高一数学试题

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷 1-2 页，第Ⅱ卷 2-4 页，共 150 分，测试时间 120 分钟.

注意事项：

选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在测试卷上.

第Ⅰ卷 选择题（共 58 分）

一、选择题（本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{1-2i}=i$（i 为虚数单位），则 z 的共轭复数为（　　）

A. $1-2i$　　B. $-1-2i$　　C. $2+i$　　D. $2-i$

2. 已知向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,1)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $\lambda=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1

3. 已知 l，m 是两条不重合的直线，α，β 是两个不重合的平面，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 $l\perp m$，$m\parallel\alpha$，则 $l\perp\alpha$

B. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$l\parallel m$，则 $m\parallel\beta$

C. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$m\subset\alpha$，$m\perp l$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则 $l\parallel m$

4. 已知 $\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-1$，则 $\tan\left(\alpha+\frac{3}{4}\pi\right)=$（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. 3　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. -3

5. 一个盒子里装有除颜色外完全相同的 5 个小球，其中有编号分别为 1，2，3 的红球 3 个，编号分别为 2，3 的白球 2 个，从盒子中任取 2 个小球（假设取到任何一个小球的可能性相同）. 则在取出的 2 个小球中，至少有一个白球且小球编号最小值为 2 的概率是（　　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{3}{10}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

6. 在△ABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $2\sin C=\sqrt{6}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=ab$，则 $A=$（　　）

A. 15°　　B. 60°　　C. 75°　　D. 105°

7. 已知 4 个数据的平均值为 6，方差为 3，现加入数据 4 和 8，则这 6 个数据的方差为（　　）

A. 3　　B. 5　　C. $\frac{13}{3}$　　D. $\frac{10}{3}$

8. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是边长为 1 的等边三角形，侧棱 AA_1 长为 2，一质点从 A 出发沿三棱柱的棱前进，若经过的第一条棱为 AA_1，且第 $n+2$ 条棱与第 n 条棱异面，则该质点经过 2024 条棱后运动的总路程为（　　）

A. 2696　　B. 2098　　C. 2699　　D. 2700

二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．）

9. 已知复数 $z \neq 0$，下列结论正确的有（　　）

A. $\overline{z^2}=\left(\overline{z}\right)^2$　　B. $z\overline{z}=|z|^2$

C. 若 $z^2=\left(\overline{z}\right)^2$，则 z 为纯虚数　　D. 若 $z+\overline{z}=0$，则 z 为纯虚数

10. 某同学记录了连续 5 天的平均气温，已知这组数据均为整数，将该组数据从小到大排列，中位数为 20，唯一众数为 22，极差为 5，则（　　）

A. 该组数据中最小的数据可能为 16　　B. 该组数据的平均数不大于 20

C. 该组数据的 60%分位数是 21　　D. 该组数据的第二个数字是 18

11. 棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，用一平面去截，则下列说法正确的是（　　）

A. 当截面为三角形时，截面一定为锐角三角形

B. 当截面是梯形时，截面不可能为直角梯形

C. 若 E 为 AB 的中点，平面 A_1EC 截正方体所得截面面积为 $4\sqrt{6}$

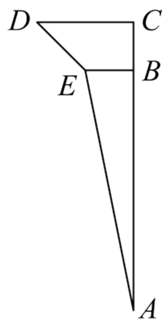
D. 过棱 CC_1，A_1D_1，A_1B_1 的中点作正方体的截面，截面多边形的周长为 $\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

第Ⅱ卷 非选择题（共 92 分）

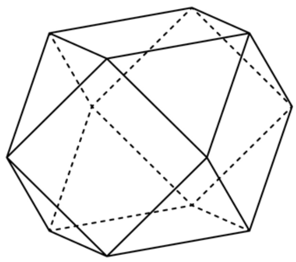
三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

12. 抛掷两个质地均匀的骰子，则“抛掷的两个骰子的点数之和是 6”的概率为______.

