第六章　平面向量初步

6.2　向量基本定理与向量的坐标

6.2.1　向量基本定理

学习任务	核心素养
1．理解两向量共线的含义，并能用共线向量基本定理解决简单的几何问题．(**重点**) 2．知道平面向量基本定理的含义和基底的含义． 3．理解平面向量基本定理，会用基底表示向量．(**难点**)	1．通过共线向量基本定理的学习，培养数学运算和逻辑推理素养． 2．借助平面向量基本定理的学习与应用，提升数学运算及逻辑推理核心素养．

01

必备知识·情境导学探新知

情境与问题

通过上节课学习，我们知道可用结论“当存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$”判定两向量平行．对这个结论，思考下面的问题．

问题：(1)若实数 λ 不存在，$\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}$ 在什么条件下成立？

(2)若实数 λ 存在且唯一，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 在什么条件下成立？

(3)若实数 λ 存在且不唯一，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 在什么条件下成立？

[提示]　(1)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，或 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$．(2)$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$．(3)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$．

知识点 1　共线向量基本定理

1．共线向量基本定理

如果 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$，则存在__唯一__的实数 λ，使得__$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$__.

在共线向量基本定理中：

(1)$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，通常称为__$\boldsymbol{b}$能用$\boldsymbol{a}$__表示.

(2)其中的“唯一”指的是，如果还有 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$，则有__$\lambda=\mu$__.

思考 1．在共线向量基本定理中，为什么要求 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$？

[提示]　若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{0}/\!/\boldsymbol{b}$，但是 $\lambda\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$，从而 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 中的实数 λ 具有不确定性，进而不能说存在唯一一个实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

2．三点共线

如果 A，B，C 是三个不同的点，则它们共线的充要条件是存在实数 λ，使得$\overrightarrow{AB}=\underline{\lambda\overrightarrow{AC}}$.

体验 1．设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是两个不共线的向量，若向量 $\boldsymbol{m}=-\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2(k\in\mathbf{R})$ 与向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_1$ 共线，则 $k=($　　$)$

A．0　　B．1　　C．2　　D．$\frac{1}{2}$

D　[当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$\boldsymbol{m}=-\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$.

$\therefore\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{m}$，此时，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 共线．]

知识点2　平面向量基本定理

1．平面向量基本定理

如果平面内两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{c}$，存在唯一的实数对$(x，y)$，使得 $\boldsymbol{c}=$__$x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$__.

提醒 基底给定时，分解形式唯一．x，y 是被 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 唯一确定的数值．零向量的分解式是唯一的，即 $\boldsymbol{0}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$，且 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

体验 2．若 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $k_1=k_2=0$，那么下面对 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的判断正确的是(　　)

A．$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定共线　　B．$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定不共线

C．$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 一定垂直　　D．$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为 $\boldsymbol{0}$

B　[由平面向量基本定理，可知当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时，$k_1=k_2=0$，故选 B．]

2．基底

平面内不共线的两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 组成该平面上向量的一组基底，记为$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\}$，如果 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$，则称 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{c}$ 在基底$\{\boldsymbol{a}，\boldsymbol{b}\}$下的分解式.

思考 2．设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 是平面向量的一组基底，则 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 中可能有零向量吗？平面向量的基底唯一吗？

[提示]　平面向量基本定理的前提条件是 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线，若 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 中有零向量，而零向量和任意向量共线，这与定理的前提矛盾，故 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 中不可能有零向量；同一平面的基底可以不同，只要它们不共线．

体验 3．思考辨析(正确的画“√”，错误的画“×”)

(1)同一平面内只有不共线的两个向量可以作为基底． (　　)

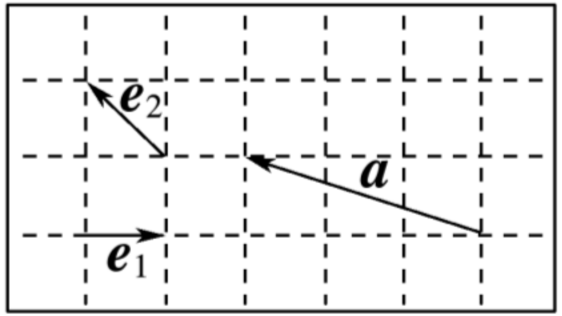
(2)**0** 能与另外一个向量 $\boldsymbol{a}$ 构成基底． (　　)

