广东省清远市三校2023-2024学年高一下学期4月期中联合考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知复数z满足$z(1+\mathrm{i})=|1-\mathrm{i}|$，i为虚数单位，则$z=$（　）

A．i　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$　　C．$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

2．已知向量$\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(1,-1)$，$\vec{c}=(4,5)$．若$\vec{a}$与$\vec{b}+\lambda\vec{c}$垂直，则实数λ的值为（　）

A．$\frac{1}{14}$　　B．$-\frac{4}{7}$　　C．3　　D．$\frac{4}{11}$

3．下列说法正确的是（　）

A．各侧面都是正方形的四棱柱一定是正方体

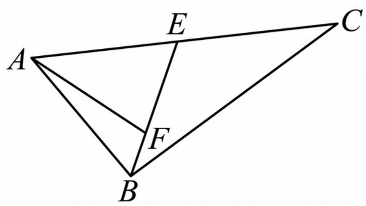
B．球的直径是连接球面上两点并且经过球心的线段

C．以直角三角形的一边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥

D．用一个平面截圆锥，得到一个圆锥和圆台

4．如图所示，点E为$\triangle ABC$的边AC的中点，F为线段BE上靠近点B的三等分点，则

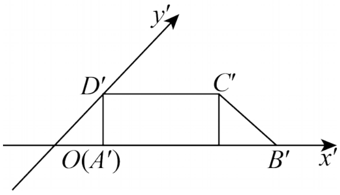
$\overrightarrow{AF}=$（　）



A．$\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　　B．$\frac{4}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$　　C．$-\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$　　D．$-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

5．图，四边形$ABCD$的斜二测画法直观图为等腰梯形$A'B'C'D'$．已知$A'B'=4$，$C'D'=2$，

则下列说法正确的是（   ）



A．$AB=2$　　　　B．$A'D'=2\sqrt{2}$

C．四边形$ABCD$的周长为$4+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　D．四边形$ABCD$的面积为$6\sqrt{2}$

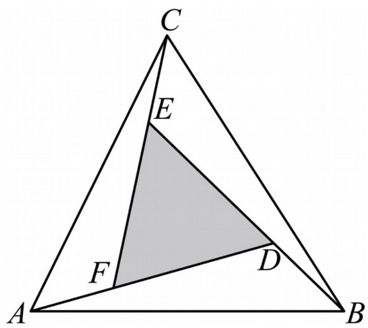
6．已知平行四边形$ABCD$中，$AB=4, AD=2, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4$，点$P$在线段$CD$上（不包含端点），则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是（   ）

A．$[-1,8)$　　B．$(0,8)$　　C．$(1,10)$　　D．$(0,10)$

7．已知函数$f(x)=\tan(\omega x-\varphi)(\omega>0, 0<\varphi<\pi)$与$x$轴交于$A$，$B$两点，且线段$AB$长度的最小值为$\frac{\pi}{3}$，若将函数$f(x)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位后恰好为奇函数，则$\varphi$的值为（   ）

A．$\frac{\pi}{4}$　　B．$\frac{\pi}{2}$　　C．$\frac{3\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$

8．我国汉代数学家赵爽为了证明勾股定理，创造了一幅“勾股圆方图”，后人称其为“赵爽弦图”，类比赵爽弦图，用3个全等的小三角形拼成了如图所示的等边$\triangle ABC$，若$EF=2, \sin\angle ACF=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，则$AC$=（   ）



A．8　　B．7　　C．6　　D．5

二、多选题

9．将函数$f(x)=\sin x$的图象上所有点的纵坐标不变，横坐标缩短到原来的$\frac{1}{3}$，再将所得图象向右平移$\frac{\pi}{12}$是个单位长度后得到函数$g(x)$的图象，则下列说法正确的是（　）

A．函数$f(x)$是奇函数　　B．函数$f(x)$的一个对称中心是$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

C．若$x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$，则$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$　　D．函数$g(x)$的一个对称中心是$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$

10．欧拉公式$\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$是由瑞士著名数学家欧拉创立，该公式将指数函数的定义域扩大到复数集，建立了三角函数与指数函数的关联，在复变函数论里面占有非常重要的地位，被誉为数学中的天桥．依据欧拉公式，下列说法中正确的是（　）

A．$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}}$对应的点位于第二象限　　B．$\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$为纯虚数

C．$\frac{\mathrm{e}^{x\mathrm{i}}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$的模长等于$\frac{1}{2}$　　D．$\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$的共轭复数为$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

11．已知$\triangle ABC$的内角A、B、C所对的边分别为a、b、c，则下列四个命题中正确的命题是（　）

A．若 $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则 $\triangle ABC$ 一定是等边三角形

