 的定义域为 *R* ，

$n(x)+n(-x)=f(x)-g(x)+f(-x)-g(-x)=f(x)-g(x)-f(x)-g(x)=-2g(x)$ ，

因为 $g(x)$ 是不恒为 0 的函数，所以 $n(x)+n(-x)=0$ 不恒成立，

所以 $n(x)$ 不是奇函数，

$n(x)-n(-x)=f(x)-g(x)-[f(-x)-g(-x)]=f(x)-g(x)+f(x)+g(x)=2f(x)$ ，

因为 $f(x)$ 是不恒为 0 的函数，所以 $n(x)=n(-x)$ 不恒成立，

所以 $n(x)$ 不是偶函数，所以 $n(x)$ 是非奇非偶函数，故 *D* 正确，故选 AD.

10.【答案】*ACD*

【解析】【分析】

本题主要考查空间中点线面位置关系的判断，属于中档题.

利用线面、面面垂直的性质对选项一一判断即可.

【解答】

解：对于 *A*，$\because$ $m\perp\alpha$ ， $n\perp\alpha$ ，

$\therefore$由线面垂直的性质可得 $m//n$ ，故 *A* 正确；

对于 *B*， $m//\alpha$ ， $n//\alpha$ ，则 *m* 与 *n* 可能异面或相交或平行，故 *B* 错误；

对于 *C*， $\alpha\perp\beta$ ， $\alpha\cap\beta=l$ ， $m\subset\alpha$ ， $m\perp l$ ，

由面面垂直的性质定理知， $m\perp\beta$ ，故 *C* 正确，

对于 *D*，设 $\alpha\cap\delta=a$ ， $m\subset\delta$ ， $m//\alpha$ ，

则 $m//a$ ，设 $\beta\cap\gamma=b$ ， $m\subset\gamma$ ， $m//\beta$ ，

则 $m//b$ ，$\therefore$ $a//b$ ，又 $b\subset\beta$ ， $a\not\subset\beta$ ，

则 $a//\beta$ ，又 $a\subset\alpha$ ， $\alpha\cap\beta=l$ ，则 $a//l$ ，则 $m//l$ ，故 *D* 正确，

故选 ACD.

11.【答案】*AB*

【解析】【分析】