13. 某种零件是由如图所示的平面图形以 AC 为轴旋转一周而成，其中 $AB \perp BE$，$BE \parallel CD$，$BC=BE=1$，$CD=2$，$AB=5$，则该零件的体积为______.



14. “阿基米德多面体”也称半正多面体，是由边数不全相同的正多边形围成的多面体，它体现了数学的对称美. 如图是以正方体的各条棱的中点为顶点的多面体，这是一个有八个面为正三角形，六个面为正方形的‘阿基米德多面体”，若该多面体的棱长为 2，则该多面体外接球的表面积为______.



四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

15. 已知 X，Y 两组各有 5 位病人，他们服用某种药物后的康复时间（单位：天）记录如下：

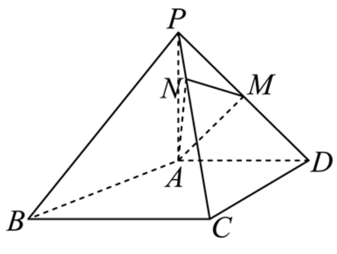
X 组：10，11，12，13，14，　　　Y 组：12，13，15，14，a

假设所有病人的康复时间相互独立，从 X，Y 两组随机各选 1 人，X 组选出的人记为甲，Y 组选出的人记为乙.

（1）如果 $a=8$，求甲的康复时间比乙的康复时间长的概率；

（2）如果 $a=16$，事件 M：“甲康复时间为 11 天”，事件 N：“甲乙康复时间之和为 25 天”，事件 M，N 是否相互独立？

16. 已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 是直角梯形，$AD\parallel BC$，$AD\perp DC$，若 $PA=AD=2$，$DC=2\sqrt{2}$，点 M 为 PD 的中点，点 N 为 PC 的四等分点（靠近点 P）.

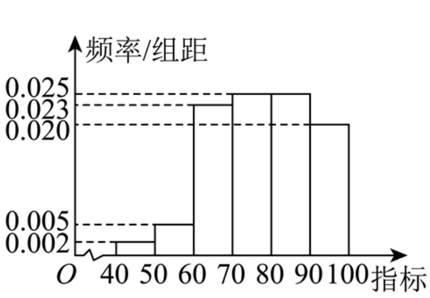


（1）求证：平面 $AMN\perp$ 平面 PCD；

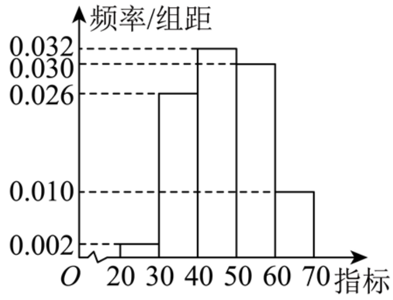
（2）求点 P 到平面 AMN 的距离.

17. 某新能源汽车电池代工厂生产甲、乙两种型号的电池，为了解电池的某项指标，从这两种电池中各抽取

100 件进行检测，获得该项指标的频率分布直方图，如图所示：



甲型电池



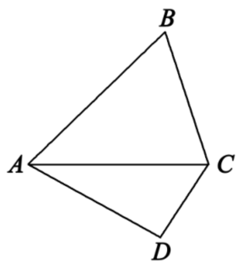
乙型电池

假设数据在组内均匀分布，以样本估计总体，以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

（1）估计乙型电池该项指标的平均值（同一组中的数据用该组区间的中点值为代表），并估计甲型电池这一指标的 75%分位数；

（2）现分别采用分层抽样的方式，从甲型电池指标在$\left[70,90\right)$内取 2 件，乙型电池指标在$\left[50,70\right)$内取 4 件，再从这 6 件中任取 2 件，求指标在$\left[50,60\right)$和$\left[70,80\right)$内各 1 件的概率.

