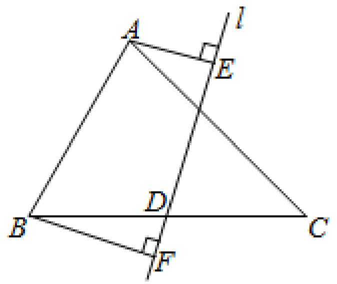
专题 05 几何思想之特殊平行四边形难点综合专练（解析版）

错误率：__________易错题号：__________

一、单选题

1．（2021·江苏宜兴·八年级期中）如图，在△ABC 中，AB＝4，∠ABC＝60°，∠ACB＝45°，D 是 BC 的中点，直线 l 经过点 D，AE⊥l，BF⊥l，垂足分别为 E，F，则 AE+BF 的最大值为（　　）



A．$4\sqrt{2}$　　　　B．$2\sqrt{6}$　　　　C．$4\sqrt{3}$　　　　D．$3\sqrt{2}$

【标准答案】B

【思路指引】

把要求的最大值的两条线段经过平移后形成一条线段，然后再根据垂线段最短来进行计算即可．

【详解详析】

解：如图，过点 C 作 $CK\perp l$ 于点 K，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于点 H，

在 Rt△AHB 中，

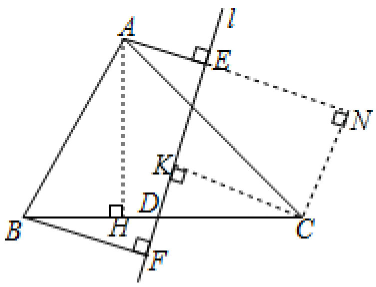
$\because \angle ABC=60°$，$AB=4$，

$\therefore BH=2$，$AH=2\sqrt{3}$，

在 RtΔAHC 中，$\angle ACB=45°$，

$\therefore AH=CH=2\sqrt{3}$，

$\therefore AC=\sqrt{AH^2+CH^2}=\sqrt{12+12}=2\sqrt{6}$，



$\because$ 点 D 为 BC 中点，

$\therefore BD=CD$，

在 ΔBFD 与 ΔCKD 中，

$$\begin{cases} \angle BFD = \angle CKD = 90^\circ \\ \angle BDF = \angle CDK \\ BD = CD \end{cases},$$

$\therefore \Delta BFD \cong \Delta CKD(AAS)$，

$\therefore BF = CK$，

延长 AE，过点 C 作 $CN \perp AE$ 于点 N，得矩形 $ENCK$，

$\therefore CK = EN$，

$\therefore AE + BF = AE + CK = AE + EN = AN$，

在 RtΔACN 中，$AN < AC$，

当直线 $l \perp AC$ 时，最大值为 $2\sqrt{6}$，

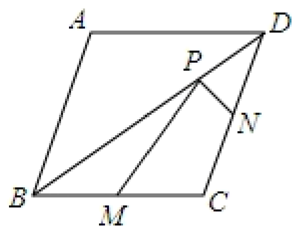
综上所述，$AE + BF$ 的最大值为 $2\sqrt{6}$．

故选：B．

【名师指路】

本题主要考查了全等三角形的判定定理和性质定理及矩形的性质，构建全等三角形是解答此题的关键．

2．（2021·江苏工业园区·八年级月考）已知菱形 $ABCD$ 的两条对角线分别为 12 和 16，M、N 分别是边 BC、CD 的中点，P 是对角线 BD 上一点，则 $PM + PN$ 的最小值为（　　）



A．6　　B．8　　C．10　　D．12

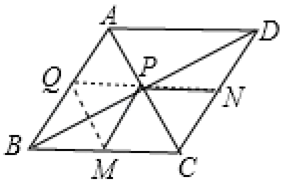
【标准答案】C

【思路指引】

作 M 关于 BD 的对称点 Q，连接 NQ，交 BD 于 P，连接 MP，此时 $MP+NP$ 的值最小，连接 AC，求出 CP、BP，根据勾股定理求出 BC 长，证出 $MP+NP=QN=BC$，即可得出答案．

【详解详析】

解：作 M 关于 BD 的对称点 Q，连接 NQ，交 BD 于 P，此时 $PM + PN$ 最小，最小值为 QN 长，连接 MP、AC．



$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore AB=BC=CD$，$\angle ABP=\angle MBP$，

$\therefore$点 Q 在 AB 上．

$\because M$ 为 BC 中点，$BQ=BM$．

$\therefore Q$ 为 AB 中点．

$\because N$ 为 CD 中点，

$\therefore BQ\parallel CD$，$BQ=CN$．

$\therefore$四边形 $BQNC$ 是平行四边形．

$\therefore NQ=BC$，P 是 AC、BD 中点．

$\therefore CP=\frac{1}{2}AC=6$，$BP=\frac{1}{2}BD=8$．

在 Rt$\triangle BPC$ 中，由勾股定理得：$BC=\sqrt{BP^2+PC^2}=10$，即 $NQ=10$，

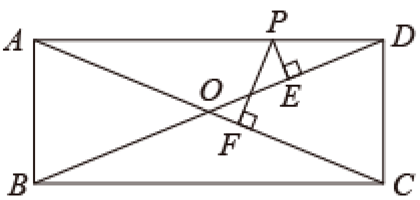
$\therefore MP+NP=QP+NP=QN=10$．

故选：C．

【名师指路】

本题考查了轴对称－最短路线问题，平行四边形的性质和判定，菱形的性质，勾股定理的应用，解此题的关键是能利用轴对称找出 P 的位置．

3．（2021·江苏·张家港市梁丰初级中学八年级月考）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AD=12$，$AB=5$，P 是 AD 边上任意一点，$PE\perp BD$，$PF\perp AC$，垂足分别是 E，F，那么 $PE+PF=$（　　）