B．若 $a\cos A=b\cos B$，则 $\triangle ABC$ 一定是等腰三角形

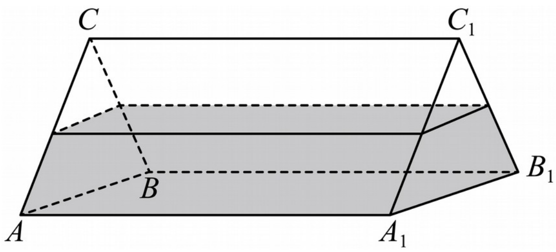
C．若 $a^2+b^2-c^2>0$，则 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形

D．若 $\tan A+\tan B+\tan C>0$，则 $\triangle ABC$ 一定是锐角三角形

三、填空题

12．已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|=2,\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=2$，则向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为______

13．如图，一个直三棱柱形容器中盛有水，且侧棱 $AA_1=16$．若侧面 AA_1B_1B 水平放置时，液面恰好过 AC,BC,A_1C_1,B_1C_1 的中点．当底面 ABC 水平放置时，液面高为______．



14．已知 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，$\angle ABC$ 的角平分线交 AC 于点 D，且 $BD=\sqrt{3}$，则 $a+c$ 的最小值为__．

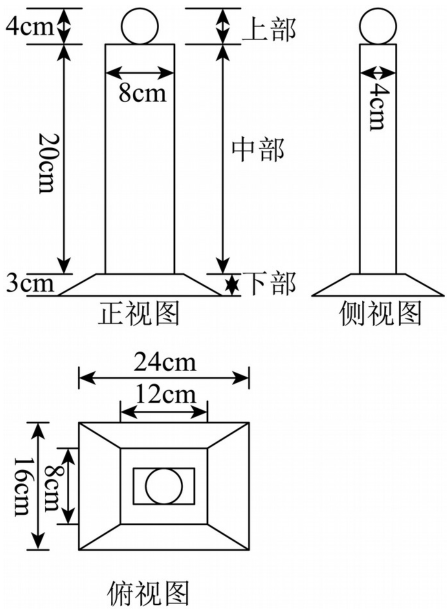
四、解答题

15．已知平面向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(-3,-2)$．

(1)若 $\vec{c}\perp\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$，且 $\left|\vec{c}\right|=\sqrt{5}$，求 $\vec{c}$ 的坐标；

(2)若 $\vec{a}$ 与 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 的夹角为锐角，求实数 λ 的取值范围.

16．如图是一个奖杯的三视图.

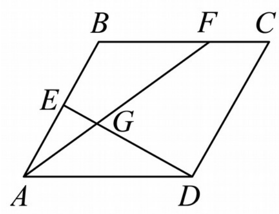


(1)求下部四棱台的侧面积；

(2)求奖杯的体积（结果取整数，π 取 3）

17．如图，在菱形 $ABCD$ 中，$AB=4,\angle BAD=60^{\circ}$，$E$，$F$ 分别是边 AB，BC 上的点，且

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$，$\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{FC}$，连接 ED、AF，交点为 G.



(1)设 $\overrightarrow{AG}=t\overrightarrow{AF}$，求 t 的值；

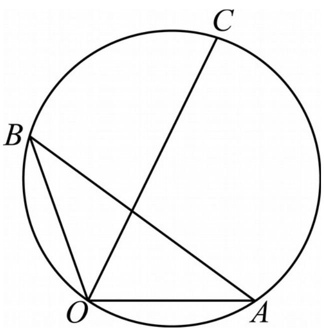
(2)求 $\angle EGF$ 的余弦值.

18．已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^{2}x+\frac{1}{2}$.

(1)若$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{3}$，且$\alpha \in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求$\sin\alpha$的值；

(2)在锐角$\triangle ABC$中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，若$f\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{2}$，求$\frac{a}{b}$的取值范围.

19．如图，已知$|\overrightarrow{OA}|=1,|\overrightarrow{OB}|=2,\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OB}$的夹角为$\frac{2\pi}{3}$，点$C$是$\triangle ABO$的外接圆优弧$\overset{\frown}{AB}$上的一个动点（含端点$A$，$B$），记$\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}$的夹角为$\theta$.



(1)求$\triangle ABO$外接圆的直径$2R$；

(2)试将$|\overrightarrow{OC}|$表示为θ的函数；

(3)设点M满足$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中$x,y\in\mathbf{R}$，求$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OM}$的最大值.

参考答案：

1．B

【分析】根据模长公式结合复数的四则运算求解.

【详解】由题意可知：$\left|1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{1^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{2}$，

由$z\left(1+\mathrm{i}\right)=\left|1-\mathrm{i}\right|=\sqrt{2}$，可得$z=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}\left(1-\mathrm{i}\right)}{\left(1+\mathrm{i}\right)\left(1-\mathrm{i}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

故选：B.