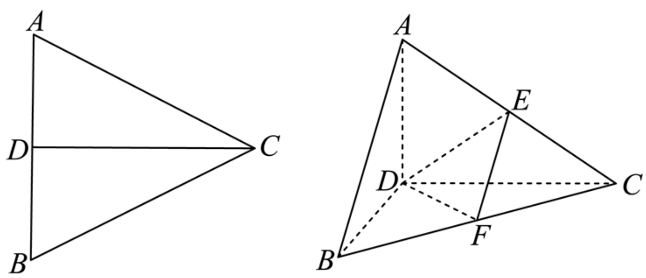
18. 如图，平面四边形$ABCD$中，$DC=1$，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=-1$，$S_{\triangle ADC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，锐角$\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，且满足$\vec{m}=\left(\sin A+\sin B,\sin C\right)$，$\vec{n}=\left(a-b,c-a\right)$，$\vec{m}\perp\vec{n}$.



（1）求$\triangle ABC$外接圆的半径 R；

（2）求$\triangle ABC$内切圆半径 r的取值范围.

19. 已知正$\triangle ABC$的边长为$2a$，CD是AB边上的高，E，F 分别是AC和BC边的中点.



（1）若将$\triangle ABC$沿CD翻折成直二面角$A-DC-B$，如图所示．若棱锥$E-DFC$的体积为$\frac{\sqrt{3}}{24}$，求

a 的值；

（2）若将 $\triangle ABC$ 沿 CD 翻折成二面角 $A-DC-B$ 的平面角为 $60°$，求 BE 与平面 BCD 所成的角 θ 的正切值 $\tan\theta$；

（3）设将 $\triangle ABC$ 沿 CD 翻折成二面角 $A-DC-B$ 的平面角为 α（α 为锐角），BE 与平面 BCD 所成的角为 θ，用 $\cos\alpha$ 表示 $\tan^2\theta$.

高一数学试题

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，第Ⅰ卷 1-2 页，第Ⅱ卷 2-4 页，共 150 分，测试时间 120 分钟.

注意事项：

选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案，不能答在测试卷上.

第Ⅰ卷 选择题（共 58 分）

一、选择题（本题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.）

1. 已知复数 z 满足 $\frac{z}{1-2\mathrm{i}}=\mathrm{i}$ （i 为虚数单位），则 z 的共轭复数为（　　）

A. $1-2\mathrm{i}$　　B. $-1-2\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $2-\mathrm{i}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用 $\frac{z}{1-2\mathrm{i}}=\mathrm{i}$ 求出复数 z，从而可求出其共轭复数.

【详解】由 $\frac{z}{1-2\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，得 $z=\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})=\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2+\mathrm{i}$，

所以 $\overline{z}=2-\mathrm{i}$.

故选：D

2. 已知向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,1)$，若 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $\lambda=$（　　）

A. -2　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】利用向量线性运算的坐标表示，结合向量垂直的坐标表示计算即得.

【详解】向量 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,1)$，则 $\vec{a}+\lambda\vec{b}=(1+\lambda,\lambda)$，

由 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\perp\vec{a}$，得 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{a}=1+\lambda=0$，所以 $\lambda=-1$.

故选：B

3. 已知 l，m 是两条不重合的直线，α，β 是两个不重合的平面，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 $l\perp m$，$m\,/\!/\,\alpha$，则 $l\perp\alpha$

B. 若$\alpha \cap \beta = l$，$m \subset \alpha$，$l // m$，则$m // \beta$

C. 若$\alpha \cap \beta = l$，$m \subset \alpha$，$m \perp l$，则$\alpha \perp \beta$

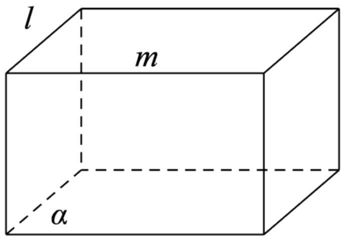
D. 若$l \subset \alpha$，$m \subset \beta$，$\alpha // \beta$，则$l // m$

【答案】B

【解析】

【分析】对于 ACD，举例判断，对于 B，利用线面平行的判定定理分析判断.