(3)平面向量的基底不是唯一的． (　　)

[提示]　平面内任意一对不共线的向量都可以作为基底，故(2)是错误的．(1)，(3)正确．

[答案]　(1)√　(2)×　(3)√

体验 4．如图，向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{a}$ 的起点与终点均在正方形网格的格点上，则向量 $\boldsymbol{a}$ 用基底 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 表示为(　　)



A．$\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$　　B．$-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$

C．$2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$　　D．$2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$

B　[$\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$．]

02

关键能力·合作探究释疑难

类型 1　共线向量基本定理的应用

【例 1】　(对接教材)已知向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 是不共线向量，$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{m}+x\boldsymbol{n}$.

(1)判断 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是否平行；

[解]　显然 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，即 $6\boldsymbol{m}-4\boldsymbol{n}=\lambda(3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})$，

$\therefore\begin{cases}6=3\lambda,\\-4=2\lambda,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\lambda=2,\\\lambda=-2,\end{cases}$ $\therefore\lambda$ 不存在. $\therefore\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行.

(2)若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，求 x 的值.

[解]　$\because \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$，$\therefore$ 存在实数 r，使得 $\boldsymbol{c}=r\boldsymbol{a}$.

$\therefore \boldsymbol{m}+x\boldsymbol{n}=r(3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n})$.

$\therefore \begin{cases}1=3r,\\ x=2r,\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}r=\dfrac{1}{3},\\ x=\dfrac{2}{3},\end{cases}$　$\therefore x=\dfrac{2}{3}$.

发现规律

利用共线向量基本定理可解决哪两类向量问题？

[提示]　(1)判定向量平行(先假设平行，用基本定理列方程，根据$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\mu_1\boldsymbol{e}_2=\lambda_2\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2$，其中$\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$不共线，列实数方程组，求解)；

(2)已知向量共线求参数.

[跟进训练]

1．已知非零向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$ 不共线.

(1)如果$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{CD}=3(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$，求证：$A$，$B$，$D$ 三点共线；

[解]　证明：因为$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{e}_1-8\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2=5(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=5\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$共线，又$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BD}$有公共点 B，所以 A，B，D 三点共线.

(2)欲使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 和 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，试确定实数 k 的值.

[解]　要使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 共线，

则存在实数 λ，使 $k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=\lambda(\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2)$，

即$(k-\lambda)\boldsymbol{e}_1=(\lambda k-1)\boldsymbol{e}_2$.

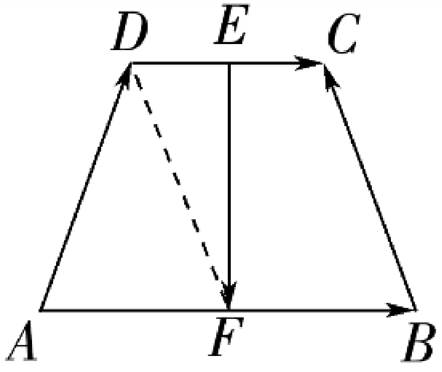
由于 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，故$\begin{cases}k-\lambda=0,\\\lambda k-1=0,\end{cases}$ 所以 $k=\pm1$.

▶ 类型 2　用基底表示向量

【例 2】　已知梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel DC$，且 $AB=2CD$，E，F 分别是 DC，AB 的中点，设$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，试以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为基底表示$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{EF}$.

[思路探究]　$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$是两个不共线向量，于是可以看作一组基底，那么平面中的任一向量可以用$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$来表示，关键是利用向量线性运算确定系数.

[解]　如图所示，连接 FD，



$\because DC // AB$，$AB=2CD$，

E，F 分别是 DC，AB 的中点，

$\therefore DC \underline{\underline{//}} FB$.

$\therefore$ 四边形 $DCBF$ 为平行四边形.

$\therefore \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$，

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{FD}-\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$$

$$=-\left(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}.$$