



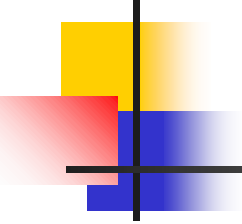
第四章

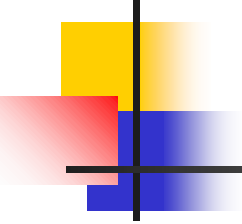
常微分方程数值解法

- 
-
- 本章研究常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

的数值解法. 这里假定 $f(x, y)$ 满足解的存在唯一性定理及相当光滑等条件, 从而(1)有唯一解 $y(x)$.

- 
-
- 本章的数值解法，它不是求方程的解 $y(x)$ 的解析表达式或近似表达式，而是直接求一系列离散点上的解值 $y(x_i)$ 的近似值 y_i 。利用计算机解微分方程主要使用数值方法。

- 
-
- 取一系列点

$$x_0, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_n, \dots$$

$$y(x_0)=y_0, y(x_1)\approx y_1, \dots, y(x_n)\approx y_n, \dots$$

$y_0, y_1, \dots, y_n, \dots$ 称为数值解.

$h = x_n - x_{n-1}$ 称为步长.

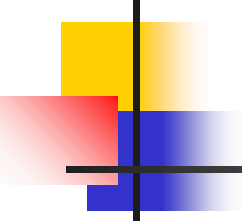


数值解法

- 利用离散化方法将问题(1)转化为关于离散量的相应问题，相应问题的解 y_n 作为 $y(x_n)$ 的近似结果.
- 常用离散化方法：数值微分，数值积分，**Taylor**展开等.
- 问题(1)可以有很多种数值解法，可以建立许多数值公式.



Euler折线法与改进的Euler 法

- 
-
- 问题 (1)等价于

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

- 假设解 $y(x)$ 在点 x_n 上的函数值 $y(x_n)$,那么有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$$

- 用不同的近似公式计算此式中的定积分值,就得到解初值问题的不同数值解法.



Euler法

- 用矩形求积公式计算 $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx$
- 有 $y(x_1) \approx y(x_0) + hf(x_0, y(x_0)) = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_1$
- $y(x_2) \approx y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)) \approx y_1 + hf(x_1, y_1) = y_2$
-
- $y(x_n) \approx y(x_{n-1}) + hf(x_{n-1}, y(x_{n-1})) \approx y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = y_n$
- $y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \approx y_n + hf(x_n, y_n) = y_{n+1}$



改进的Euler法〔梯形法〕

- 用梯形求积公式计算积分得

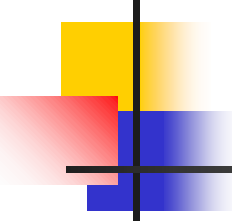
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad (n = 0, 1, 2, L)$$

(3)

- 这个方法称为改进的**Euler**法或梯形法
- 运用它常采用下面的迭代格式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases}$$

$(k = 0, 1, 2, L ; n = 0, 1, 2, L)$



$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})] \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots; n = 0, 1, 2, \dots)$$

下面讨论 $\{y_{n+1}^{(k)}\}$ 的收敛性. 由于 $f(x, y)$ 满足解的存在唯一性定理的条件, 从而

$$\begin{aligned} |y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}^{(k)}| &= \frac{h}{2} |f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k-1)})| \\ &\leq \frac{hL}{2} |y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}^{(k-1)}| \leq \left(\frac{hL}{2}\right)^k |y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}| \end{aligned}$$

只要 $hL/2 < 1$, $\{y_{n+1}^{(k)}\}$ 就收敛, 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n+1}^{(k)} = y_{n+1}$,

当 $k \rightarrow \infty$ 时, 等式 $y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})]$ 两边取极限, 有

因此只要 h 足够小, 就能保证 $\{y_{n+1}^{(k)}\}$ 收敛于 (3) 中的 y_{n+1}



Euler预报—校正公式

- 假设改进的Euler方法只迭代一次，便得Euler预报-校正公式

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

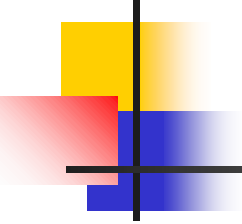
$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$



Euler预报—校正公式

- Euler预报-校正公式也可写成形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$$

- 
-
- 局部截断误差
 - 设 $y_n=y(x_n)$ ，那么称 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$ 为方法的局部截断误差.
 - 方法的阶数
 - 假设数值方法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$ ，那么称这种方法为 p 阶方法，这里 p 为非负整数.