A．$\frac{60}{13}$　　B．$\frac{30}{13}$　　C．$\frac{120}{13}$　　D．无法确定

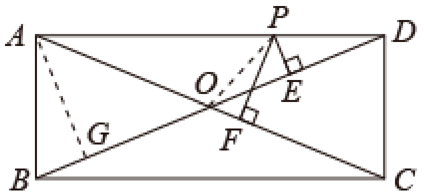
【标准答案】A

【思路指引】

结合矩形的特点利用勾股定理求出对角线的长，再三角形不同的面积表示方法求出 $AG=PE+PF$ 并求出 AG 的长，即求出 $PE+PF$．

【详解详析】

解：如图：过点 A 作 $AG\perp BD$ 于点 G，连接 PO



∵在矩形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=90^\circ$，$OA=OD$，

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OD\cdot AG$，$S_{\triangle AOP}+S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}OA\cdot PF+\frac{1}{2}OD\cdot PE=\frac{1}{2}OD\cdot(PE+PF)$，

$\because S_{\triangle AOD}=S_{\triangle AOP}+S_{\triangle POD}$，

$\therefore AG=PE+PF$，

$\because AD=12$，$AB=5$，

$\therefore BD=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=13$，

$\because S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{1}{2}BD\cdot AG$，

$\therefore AG=\frac{AB\bullet AD}{BD}=\frac{12\times 5}{13}=\frac{60}{13}$，

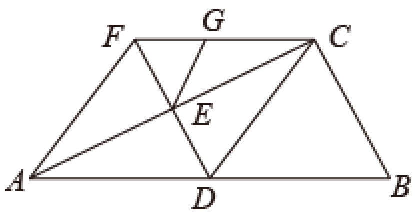
$\therefore PE+PF=\frac{60}{13}$.

故选：A.

【名师指路】

此题利用矩形考查三角形面积表示方法，涉及到勾股定理，利用面积相等用不同的面积公式求解线段长度.

4.（2021·江苏·苏州市景范中学校八年级月考）如图，在Rt△ABC 中，CD 为斜边 AB 的中线，过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E，延长 DE 至点 F，使 $EF=DE$，连接 AF,CF，点 G 在线段 CF 上，连接 EG，$FG=2,GC=3$ 且 $\angle CDE+\angle EGC=180^\circ$，下列结论：① $DE=\frac{1}{2}BC$；②四边形 $DBCF$ 是平行四边形；③ $EF=EG$．其中正确结论的个数是（　　）



A．0 个　　　　B．1 个　　　　C．2 个　　　　D．3 个

【标准答案】D

【思路指引】

根据直角三角形的性质知 $DA=DB=DC$，根据等腰三角形的性质结合菱形的判定定理可证得四边形 $ADCF$ 为菱形，继而推出四边形 $DBCF$ 为平行四边形，可判断①②；利用邻补角的性质结合已知可证得$\angle CFE=\angle FGE$，即可判断③．

【详解详析】

解：∵在 $Rt\triangle ABC$ 中，CD 为斜边 AB 的中线，

∴$DA=DB=DC$，

∵$DE\perp AC$ 于点 E，且 $EF=DE$，

∴$AE=EC$，

∴四边形 $ADCF$ 为菱形，

∴$FC\parallel BD$，$FC=AD=BD$，$FE=DE=\frac{1}{2}DF$

∴四边形 $DBCF$ 为平行四边形，故②正确；

∴$DF=BC$，

∴$DE=\frac{1}{2}BC$，故①正确；

∵四边形 $ADCE$ 为菱形，

∴$CF=CD$，

∴$\angle CFE=\angle CDE$，

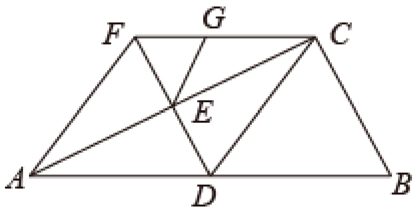
∵$\angle CDE+\angle EGC=180°$，而$\angle FGE+\angle EGC=180°$，

∴$\angle CDE=\angle FGE$，$\angle CFE=\angle FGE$，

∴$EF=EG$，故③正确；

综上，①②③都正确，

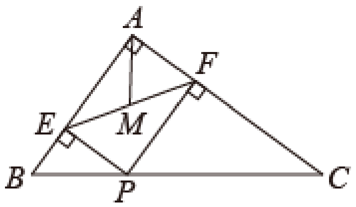
故选 D．



【名师指路】

本题考查了菱形的判定和性质、直角三角形的性质、等腰三角形的性等知识，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解．

5．（2021·江苏·苏州湾实验初级中学八年级月考）如图，在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=90°$，$AB=3$，$AC=4$，P为边BC上一动点，$PE\perp AB$于E，$PF\perp AC$于F，M为EF的中点，则AM的最小值为（　　）



A．$\frac{6}{5}$　　B．$\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　D．$\frac{12}{5}$

【标准答案】A

【思路指引】

先求证四边形$AFPE$是矩形，再根据直线外一点到直线上任一点的距离，垂线段最短，利用面积法可求得AP最短时的长，然后即可求出AM最短时的长．

【详解详析】

解：连接AP，在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$AC=4$，$\angle BAC=90°$，

$\therefore BC=\sqrt{AC^2+AB^2}=10$

$\because PE\perp AB$，$PF\perp AC$，

$\therefore$四边形$AFPE$是矩形，

$\therefore EF=AP$．EF与AP互相平分，

$\because M$是EF的中点，

$\therefore AP$过点M，M为AP中点，

$\therefore AM=\frac{1}{2}AP$，

根据直线外一点到直线上任一点的距离，垂线段最短，

即$AP\perp BC$时，AP最短，同样AM也最短，

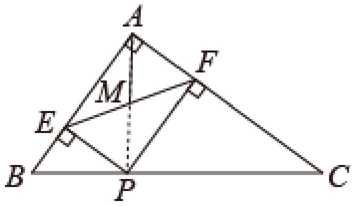
$\therefore S_{\triangle}ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AP=\frac{1}{2}AB\cdot AC$，

