第四章

常微分方程数值解法

- 本章研究常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

的数值解法．这里假定$f(x, y)$满足解的存在唯一性定理及相当光滑等条件，从而(1)有唯一解 $y(x)$.

- 本章的数值解法，它不是求方程的解$y(x)$的解析表达式或近似表达式，而是直接求一系列离散点上的解值$y(x_i)$的近似值y_i. 利用计算机解微分方程主要使用数值方法.

- 取一系列点

$$x_0, \qquad x_1, \qquad \dots, \qquad x_n, \dots$$

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)\approx y_1, \dots, y(x_n)\approx y_n, \dots$$

$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$称为数值解.

$h=x_n-x_{n-1}$称为步长.

数值解法

- 利用离散化方法将问题(1)转化为关于离散量的相应问题，相应问题的解y_n作为 $y(x_n)$的近似结果.
- 常用离散化方法：数值微分，数值积分，Taylor展开等.
- 问题(1)可以有很多种数值解法，可以建立许多数值公式.

Euler折线法与改进的Euler法

- 问题 (1)等价于

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t$$

- 假设解y(x)在点xn上的函数值y(xn),那么有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$$

- 用不同的近似公式计算此式中的定积分值,就得到解初值问题的不同数值解法.

Euler法

- 用矩形求积公式计算 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\mathrm{d}x$
- 有 y(x1)≈y(x0)+hf(x0,y(x0))= y0+hf(x0,y0)= y1
- y(x2)≈y(x1)+hf(x1,y(x1)) ≈ y1+hf(x1,y1)= y2
- … …
- y(xn)≈y(xn-1)+hf(xn-1,y(xn-1))≈yn-1+hf(xn-1,yn-1)=yn
- y(xn+1)≈y(xn)+hf(xn,y(xn))≈yn+hf(xn,yn) =yn+1

改进的Euler法〔梯形法〕

- 用梯形求积公式计算积分得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

- (3)
- 这个方法称为改进的Euler法或梯形法
- 运用它常采用下面的迭代格式

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases}$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots; n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases} \quad (k = 0,1,2,\cdots;\ n = 0,1,2,\cdots)$$

下面讨论$\{y_{n+1}{}^{(k)}\}$的收敛性.由于$f(x, y)$满足解的存在唯一性定理的条件，从而

$$\left|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}\right| = \frac{h}{2}\left|f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)}\right|$$

$$\le \frac{hL}{2}\left|y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}\right| \le \left(\frac{hL}{2}\right)^k \left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|$$

只要$hL/2<1$, $\{y_{n+1}{}^{(k)}\}$就收敛，设 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n+1}^{(k)} = y_{n+1}$，

当$k\to\infty$时，等式两边取极限有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

因此只要h足够小，就能保证$\{y_{n+1}{}^{(k)}\}$收敛于(3)中的y_{n+1}

Euler预报—校正公式

- 假设改进的Euler方法只迭代一次，便得Euler预报-校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

Euler预报—校正公式

- Euler预报-校正公式也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$$

- 局部截断误差
- 设$y_n=y(x_n)$，那么称$y(x_{n+1})-y_{n+1}$为方法的局部截断误差.
- 方法的阶数
- 假设数值方法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，那么称这种方法为p阶方法，这里p为非负整数.

- 由泰勒展开式知

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

- 设$y_n = y(x_n)$
- 设对于Euler法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2)$$

当$h \to 0$时，$y(x_{n+1}) - y_{n+1}$是h^2的同阶无穷小

Euler公式

yn+1=yn+hf(xn,yn) 〔n=0,1,2,… 〕

它是显格式，该方法的局部截断误差为O(h2)，是一阶方法.

- 对于Euler预报-校正公式，利用泰勒展开式
- $k_1=hf(x_n,y_n)=hf(x_n,y(x_n))=hy'(x_n)$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = hf(x_n + h, y(x_n) + k_1)$$

$$= h[f(x_n, y(x_n)) + h\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + k_1 \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + \cdots]$$

$$= hf(x_n, y(x_n)) + h^2[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + y'(x_n)\frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] +$$

$$= hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + \cdots$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2$$

$$= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + \cdots$$

$$y(x_{n+1})\text{-}y_{n+1}=O(h^3)$$

当$h\to 0$时，$y(x_{n+1})\text{-}y_{n+1}$是$h^3$的同阶无穷小.

Euler预报—校正公式

- $$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

$$(n = 0, 1, 2, \mathrm{L}\ )$$

- 局部截断误差为$O(h^3)$，是二阶方法.

- 单步法：假设求yn+1，只需利用它前一步的
- 信息yn，那么称这种方法为单步法。它由
- y0出发，可求得y1，y2，y3 …
- 多步法：假设求yn+1，需利用它前面至少两个点的息，那么称这种方法为多步法.
- Euler折线法，Euler预报—校正公式，Runge-Kutta方法是单步法; Adams外推法，

Runge-Kutta方法

- Taylor展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

$$+ \frac{h^2}{2!}[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + \cdots$$

- 理论上讲，只要解y(x)充分光滑，通过保存Taylor展开式的假设干项就可得到任意阶的近似公式，但计算y(x)的各阶导数很麻烦。可间接利用这种思想.

- Euler法也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

- 其局部截断误差为$O(h^2)$ ，是一阶方法. 每步计算f的值一次.

- Euler预报-校正公式也可写成形式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{2}k_1 + \dfrac{1}{2}k_2 \\
k_1 = hf(x_n, y_n) \\
k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)
\end{cases}
$$

- 局部截断误差为O(h3)，是二阶方法．每步计算f的值二次．
- 可以通过增加计算f的值的次数，提高公式的阶数〔精度〕．

- 以f在不同点上的函数值的线性组合来代替yn+1 –yn，其中有一些可待定选取的待定参数，通过Taylor展开式确定这些待定参数使建立的数值方法按要求到达一定的阶数，这种思想就是Runge-Kutta方法的思想.

二阶Runge-Kutta公式

- 一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R_1 k_1 + R_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + ah, y_n + bk_1) \end{cases}$$

其中R_1, R_2, a, b为待定常数.

其局部截断误差为$O(h^3)$，是二阶方法. 每步计算f的值二次.

- 设$y_n=y(x_n)$

$k_1=hf(x_n, y_n)=hf(x_n, y(x_n))$

把k_2中f在$(x_n, y(x_n))$处泰勒展开

$$K_2 = hf(x_n + ah, y(x_n) + bK_1) = h[f(x_n, y(x_n))$$

$$+ah\frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y(x_n)) + bk_1\frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y(x_n)) + O(h^2)]$$

$$= hf(x_n, y(x_n))$$

$$+h^2[a\frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y(x_n)) + bf(x_n, y(x_n))\frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y(x_n))] + O(h^3)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + \cdots$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!}[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + \cdots$$

- 再将k1, k2代入yn+1中，

$$y_{n+1} = y_n + R_1 K_1 + R_2 K_2$$

$$= y(x_n) + h(R_1 + R_2) f(x_n, y(x_n))$$

$$+ h^2[aR_2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bR_2 f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n))] + O(h^3)$$

- 将其与y(xn+1)泰勒展开式比较，要使y(xn+1)-yn+1=0(h3)，含h0，h1，h2的项相同．即有