【详解】对于 A，如图，当$l \perp m$，$m // \alpha$时，$l // \alpha$，所以 A 错误，

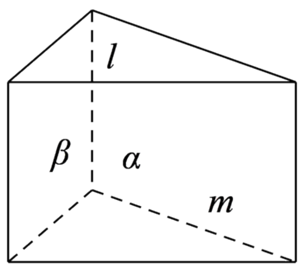


对于 B，因为$\alpha \cap \beta = l$，所以$l \subset \beta$，

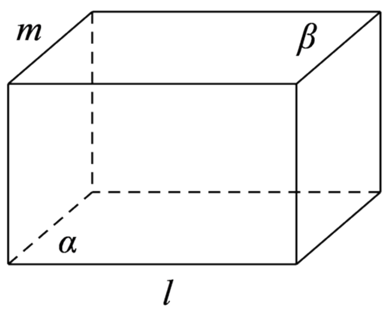
因为 l，m 是两条不重合的直线，$m \subset \alpha$，所以$m \not\subset \beta$，

因为$l // m$，所以$m // \beta$，所以 B 正确，

对于 C，如图，在正三棱柱中，当$\alpha \cap \beta = l$，$m \subset \alpha$，$m \perp l$时，α与β不垂直，所以 C 错误，



对于 D，如图，当$l \subset \alpha$，$m \subset \beta$，$\alpha // \beta$时，l与m是异面直线，所以 D 错误，



故选：B

4. 已知 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-1$，则 $\tan\left(\alpha+\dfrac{3}{4}\pi\right)=$（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　　　B. 3　　　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　　　D. -3

【答案】A

【解析】

【分析】对已知等式化简可求出 $\tan\alpha$，然后利用两角和的正切公式化简求解即可.

【详解】由 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-1$，得 $\cos\alpha=\sin\alpha-\cos\alpha$，得 $2\cos\alpha=\sin\alpha$，

所以 $\tan\alpha=2$，

所以 $\tan\left(\alpha+\dfrac{3}{4}\pi\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\dfrac{3}{4}\pi}{1-\tan\alpha\tan\dfrac{3}{4}\pi}=\dfrac{2-1}{1-2\times(-1)}=\dfrac{1}{3}$.

故选：A

5. 一个盒子里装有除颜色外完全相同的 5 个小球，其中有编号分别为 1，2，3 的红球 3 个，编号分别为 2，3 的白球 2 个，从盒子中任取 2 个小球（假设取到任何一个小球的可能性相同）. 则在取出的 2 个小球中，至少有一个白球且小球编号最小值为 2 的概率是（　　）

A. $\dfrac{1}{5}$　　　　B. $\dfrac{3}{10}$　　　　C. $\dfrac{2}{5}$　　　　D. $\dfrac{3}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用列举法求解，列出 5 个球中取出 2 个球的所有情况，然后找出至少有一个白球且小球编号最小值为 2 的情况，再利用古典概型的概率公式求解即可.

【详解】由题意得从 5 个球中取出 2 个球的所有情况有：

（红 1 红 2），（红 1 红 3），（红 1 白 2），（红 1 白 3），（红 2 红 3），（红 2 白 2），

（红 2 白 3），（红 3 白 2），（红 3 白 3），（白 2 白 3），共 10 种情况，

其中至少有一个白球且小球编号最小值为 2 的有：

（红 2 白 2），（红 2 白 3），（红 3 白 2），（白 2 白 3），有 4 种情况，

所以所求概率为 $\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

故选：C

6. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 $2\sin C=\sqrt{6}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=ab$，则 $A=$

（　　）

A. 15°　　　　B. 60°　　　　C. 75°　　　　D. 105°

【答案】C

【解析】

【分析】先根据余弦定理得出角 C, 再代入得出角 B ,最后应用内角和即可求出 A .