$\therefore \frac{1}{2}\times 5AP=\frac{1}{2}\times 3\times 4$，

$\therefore AP$最短时，$AP=\frac{12}{5}$，

$\therefore$当AM最短时，$AM=\frac{1}{2}AP=\frac{6}{5}$．

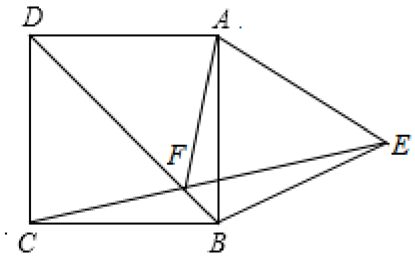
故选A．



【名师指路】

此题主要考查学生对勾股定理的应用、矩形的判定和性质、垂线段最短和直角三角形斜边上的中线的理解和掌握，此题涉及到动点问题，有一定难度．

6．（2021·江苏工业园区·八年级月考）如图，以正方形 $ABCD$ 的一边向形外作等边△ABE， BD 与 EC 交于点 F，且 $DF=EF$，则∠AFD 等于（　　）



A．60°　　B．50°　　C．45°　　D．40°

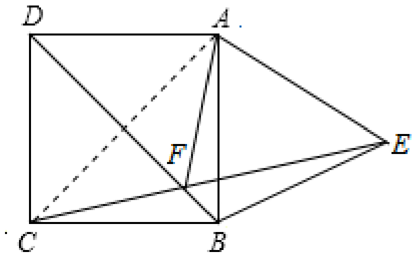
【标准答案】A

【思路指引】

分别求证△DCF≌△DAF≌△EAF 可得∠DFC=∠AFD=∠AFE，根据∠DFC+∠AFD+∠AFE=180°，可得∠DFC=∠AFD=∠AFE=60°．

【详解详析】

解：连接 AC，



∵BD 为 AC 的垂直平分线，

∴$FA=FC$，

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=DC=AB$，

在△DCF 和△DAF 中，

$$\begin{cases} DA = DC \\ DF = DF \\ CF = AF \end{cases},$$

∴△DCF≌△DAF，

∵三角形 ABE 是等边三角形，

∴$AE=AB=AD$，

在△DAF 和△EAF 中，

$$\begin{cases} AD = AE \\ AF = AF \\ DF = EF \end{cases},$$

∴△DAF≌△EAF，

∴△DCF≌△DAF≌△EAF，

得：$\angle DFC=\angle AFD=\angle AFE$，

又∵$\angle DFC+\angle AFD+\angle AFE=180°$，

∴$\angle DFC=\angle AFD=\angle AFE=60°$，

故选：A．

【名师指路】

本题考查了正方形各边长相等的性质，考查了正三角形各边长相等的性质，本题中求证△DCF≌△DAF≌△EAF 是解题的关键．

7.（2021·江苏崇川·八年级期末）顺次连接矩形 $ABCD$ 各边中点所得四边形必定是（　　）．

A．平行四边形　　B．矩形　　C．正方形　　D．菱形

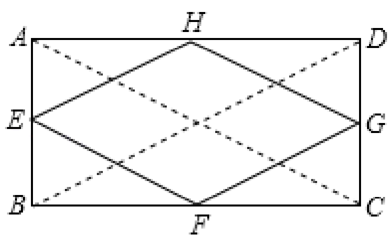
【标准答案】D

【思路指引】

作出图形，根据三角形的中位线定理可得 $EF=GH=\frac{1}{2}AC$，$FG=EH=\frac{1}{2}BD$，再根据矩形的对角线相等可得 $AC=BD$，从而得到四边形 $EFGH$ 的四条边都相等，然后根据四条边都相等的四边形是菱形解答．

【详解详析】

解：如图，连接 AC、BD，



$\because E$、F、G、H 分别是矩形 $ABCD$ 的 AB、BC、CD、AD 边上的中点，

$\therefore EF = GH = \frac{1}{2}AC$， $FG = EH = \frac{1}{2}BD$（三角形的中位线等于第三边的一半），

$\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线 $AC = BD$，

$\therefore EF = GH = FG = EH$，

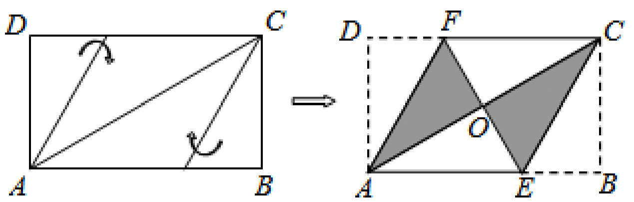
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形.

故选：D.

【名师指路】

本题考查了中点四边形，三角形的中位线定理，菱形的判定，矩形的性质，作辅助线构造出三角形，然后利用三角形的中位线定理是解题的关键.

8.（2021·江苏海州·八年级期中）将矩形纸片 $ABCD$ 按如图所示的方式折叠，恰好得到菱形 $AECF$．若 AB=4，则菱形 $AECF$ 边长为（ ）



A．2.6　　B．3　　C．$\frac{7}{3}$　　D．$\frac{8}{3}$

【标准答案】D

【思路指引】

根据菱形 $AECF$，设 BE 为 x，则 AE 为 $4\text{-}x$，CE 为 $4\text{-}x$，得$\angle FCO=\angle ECO$，可通过折叠的性质得到$\angle ECO=\angle ECB$，可知 $\angle ECB = 30°$，结合直角三角形勾股定理求得 BE 的长.

【详解详析】

$\because$ 四边形 $AECF$ 是菱形，AB=4，

$\therefore$ 设 BE 为 x，则 AE 为 $4\text{-}x$，CE 为 $4\text{-}x$，

$\therefore \angle FCO = \angle ECO,$

$\because \angle ECO = \angle ECB,$

$\therefore \angle ECO = \angle ECB = \angle FCO = 30°,$

$\therefore 2BE = CE$，$CE = 2x,$

$\therefore 2x = 4 - x,$

$\therefore x = \frac{4}{3},$

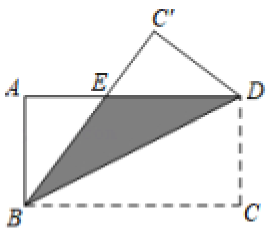
$\therefore CE = \frac{8}{3}$，即为菱形的边长.

故选:D.