2．A

【分析】首先求出$\vec{b}+\lambda\vec{c}$的坐标，依题意$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\lambda\vec{c}\right)=0$，根据数量积的坐标运算得到方程，

解得即可.

【详解】因为$\vec{b}=(1,-1)$，$\vec{c}=(4,5)$，所以$\vec{b}+\lambda\vec{c}=\left(1,-1\right)+\lambda\left(4,5\right)=\left(4\lambda+1,5\lambda-1\right)$，

又$\vec{a}=(1,2)$且$\vec{a}$与$\vec{b}+\lambda\vec{c}$垂直，

所以$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\lambda\vec{c}\right)=1\times\left(4\lambda+1\right)+2\times\left(5\lambda-1\right)=0$，解得$\lambda=\frac{1}{14}$.

故选：A

3．B

【分析】根据几何体的结构特征逐项分析判断.

【详解】对于A：虽然各侧面都是正方形，但底面不一定是正方形，

所以该四棱柱不一定是正方体，故A错误；

对于B：球的直径的定义即为“连接球面上两点并且经过球心的线段”，故B正确；

对于C：以直角三角形的直角边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是圆锥，

以直角三角形的斜边所在直线为轴旋转一周所得的旋转体是两个共底面的圆锥组成的几何体，

故C错误；

对于D：用一个平行于底面的平面截圆锥，得到一个圆锥和圆台，故D错误；

故选：B.

4．C

【分析】根据平面向量的线性运算结合图像将$\overrightarrow{AF}$用$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$表示，即可得出答案.

【详解】解：$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

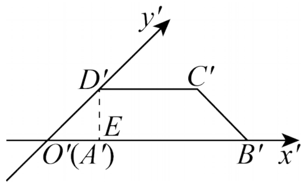
$=\frac{1}{6}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})-\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

故选：C.

5．D

【分析】过D'作$D'E\perp O'B'$交$O'B'$于点E，求出$A'D'$，即可判断B，再还原平面图，求出相应的线段长，即可判断.

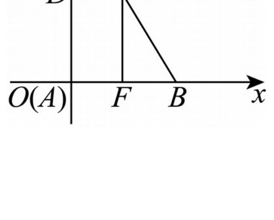
【详解】如图过D'作$D'E\perp O'B'$交$O'B'$于点E，



由等腰梯形$A'B'C'D'$且$\angle D'O'B'=45^{\circ}$，又$A'B'=4$，$C'D'=2$，可得$\triangle A'D'E$是等腰直角三角形，

即$A'D'=\sqrt{2}A'E=\frac{1}{2}\times\left(4-2\right)\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$，故B错误；

还原平面图如下图，



则 $AB=A'B'=4$， $CD=C'D'=2$， $AD=2A'D'=2\sqrt{2}$，故 A 错误；

过 C 作 $CF\perp AB$ 交 AB 于点 F，则 $AF=DC=2$，

由勾股定理得 $CB=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，

故四边形 $ABCD$ 的周长为： $4+2+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}=6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}$，即 C 错误；

四边形 $ABCD$ 的面积为： $\frac{1}{2}\times(4+2)\times2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$，即 D 正确.

故选：D.

6．A

【分析】根据平面向量的数量积的定义，由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4$ 可得 $A=\frac{\pi}{3}$，再以 A 为原点，以 AB 所在的直线为 x 轴，以 AB 的垂线为 y 轴，建立坐标系，设 $P\left(x,\sqrt{3}\right)(1<x<5)$，进而根据向量坐标的线性运算即数量积的坐标表示可得 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(x-2)^2-1$，结合二次函数的性质即可求解.

【详解】∵ $AB=4$， $AD=2$， $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4$，

∴ $\left|\overline{AB}\right|\times\left|\overline{AD}\right|\times\cos A=4$，

即 $\cos A=\frac{1}{2}$，即 $A=\frac{\pi}{3}$，

以 A 为原点，以 AB 所在的直线为 x 轴，以 AB 的垂线为 y 轴，建立如图所示的坐标系，

$\therefore A(0,0)$，$B(4,0)$，$D(1,\sqrt{3})$，$C(5,\sqrt{3})$，

设$P(x,\sqrt{3})(1<x<5)$，

$\therefore \overrightarrow{PA}=(-x,-\sqrt{3}),\overrightarrow{PB}=(4-x,-\sqrt{3})$，

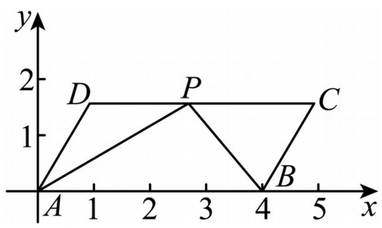
$\therefore \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x(x-4)+3=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$，

设$f(x)=(x-2)^2-1$，$\therefore f(x)$在$(1,2)$上单调递减，在$[2,5)$上单调递增，

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=-1$，$f(x)<f(5)=8$，

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$的取值范围是$[-1,8)$.