【详解】因为 $a^2+b^2-c^2=ab$，所以 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}, C=60°$，

又因为 $2\sin C=\sqrt{6}\cos B$，所以 $2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\cos B$， $\cos B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $B=45°$，

所以 $A=180°-60°-45°=75°$.

故选：C.

7. 已知 4 个数据的平均值为 6，方差为 3，现加入数据 4 和 8，则这 6 个数据的方差为（　　）

A. 3　　　　B. 5　　　　C. $\dfrac{13}{3}$　　　　D. $\dfrac{10}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意，由平均数及方差的计算公式求解即可

【详解】设原来的 4 个数为 a,b,c,d，则 $a+b+c+d=24$，

$\dfrac{1}{4}[(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(d-6)^2]=3$

所以 $(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(d-6)^2=12$，

加入数据 4 和 8 后的平均数为 $\dfrac{1}{6}\times(24+4+8)=6$，

所以这 6 个数的方差为

$\dfrac{1}{6}[(a-6)^2+(b-6)^2+(c-6)^2+(d-6)^2+(4-6)^2+(8-6)^2]$

$=\dfrac{1}{6}\times(12+4+4)=\dfrac{10}{3}$.

故选：D

8. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面 ABC 是边长为 1 的等边三角形，侧棱 AA_1 长为 2，一质点从 A 出发沿三棱柱的棱前进，若经过的第一条棱为 AA_1，且第 $n+2$ 条棱与第 n 条棱异面，则该质点经过 2024 条棱后运动的总路程为（　　）

A. 2696　　　　B. 2098　　　　C. 2699　　　　D. 2700

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意求出前几次的路程，发现所走路程连续 3 条棱的长度之和为 4，利用周期性从而可求出结果.

【详解】因为第一条棱为 AA_1，且第 $n+2$ 条棱与第 n 条棱异面，

所以第二次经过的棱为 A_1C_1 或 A_1B_1，此时经过的棱长为 1，

第三次经过的棱与第一次经过的棱异面，则第三次经过棱 C_1B_1 或 B_1C_1，

此时经过的棱长为 1，

第四次经过的棱与第二次经过的棱异面，则第四次经过棱 B_1B 或 C_1C，

此时经过的棱长为 2，

第五次经过的棱与第三次经过的棱异面，则第四次经过棱 BA 或 CA，

此时经过的棱长为 1，

……，

所以第 $3k+1(k\in \mathrm{N})$ 条棱的长度为 2，第 $3k+2,3k+3(k\in \mathrm{N})$ 条棱的长度为 1，

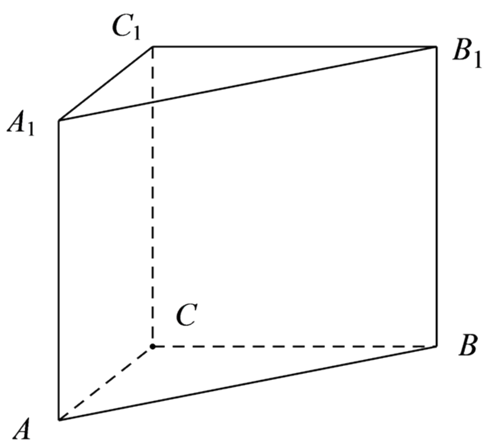
则连续 3 条棱的长度之和为 4，

而 $2024=3\times 674+2$，

所以该质点运动完第 2024 条棱后，运动的总路程为

$674\times 4+2+1=2699$.

故选：C



二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.）

9. 已知复数$z\neq 0$，下列结论正确的有（　　）

A. $\overline{z^2}=\left(\overline{z}\right)^2$

B. $z\overline{z}=|z|^2$

C. 若$z^2=\left(\overline{z}\right)^2$，则$z$为纯虚数

D. 若$z+\overline{z}=0$，则z为纯虚数

【答案】ABD

【解析】

【分析】设$z=x+y\mathrm{i},\left(x^2+y^2\neq 0\right)$，由复数的概念、复数模的定义以及复数的四则运算即可逐一验算各个选项.