- 
- 由泰勒展开式知

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + L$$

- 设 $y_n = y(x_n)$
- 设对于 **Euler**法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) = y(x_n) + hy'(x_n)$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^2)$$

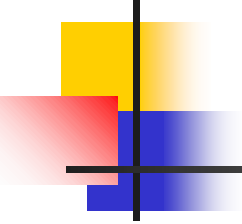
当 $h \rightarrow 0$ 时, $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 是 h^2 的同阶无穷小



Euler公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

它是显格式，该方法的局部截断误差为 $O(h^2)$ ，是一阶方法。

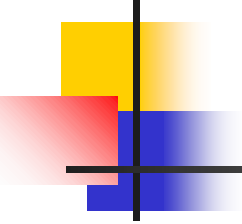
- 
- 对于Euler预报-校正公式，利用泰勒展开式
 - $k_1 = hf(x_n, y_n) = hf(x_n, y(x_n)) = hy'(x_n)$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = hf(x_n + h, y(x_n) + k_1)$$

$$= h \left[f(x_n, y(x_n)) + h \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + k_1 \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + L \right]$$

$$= hf(x_n, y(x_n)) + h^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + y'(x_n) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] +$$

$$= hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + L$$



$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2}h^2 y''(x_n) + L\end{aligned}$$

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$ 是 h^3 的同阶无穷小.



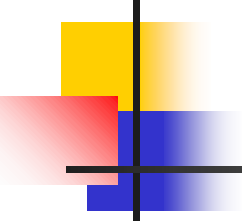
Euler预报—校正公式



$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

$(n = 0, 1, 2, \dots)$

- 局部截断误差为 $O(h^3)$ ，是二阶方法.

- 
- 单步法：假设求 y_{n+1} ，只需利用它前一步的信息 y_n ，那么称这种方法为单步法。它由 y_0 出发，可求得 y_1 ， y_2 ， y_3 ...
 - 多步法：假设求 y_{n+1} ，需利用它前面至少两个点的息，那么称这种方法为多步法。
 - Euler折线法， Euler预报—校正公式， Runge-Kutta方法是单步法； Adams外推法，



Runge-Kutta方法



- Taylor展开式

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + L$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$$

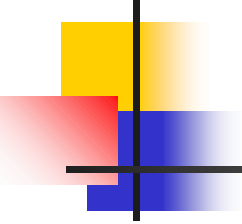
$$+ \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] + L$$

- 理论上讲，只要解 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ 充分光滑，通过保存Taylor展开式的假设干项就可得到任意阶的近似公式，但计算 $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ 的各阶导数很麻烦。可间接利用这种思想。

- 
-
- Euler法也可写成形式

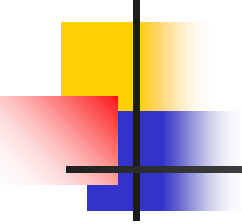
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + k_1 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \end{cases}$$

- 其局部截断误差为 $O(h^2)$ ，是一阶方法. 每步计算 f 的值一次.

- 
- Euler预报-校正公式也可写成形式

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{array} \right.$$

- 局部截断误差为 $O(h^3)$ ，是二阶方法。每步计算 f 的值二次。
- 可以通过增加计算 f 的值的次数，提高公式的阶数〔精度〕。

- 
-
- 以 f 在不同点上的函数值的线性组合来代替 $y_{n+1} - y_n$ ，其中有一些可待定选取的待定参数，通过Taylor展开式确定这些待定参数使建立的数值方法按要求到达一定的阶数，这种思想就是Runge-Kutta方法的思想。



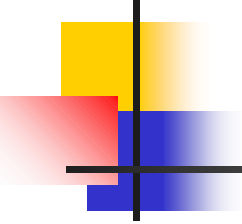
二阶Runge-Kutta公式

- 一般形式

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + R_1k_1 + R_2k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + ah, y_n + bk_1) \end{cases}$$

其中 R_1, R_2, a, b 为待定常数.

其局部截断误差为 $O(h^3)$, 是二阶方法. 每步计算 f 的值二次.



■ 设 $y_n = y(x_n)$

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hf(x_n, y(x_n))$$

把 k_2 中 f 在 $(x_n, y(x_n))$ 处泰勒展开

$$K_2 = hf(x_n + ah, y(x_n) + bK_1) = h[f(x_n, y(x_n))$$

$$+ ah \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bk_1 \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) + O(h^2)]$$

$$= hf(x_n, y(x_n))$$

$$+ h^2 \left[a \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bf(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] + O(h^3)$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!} y''(x_n) + L$$

$$= y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] + L$$

- 再将k1, k2代入yn+1中,

$$y_{n+1} = y_n + R_1 K_1 + R_2 K_2$$

$$= y(x_n) + h(R_1 + R_2) f(x_n, y(x_n))$$

$$+ h^2 \left[aR_2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_n, y(x_n)) + bR_2 f(x_n, y(x_n)) \frac{\partial}{\partial y} f(x_n, y(x_n)) \right] + O(h^3)$$

- 将其与y(xn+1)泰勒展开式比较, 要使
 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$, 含h0, h1, h2的项相同.
 即有

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/368052012016007005>