【名师指路】

此题主要考查了矩形的折叠问题等知识，涉及菱形的性质和直角三角形，解题过程中应注意折叠是一种对称变换，折叠前后图形的形状和大小不变，如本题中折叠前后角相等.

9.（2021·江苏·星海实验中学八年级期中）如图，矩形 $ABCD$ 中，AB=6，如果将该矩形沿对角线 BD 折叠，那么图中阴影部分△BED 的面积 22.5，则 BC=（　　）



A．16　　　　B．10　　　　C．12　　　　D．14

【标准答案】C

【思路指引】

先根据 $S_{\triangle BED}=22.5$，AB=6 求得 DE=7.5，再根据折叠的性质得到 $\angle CBD=\angle EBD$，而 $\angle CBD=\angle BDE$，则 $\angle EBD=\angle EDB$，得 $BE=ED=7.5$，由此利用勾股定理得到 $AE=4.5$，进而即可求得答案.

【详解详析】

解：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore \angle A=90^\circ$，$BC=AD$，

$\therefore S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}DE\cdot AB=22.5$，

又∵AB=6，

$\therefore S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}DE\cdot 6=22.5$，

解得：DE=7.5，

∵ 将该矩形沿对角线 BD 折叠，

$\therefore \angle CBD=\angle EBD$，

∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD//BC$，

$\therefore \angle CBD=\angle BDE$，

$\therefore \angle EBD=\angle EDB$，

$\therefore BE=DE=7.5$，

∴在 Rt△ABE 中，$AE=\sqrt{BE^2-AB^2}=4.5$，

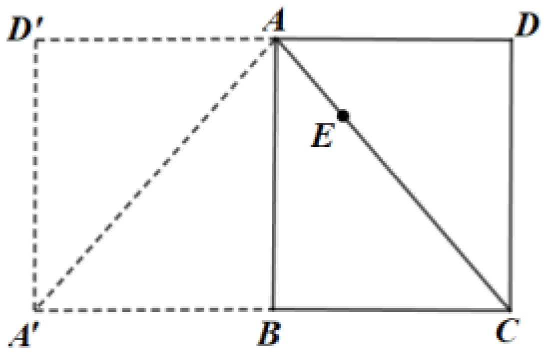
$\therefore BC=AD=AE+DE=12$，

故选：C.

【名师指路】

本题考查了折叠的性质：折叠前后的两个图形全等，即对应线段相等，对应角相等．也考查了矩形的性质，等腰三角形的判定与勾股定理的应用，熟练掌握相关图形的性质是解决本题的关键．

10．（2021·江苏丹阳·八年级期中）如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB=4$，点 E 在对角线 AC 上任意一点，将正方形绕点 B 逆时针旋转 $90°$ 后，点 E 的对应点为 E'，则点 B 到线段 EE' 距离的最小值为（　　）



A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

【标准答案】D

【思路指引】

连接 BE、BE'、EE'，由正方形的性质和旋转性质得 $AE'=CE$，$BE=BE'$，$\angle\angle EBE'=90°$，证得$\triangle BEE'$是等腰直角三角形且$\angle A'AC=90°$，过 B 作 $BM\perp EE'$ 于 M，则有 $BM=\frac{1}{2}EE'$，只需求出 EE'的最小值即可．设 $AE=x$，$AE'=CE=4\sqrt{2}-x$，利用勾股定理得出 $EE'^2=2(x-2\sqrt{2})^2+16$， 从而求出 EE'的最小值即可解答．

【详解详析】

解：连接 BE、BE'、EE'，

∵四边形 ABCD 是正方形，

∴$\angle DAC=\angle DCA=45°$，

由旋转性质得 $AE'=CE$，$BE=BE'$，$\angle EBE'=90°$，$\angle D'AA'=\angle DCA=45°$，

∴$\triangle BEE'$是等腰直角三角形，$\angle A'AC=90°$，

过 B 作 $BM\perp EE'$ 于 M，则 $BM=\frac{1}{2}EE'$，

∴求 BM 的最小值，只需求出 EE'的最小值．

设 $AE=x$，$AE'=CE=4\sqrt{2}-x$，

在 Rt$\triangle$AEE'中，由勾股定理得：

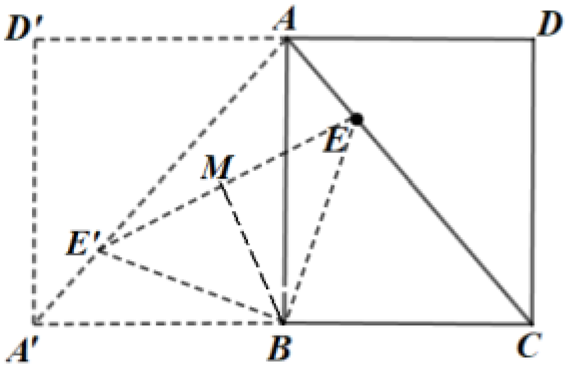
$EE'^2=x^2+(4\sqrt{2}-x)^2=2(x-2\sqrt{2})^2+16$，

当 $x=2\sqrt{2}$ 时，EE'^2 有最小值，最小值为 16，

此时，$EE'=4$，$BM=\frac{1}{2}EE'=2$，

即点 B 到线段 EE' 距离的最小值为 2，

故选：D．

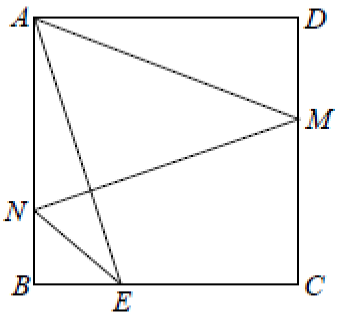


【名师指路】

本题考查正方形的性质、旋转的性质、等腰直角三角形的性质、勾股定理等知识，熟练掌握相关知识的联系和运算，利用完全平方式的性质是解决问题是解答的关键．

二、填空题

11．（2021·江苏新吴·八年级期末）如图，E 为正方形 $ABCD$ 中 BC 边上的一点，且 $AB=3BE=6$，M、N 分别为边 CD、AB 上的动点，且始终保持 $MN\perp AE$，则 $AM+NE$ 的最小值为______．