【详解】设$z=x+y\mathrm{i},\left(x,y\in\mathrm{R},x^2+y^2\neq 0\right)$，

对于A，$\overline{z^2}=\overline{\left(x+y\mathrm{i}\right)^2}=\overline{\left(x^2-y^2\right)+2xy\mathrm{i}}=\left(x^2-y^2\right)-2xy\mathrm{i}=\left(x-y\mathrm{i}\right)^2=\left(\overline{z}\right)^2$，故A正确；

对于B，$z\overline{z}=\left(x+y\mathrm{i}\right)\left(x-y\mathrm{i}\right)=x^2+y^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=|z|^2$，故B正确；

对于C，若$z=1$，则$z^2=1=\left(\overline{z}\right)^2$，但此时$z$不为纯虚数，故C错误；

对于D，若$z+\overline{z}=\left(x+y\mathrm{i}\right)+\left(x-y\mathrm{i}\right)=2x=0$，所以$x=0$，又$x^2+y^2\neq 0$，所以$y\neq 0$，即$z$为纯虚数，故D正确.

故选：ABD.

10. 某同学记录了连续5天的平均气温，已知这组数据均为整数，将该组数据从小到大排列，中位数为20，唯一众数为22，极差为5，则（　　）

A. 该组数据中最小的数据可能为16

B. 该组数据的平均数不大于20

C. 该组数据的60%分位数是21

D. 该组数据的第二个数字是18

【答案】BC

【解析】

【分析】由题意设该组数据从小到大为a,b,c,d,e，由中位数，众数与极差可得设该组数据从小到大为$17,b,20,22,22$，故$b=18$或$b=19$，再逐项判断即可求解.

【详解】由题意设该组数据从小到大为a,b,c,d,e，

因为中位数为20，唯一众数为22，

则$c=20$，$d=e=22$.

因为极差为5，所以$d-a=22-a=5$，解得$a=17$.

对于A，该组数据中最小的数据为17，故A错误；

对于 B，设该组数据从小到大为$17,b,20,22,22$，

因为这组数据均为整数，故$b=18$或$b=19$.

所以该组数据的平均数为$\overline{x}=\frac{17+b+20+22+22}{5}=\frac{81+b}{5}\leq\frac{81+19}{5}=20$，故 B 正确；

对于 C，$5\times60\%=3$，所以该组数据的 60%分位数是$\frac{20+22}{2}=21$，故 C 正确；

对于 D，该组数据的第二个数字可能是 18，也可能是 19，故 D 错误.

故选：BC.

11. 棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，用一平面去截，则下列说法正确的是（　　）

A. 当截面为三角形时，截面一定为锐角三角形

B. 当截面是梯形时，截面不可能为直角梯形

C. 若E为AB的中点，平面A_1EC截正方体所得截面面积为$4\sqrt{6}$

D. 过棱CC_1，A_1D_1，A_1B_1的中点作正方体的截面，截面多边形的周长为$\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】A 选项，当截面为三角形时，根据余弦定理得到$\angle FHG$，$\angle HFG,\angle HGF$为锐角，得到 A 正确；B 选项，假设截面为直角梯形，根据线面垂直和线面平行得到矛盾；C 选项，作出截面，得到平面A_1EC截正方体所得截面面积；D 选项，作出辅助线，得到五边形$MJSNK$即为过棱CC_1，A_1D_1，A_1B_1的中点作正方体的截面，并求出各边长，得到答案.

【详解】A 选项，如图，截面为三角形，

设$DH=a,DF=b,DG=c$，则$HF=\sqrt{a^2+b^2},HG=\sqrt{a^2+c^2},FG=\sqrt{b^2+c^2}$，

由于$HF^2+HG^2-FG^2=2a^2>0$，故$\cos\angle FHG>0$，$\angle FHG$为锐角，

同理$\angle HFG,\angle HGF$为锐角，

故截面一定为锐角三角形，A 正确；