故选：A.



7．D

【分析】根据题意求得$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{\pi}{3}$，得到$\omega=3$，结合三角函数的图象变换，

得到$g(x)=\tan(3x+\frac{\pi}{4}-\varphi)$，由$g(x)$为奇函数，求得$\varphi=\frac{\pi\pi}{4}-\frac{k}{2},k\in Z$，进而求得$\varphi$的值.

【详解】因为函数$f(x)=\tan(\omega x-\varphi)$与$x$轴交于$A$，$B$两点，且线段$AB$长度的最小值为$\frac{\pi}{3}$，

可得函数$f(x)$的最小正周期为$T=\frac{\pi}{3}$，所以$\omega=\frac{2\pi}{T}=3$，所以$f(x)=\tan(3x-\varphi)$，

将函数$f\left(x\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，得到$g\left(x\right)=\tan(3x+\frac{\pi}{4}-\varphi)$，

又因为$g\left(x\right)$为奇函数，可得$\frac{\pi\pi}{4}-\varphi=\frac{k}{2},k\in Z$，即$\varphi=\frac{\pi\pi}{4}-\frac{k}{2},k\in Z$，

因为$0<\varphi<\pi$，当$k=0$时，可得$\varphi=\frac{\pi}{4}$；当$k=-1$时，可得$\varphi=\frac{3\pi}{4}$，

所以φ的值为$\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$.

故选：D.

8．B

【分析】在$\triangle ACF$中，设$AF=CE=t$，根据题意利用正弦定理可得$AC=\frac{7}{3}t$，然后利用余弦定理即可求解.

【详解】在$\triangle ACF$中，$\angle AFC=180^{\circ}-60^{\circ}=120^{\circ}$，设$AF=CE=t$，则$CF=2+t$，

由正弦定理可知，$\frac{AF}{\sin\angle ACF}=\frac{AC}{\sin\angle AFC}$，即$\frac{t}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，则$AC=\frac{7}{3}t$，

在$\triangle ACF$中，$\left|AC\right|^{2}=\left|AF\right|^{2}+\left|CF\right|^{2}-2\left|AF\right|\left|CF\right|\cos\angle AFC$，

$\frac{49}{9}t^{2}=t^{2}+\left(2+t\right)^{2}-2t\left(t+2\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，又$t>0$，则$t=3$，故$AC=\frac{7}{3}t=7$，

故选：B.

9．AC

【分析】对于A、B选项，根据正弦函数的性质即可判定；对于C、D选项，利用三角函数图像变换求解析式，再利用其性质判定选项即可.

【详解】因为$\sin x+\sin\left(-x\right)=0\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$，故A正确；

正弦函数的对称中心为$\left(k\pi,0\right)\left(k\in Z\right)$，故B错误；

根据三角函数的图象变换可得：$g\left(x\right)=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$，

令$3\boldsymbol{\pi}-\frac{\pi\pi\pi\pi}{4}=\frac{}{2}+k\ \Rightarrow x=\frac{}{4}+\frac{k}{3}$，故其对称轴为$x=\frac{\pi\pi}{4}+\frac{k}{3}\left(k\in Z\right)$，若$x_1+x_2=\frac{\pi}{2}$，由对称性

可得，显然$g\left(x_1\right)=g\left(x_2\right)$成立，故C正确；

令$3\boldsymbol{\pi}Z\frac{\pi\pi\pi}{4}=k\ \Rightarrow x=\frac{}{12}+\frac{k}{3}\left(k\in\ \right)$，故其对称中心为$\left(\frac{\pi\pi}{12}+\frac{k}{3},0\right)\left(k\in Z\right)$，

显然无论k取何值$\frac{\pi\pi\pi}{12}+\frac{k}{3}\neq\frac{}{6}$，故D错误.

故选：AC

10．ACD

【分析】根据题意结合复数的相关概念与运算逐项分析判断.

【详解】对于A项：由题意可得：$e^{2i}=\cos 2+i\sin 2$，则其对应的点为$\left(\cos 2,\sin 2\right)$，

∵$2\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则$\cos 2<0,\sin 2>0$，

∴e^{2i}对应的点位于第二象限，故A项正确；

对于B项：由题意可得：$e^{\pi i}=\cos\pi i\sin\pi 1\quad=-$ 为实数，故B项错误；

对于C项：由题意可得：

$$\frac{e^{xi}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(\cos x+i\sin x\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)-\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)i}{4}=\frac{1\pi 1\pi}{2}\sin\left(x+\frac{}{3}\right)-i\left[\frac{}{2}\cos\left(x+\frac{}{3}\right)\right],$$