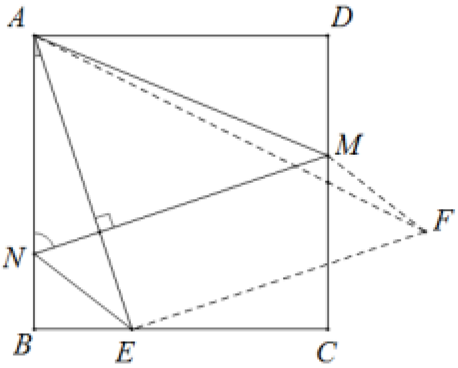
【标准答案】$4\sqrt{5}$

【思路指引】

过点 E 作 $EF\parallel MN$，过点 M 作 $MF\parallel EN$ 交 EF 于点 F，证得当 A、M、F 三点在同一直线上时，$AM+NE$ 有最小值，即为 AF 的长，过点 M 作 $MG\perp AB$ 于点 G，证明 $Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle MGN$，得到$\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，再利用勾股定理即可求解．

【详解详析】

解：过点 E 作 $EF\parallel MN$，过点 M 作 $MF\parallel EN$ 交 EF 于点 F，连接 AF，如图：



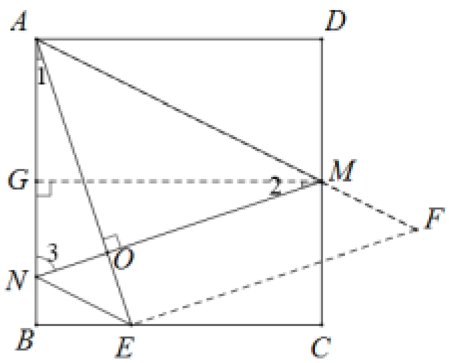
则四边形 $MNEF$ 为平行四边形，

∴$MN=EF$，$MF=NE$，$MN\parallel EF$，

∴$AM+NE=AM+MF\geq AF$，

∴当 A、M、F 三点在同一直线上时，$AM+NE$ 有最小值，即为 AF 的长，

过点 M 作 $MG\perp AB$ 于点 G，MN 与 AE 相交于点 O，如图：



∵四边形 $ABCD$ 是正方形，$MN\perp AE$，

∴$\angle AON=\angle B=90°$，$AB=BC=MG$，

∴$\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 3=90°$，

∴$\angle 1=\angle 2$，

∴$Rt\triangle ABE\cong Rt\triangle MGN$，

∴$AE=MN$，

∵$MN=EF$，$MN\parallel EF$，

∴$AE=MN=EF$，$AE\perp EF$，

∴$\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，

∵$AB=3BE=6$，

∴$BE=2$，

由勾股定理得 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$，

∴$AF=\sqrt{AE^2+EF^2}=\sqrt{2\times(2\sqrt{10})^2}=4\sqrt{5}$，

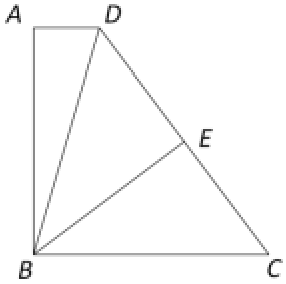
即 $AM+NE$ 的最小值为 $4\sqrt{5}$.

故答案为：$4\sqrt{5}$.

【名师指路】

本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，勾股定理的应用等，正确的确定当 A、M、F 三点在同一直线上时，$AM+NE$ 有最小值，即为 AF 的长是解题的关键．

12．（2021·江苏·江阴市云亭中学八年级月考）如图，四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=90°$，$AD\parallel BC$，$AD<BC$，$AB=6$，E 是 CD 的中点，连接 BD、BE，若$\angle CBE=\angle DBE$，$BE=5$，则 BC 的长是____________．



【标准答案】$\frac{25}{4}$

【思路指引】

过点 D 作 $DF\perp BC$ 于 F，则可证明四边形 $ABFD$ 是矩形，得到 $DF=AB=6$，再由 E 为 CD 的中点，$\angle CBE=\angle DBE$，即可得到 $BD=BC$，$\angle BED=\angle BEC=90°$，则 $S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}CD\cdot BE$，即可得到 $BC=\frac{5}{6}CD$，再根据 $CE^2+BE^2=BC^2$ 即 $\left(\frac{1}{2}CD\right)^2+25=\left(\frac{5}{6}CD\right)^2$，由此即可求解．

【详解详析】

解：如图所示，过点 D 作 $DF\perp BC$ 于 F，

∴$\angle DFB=90°$

∵$AD\parallel BC$，$\angle A=90°$，

∴$\angle ABF=180°-\angle A=90°$，

∴四边形 $ABFD$ 是矩形，

∴$DF=AB=6$，

∵E 为 CD 的中点，$\angle CBE=\angle DBE$，

∴$BD=BC$，$\angle BED=\angle BEC=90°$，

∴$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}BC\cdot DF=\frac{1}{2}CD\cdot BE$，

$\therefore 3BC=\frac{5}{2}CD$，即 $BC=\frac{5}{6}CD$，

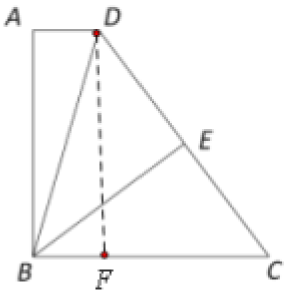
$\because CE^2+BE^2=BC^2$，

$\therefore \left(\frac{1}{2}CD\right)^2+25=\left(\frac{5}{6}CD\right)^2$，

解得 $CD=\frac{15}{2}$，

$\therefore BC=\frac{5}{6}CD=\frac{25}{4}$，

故答案为：$\frac{25}{4}$.



【名师指路】

本题主要考查了矩形的性质与判定，勾股定理，三线合一定理，解题的关键在于能够熟练掌握相关知识进行求解.

13.（2021·江苏·泰兴市实验初级中学八年级月考）如图 1，在一张长方形纸片 *ABCD* 上画一条线段 *MN*，将纸片沿线段 *MN* 折叠（如图 2），当∠1＝70°时，∠*KNC*＝_____°（注：长方形纸片对边平行，即：*CD*∥*AB*，*AD*∥*BC*）.

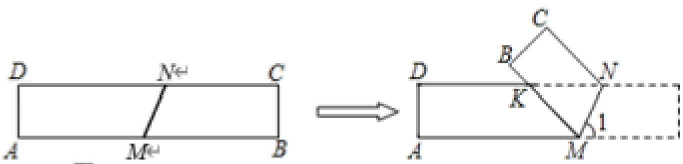


图 1　　图 2

【标准答案】40

【思路指引】

根据矩形的性质和折叠的性质求出∠*KNM*、∠*KMN*、∠*MKN* 的度数，即可求解；

【详解详析】

∵四边形 *ABCD* 是矩形，

∴*AM*//*DN*.

∴∠*KNM*=∠1.

∵∠1=70°，

∴∠KNM=∠1=70°，

∵折叠

∴∠KNM=∠KMN=∠1=70°，

∴∠MKN=40°.

∵BM//CN

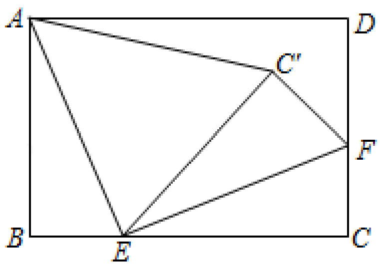
∴∠KNC=∠MKN=40°

故答案为：40；

【名师指路】

本题考查矩形的性质、翻折变换，解题的关键是学会利用翻折不变性解决问题，属于中考常考题型.

14.（2021·江苏广陵·八年级期中）如图，在矩形 $ABCD$ 中，AB＝3，AD＝4，E、F 分别边 BC、CD 上一点，EF⊥AE，将△ECF 沿 EF 翻折得△$EC'F$，连接 AC'，当 BE＝___时，△AEC'是以 AE 为腰的等腰三角形.



【标准答案】$\frac{7}{8}$或$\frac{4}{3}$##$\frac{4}{3}$或$\frac{7}{8}$

【思路指引】

设 BE=x，则 EC=4-x，由翻折得：EC'=EC=4-x．当 AE=EC'时，由勾股定理得：3^2+x^2=（4-x）^{2}；当 AE=AC'时，作 AH⊥EC'，由∠AEF=90°，EF 平分∠CEC'可证得∠AEB=∠AEH，则△ABE≌△AHE，所以 BE=HE=x，由三线合一得 EC'=2EH，即 4-x=2x，解方程即可.

【详解详析】

解：设 BE=x，则 EC=4-x，

由翻折得：EC'=EC=4-x，当 AE=EC'时，AE=4-x，

∵∠B=90°，

由勾股定理得：3^2+x^2=（4-x）^{2}，

解得：$x=\frac{7}{8}$，

当 AE=AC'时，如图，作 AH⊥EC'

∵EF⊥AE，

∴∠AEF=∠AEC'+∠FEC'=90°，

∴∠BEA+∠FEC=90°，

∵△ECF 沿 EF 翻折得△ECF，

∴∠FEC'=∠FEC，

∴∠AEB=∠AEH，

∵∠B=∠AHE=90°，AE=AE，

∴△ABE≌△AHE（AAS），

∴BE=HE=x，

∵AE=AC'时，作 AH⊥EC'，

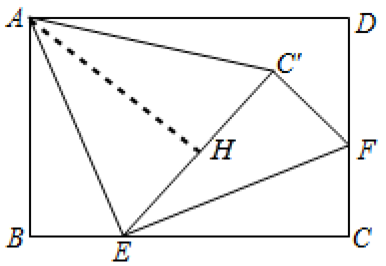
∴EC'=2EH，

即 4-x=2x，

解得 $x=\frac{7}{8}$，

综上所述：BE=$\frac{7}{8}$ 或 $\frac{4}{3}$．

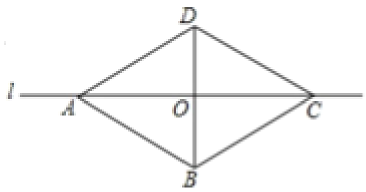
故答案为：$\frac{7}{8}$ 或 $\frac{4}{3}$．



【名师指路】

本题考查了矩形的性质、等腰三角形的性质、勾股定理等知识点，涉及到方程思想和分类讨论思想．当 AE=AC'时如何列方程，有一定难度．

15．（2021·江苏高淳·八年级期中）如图，四边形 $ABCD$ 沿直线 l 对折后重合．若 AD//BC，则结论①AB//CD；②AB＝CD；③AC⊥BD；④OA＝OD 中，正确的是_________（填上正确结论的序号）．



【标准答案】①②③

【思路指引】

由翻折的性质可知；AD＝AB，DC＝BC，∠DAC＝∠BAC，由平行线的性质可知∠DAC＝∠BCA，从而得到∠ACB＝∠ACB，故此 AB＝BC，从而可知四边形 $ABCD$ 为菱形，最后依据菱形的性质判断即可．

【详解详析】

解：由翻折的性质可知；$AD=AB$，$DC=BC$，$\angle DAC=\angle BAC$.

$\because AD//BC$，

$\therefore \angle DAC=\angle BCA$.

$\therefore \angle BAC=\angle ACB$.

$\therefore AB=BC$.

$\therefore AB=BC=CD=AD$.

∴四边形 $ABCD$ 为菱形.

$\therefore AB//CD$，$AB=CD$，$AC\perp BD$，$AO=CO$.

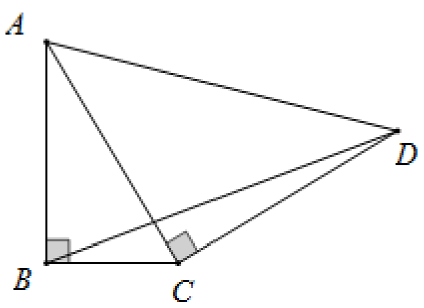
∴符合题意的有：①②③

故答案为：①②③

【名师指路】

本题主要考查的是翻折的性质、菱形的性质和判定、等腰三角形的判定、平行线的性质，证得四边形 $ABCD$ 为菱形是解题的关键.

16.（2021·江苏常州·八年级期中）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB\perp BC$，$AC\perp CD$， $AC=CD$，若 $AB=3$， $BC=1$，则$\triangle ABD$ 的面积是_______.

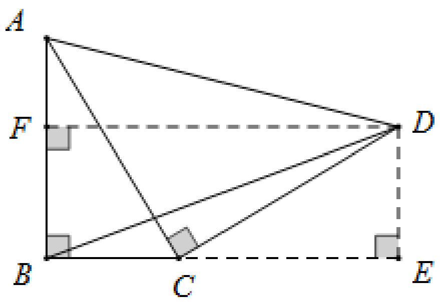


【标准答案】6

【思路指引】

作 $DE\perp BC$ 交 BC 延长线于点 E，作 $DF\perp AB$，垂足为点 F，可得四边形 $BFDE$ 是矩形，得到 $DF=BE$，由题可证 $\triangle ABC\cong\triangle CED$，由全等的性质得 $CE=AB$，进而求出 DF，由三角形面积公式即可求出答案.

【详解详析】



如图所示，作 $DE \perp BC$ 交 BC 延长线于点 E，作 $DF \perp AB$，垂足为点 F，

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是矩形，

$\therefore DF = BE$，

$\because AB \perp BC$，$CE \perp DE$，

$\therefore \angle ABC = \angle CED = 90°$，

$\therefore \angle BAC + \angle ACB = 90°$，

$\because AC \perp CD$，

$\therefore \angle ACD = 90°$，$\angle ACB + \angle ECD = 180° - 90° = 90°$，

$\therefore \angle BAC = \angle ECD$，

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle CED$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABC = \angle CED \\ \angle BAC = \angle ECD \\ AC = CD \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED(AAS)$，

$\therefore CE = AB = 3$，

$\therefore DF = BE = BC + CE = 1 + 3 = 4$，

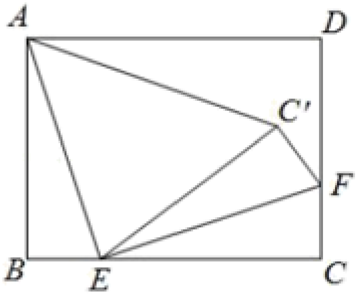
$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times AB \times DF = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

故答案为：6.

【名师指路】

本题考查全等三角形的判定与性质，根据题意添加辅助线构造全等三角形是解题的关键.

17.（2021·江苏·镇江市江南学校八年级期中）如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$AD=8$，E、F 分别是 BC、CD 上的一点，$EF \perp AE$，将△ECF 沿 EF 翻折得到 $\triangle EC'F$，连接 AC'．若△AEC'是等腰三角形，且 $AE=AC'$，则 $BE=$____.



【标准答案】$\frac{8}{3}$

【思路指引】

设 $BE=x$，则 $EC=8-x$，由翻折得：$EC'=EC=8-x$．当 $AE=AC'$时，作 $AH\perp EC'$，由$\angle AEF=90°$，EF 平分$\angle CEC'$可证得$\angle AEB=\angle AEH$，则$\triangle ABE\cong\triangle AHE$，所以 $BE=HE=x$，由三线合一得 $EC'=2EH$，即 $8-x=2x$，解方程即可．

【详解详析】

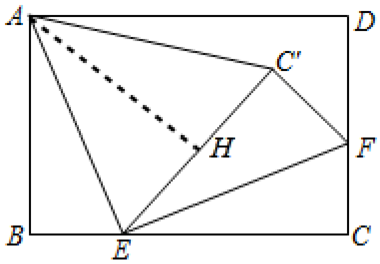
解：$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore BC=AD=8$

设 $BE=x$，则 $EC=8-x$，

由翻折得：$EC'=EC=8-x$，

作 $AH\perp EC'$，如图，



$\because EF\perp AE$，

$\therefore\angle AEF=\angle AEC'+\angle FEC'=90°$，

$\therefore\angle BEA+\angle FEC=90°$，

$\because\triangle ECF$ 沿 EF 翻折得$\triangle EC'F$，

$\therefore\angle FEC'=\angle FEC$，

$\therefore\angle AEB=\angle AEH$，

$\because\angle B=\angle AHE=90°$，$AH=AH$，

$\therefore\triangle ABE\cong\triangle AHE$（$AAS$），

$\therefore BE=HE=x$，

$\because AE=AC'$，

$\therefore EC'=2EH$，

即 $8-x=2x$，

解得 $x=\frac{8}{3}$，

$\therefore BE=\frac{8}{3}$．

故答案为：$\frac{8}{3}$．

【名师指路】

本题考查了矩形的性质、等腰三角形的性质、勾股定理等知识点，根据题意列方程是解答本题的关键．

18．（2021·江苏吴中·八年级期中）如图，四边形 $ABFE$、$AJKC$、$BCIH$ 分别是以 $Rt\triangle ABC$ 的三边为一边的正方形，过点 C 作 AB 的垂线，交 AB 于点 D，交 FE 于点 G，连接 HA、CF．欧几里得编纂的《原本》中收录了用该图形证明勾股定理的方法．关于该图形的下面四个结论：

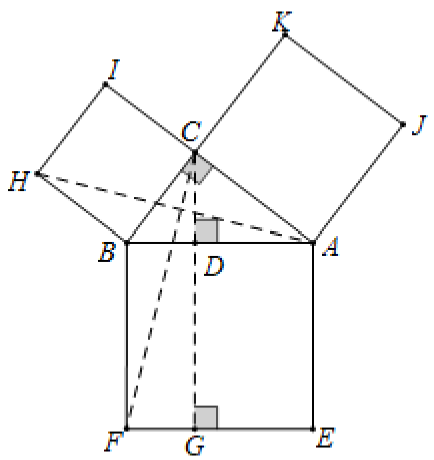
①$\triangle ABH\cong\triangle FBC$；

②正方形 $BCIH$ 的面积=2$\triangle ABH$ 的面积；

③矩形 $BFGD$ 的面积=2$\triangle ABH$ 的面积；

④$BD^2+AD^2+CD^2=BF^2$．

正确的有 ______．（填序号）



【标准答案】①②③

【思路指引】

由"SAS"可证$\triangle ABH\cong\triangle FBC$，故①正确；由平行线间的距离处处相等，可得 $S_{\triangle}ABH=S_{\triangle}BCH=\frac{1}{2}S_{正方形}BCIH$，故②正确；同理可证矩形 $BFGD$ 的面积=2$\triangle ABH$ 的面积，故③正确；由勾股定理可得 $BD^2+AD^2+2CD^2=BF^2$，故④错误，即可求解．

【详解详析】

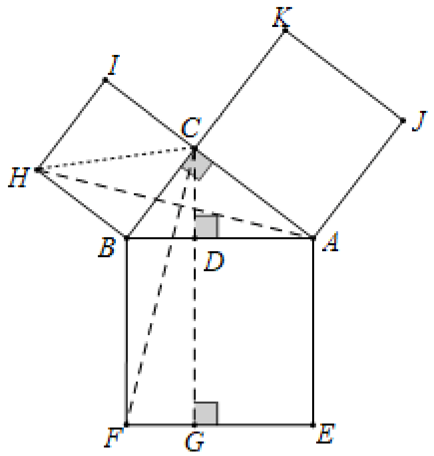
解：$\because$四边形 $ABFE$ 和四边形 $CBHI$ 是正方形，

$\therefore AB=FB$，$HB=CB$，$\angle ABF=\angle CBH=90°$，

$\therefore \angle CBF=\angle HBA$，

$\therefore \triangle ABH\cong\triangle FBC$（$SAS$），故①正确；

如图，连接 HC，



$\because AI\parallel BH$，

$\therefore S_{\triangle}ABH=S_{\triangle}BCH=\dfrac{1}{2}S_{正方形}BCIH$，

$\therefore$正方形 $BCIH$ 的面积$=2\triangle ABH$ 的面积，故②正确；

$\because CG\parallel BF$，

$\therefore S_{\triangle}CBF=\dfrac{1}{2}\times BF\times BD=\dfrac{1}{2}S_{矩形}BDGF$，

$\therefore$矩形 $BFGD$ 的面积$=2\triangle ABH$ 的面积，故③正确；

$\because BC^2=CD^2+DB^2$，$AC^2=CD^2+AD^2$，$BC^2+AC^2=AB^2$，

$\therefore BD^2+CD^2+CD^2+AD^2=AB^2=BF^2$，

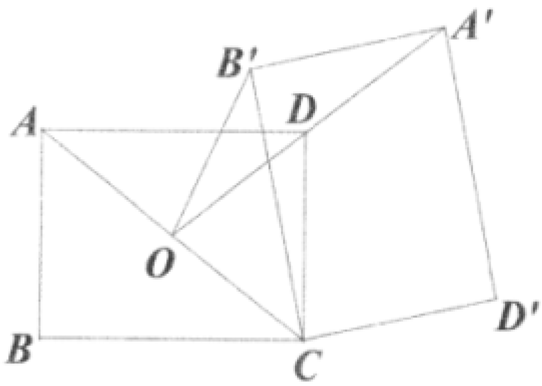
$\therefore BD^2+AD^2+2CD^2=BF^2$，故④错误，

故答案为：①②③.

【名师指路】

本题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，平行线的性质，勾股定理等知识，灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

19．（2021·江苏泗阳·八年级期末）已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，O 是 AC 中点，将矩形 $ABCD$ 以绕 C 点顺时针旋转一周，B、A、D 的对应点分别为 B'、A'、D'，当点 D 恰好在直线 OA' 上时，$OA'=$ __________.



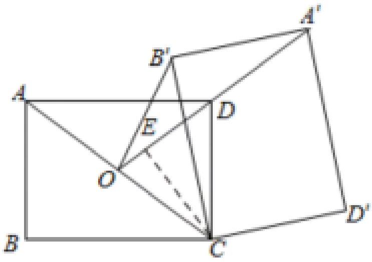
【标准答案】$\frac{2\sqrt{481}+7}{5}$或$\frac{2\sqrt{481}}{5}$

【思路指引】

过点 C 作 $CE\perp OD$ 于点 E，由矩形的性质可得，$AC=10$，$OD=5$，$CE=\frac{24}{5}$，$DE=\frac{18}{5}$；将矩形 $ABCD$ 以绕 C 点顺时针旋转一周，当点 D 恰好在直线 OA' 上时，分两种情况：①当点 D 在线段 OA' 上，连接 CA'，如图所示：设 $A'D=a$，则 $A'E=a+\frac{18}{5}$，在 $Rt\triangle CEA'$ 中，由勾股定理可得，$A'E^2+CE^2=A'C^2$，即 $(a+\frac{18}{5})^2+(\frac{24}{5})^2=10^2$，解得 $a=\frac{2\sqrt{481}-18}{5}$，（负值舍去），则 $OA'=OD+A'D=\frac{2\sqrt{481}+7}{5}$；②当点 O 在线段 $A'D$ 上，如图所示：此时点 A''，O，D，A' 共线；且 $CA'=CA''$，由等腰三角形三线合一可得，$A''E=A'E=a+\frac{18}{5}$，则 $OA''=A''E-OE=a+\frac{18}{5}-\frac{7}{5}=\frac{2\sqrt{481}}{5}$.

【详解详析】

解：如图，过点 C 作 $CE\perp OD$ 于点 E，



在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=8$，

$\therefore BC=AD=8$，$AB=CD=6$，

$\therefore AC=10$，$OD=5$，

$\therefore S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}\cdot OD\cdot CE=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times6\times8$，

$\therefore CE=\frac{24}{5}$，

$\therefore DE=\frac{18}{5}$，$OD=\frac{7}{5}$；

将矩形 $ABCD$ 以绕 C 点顺时针旋转一周，当点 D 恰好在直线 OA' 上时，