结构不良题-数列（五）

一、填空题（本大题共1小题）

1．已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，从①$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$，②$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，其中$\dfrac{1}{a_2}$，$\dfrac{1}{a_3}+1$，$\dfrac{1}{a_6}$等比数列，③$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{3n^2-n}{2}$这三个条件中任选一个，求数列$\{a_n\}$的通项公式，则$a_n=$_____.

二、解答题（本大题共24小题）

2．已知正项等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且__________.

请在①$S_2+S_3=17$；②$a_4-a_2=6S_2$；③a_1+5是a_2和a_3的等差中项；这三个条件中任选一个，补充到上述题目中的横线处，并求解下面的问题．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=(n+1)\cdot\log_3 a_{n+1}$，求数列$\left\{\dfrac{2n+1}{b_n^2}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

3．已知公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，a_1，a_2，a_5成等比数列且满足．请在①$S_4=16$；②$a_9=3a_3+2$；③$S_5=a_{10}+6$，这三个条件中任选一个补充在上面题干中，并回答以下问题.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

4．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数}\\2a_n, n\text{为偶数}\end{cases}$，____________，$n\in\mathrm{N}^*$. 从①$b_n=a_{2n-1}+2$，②$b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$这两个条件中任选一个填在横线上，并完成下面问题.

(1)写出b_1、b_2，并求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

5．设$n\in\mathrm{N}^*$，有三个条件：①a_n是2与S_n的等差中项；②$a_1=2$，$S_{n+1}=a_1(S_n+1)$；③$S_n=2^{n+1}-2$．在这三个条件中任选一个，补充在下列问题的横线上，再作答．（如果选择多个条件分别作答，那么按第一个解答计分）

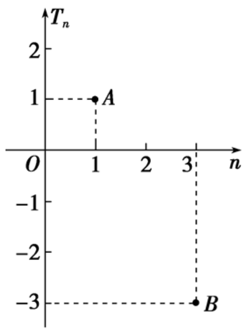
若数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且_____.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

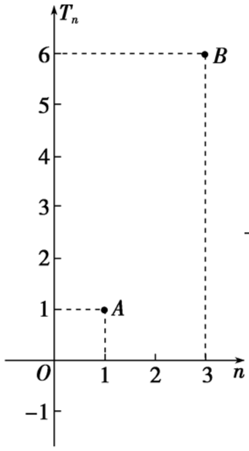
(2)若$\{a_n\cdot b_n\}$是以2为首项，4为公差的等差数列，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

6. 在① $b_4=a_3+a_5$；② $b_4+b_6=3a_3+3a_5$；③ $a_2+a_3=b_4$这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，若问题中的k存在，求出k的值；若k不存在，说明理由. 已知$\{an\}$是等差数列，其前n项和为Sn，$\{bn\}$是公比大于0的等比数列，$b_1=1$，$b_3=b_2+2$，$b_5=a_4+2a_6$，且______，设$cn=\dfrac{b_2}{S_n}$，是否存在实数k，使得对任意的$n\in N^*$，都有$ck\leqslant cn$?

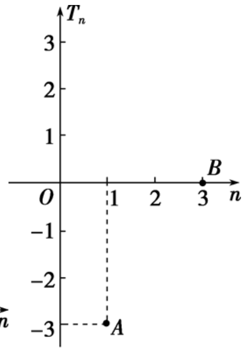
7. 已知$\{an\}$为等比数列，其前n项和为Sn，且满足$a_3=1, S_3=3a_2+1$，$\{b_n\}$为等差数列，其前n项和为T_n，如图______，T_n的图象经过A，B两个点.



图①



图②



图③

(1) 求Sn；

(2) 若存在正整数n，使得$bn>Sn$，求n的最小值. 从图①，图②，图③中选择一个适当的条件，补充在上面问题中并作答.

8. 设数列$\{an\}$的前n项和为Sn，$a_1=1$，______. 给出下列三个条件：

条件①：数列$\{an\}$为等比数列，数列$\{Sn+a_1\}$也为等比数列；条件②：点（Sn，a_{n+1}）在直线$y=x+1$上；条件③：$2na_1+2n^{-1}a_2+\cdots+2an=na_{n+1}$.

试在上面的三个条件中任选一个，补充在上面的横线上，完成下列两问的解答：

(1) 求数列$\{an\}$的通项公式；

(2) 设$bn=\dfrac{1}{\log_2 a_{n+1}\cdot\log_2 a_{n+3}}$，求数列$\{bn\}$的前$n$项和$Tn$.

9. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，在① $S_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left(n\in N^*\right)$② $a_1=1$，$S_n+2a_{n+1}=2\left(n\in N^*\right)$，③ $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2^n-1\left(n\in N^*\right)$这三个条件中任选一个，解答下列问题：

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式：

(2) 若$b_n=\log_2 a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n

10. 在① S_2是S_1与S_4的等比中项，② $a_3=10$，③ $S_3-a_4=4$这三个条件中任选两个补充到下面的问题中，并解答.

问题：已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，前n项和为S_n，且满足_____.

(1) 求a_n；

(2) 若 $b_n = b_{n-1} + 2a_n (n \geq 2)$，且 $b_1 = a_1 + 1$，求数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n．

11．在①数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的递增数列，$a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$，$a_3 = 8$ 且 a_2，a_3，$a_4 - 4$ 成等差数列；② $S_n = 2a_n - 2$；③ $S_n = 2^{n+1} - 2$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答该问题．

问题：设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，_______________．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n$，求数列 $\{a_{2n+1} + b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

（如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

12．在① $a_n = 2n - 1$，$3b_n = 2T_n + 3$；② $2S_n = n^2 + a_n$，$b_n = a_{2n} S_n$ 这两组条件中任选一组，补充在下面横线处，并解答下列问题．

已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和是 S_n，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和是 T_n，__________．

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$，证明：$c_1 + c_2 + \cdots + c_n < 1$．

13．已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 1 (n \in N^*)$，令 $b_n = a_n + 1$

(1) 证明：数列 $\{b_n\}$ 是等比数列；

(2) 求数列_______的前 n 项和 S_n，从条件① $\{b_n + \log_2 b_n\}$；② $\dfrac{1}{\log_2 b_n \cdot \log_2 b_{n+1}}$；③ $\{nb_n\}$ 中任选一个，补充在横线中，并给予解答，若有多个解答，则按照第一个解答评分．

14．在① $a_1 = 1$，且 $a_{n+1} = 2a_n + 1$，② $a_n = \sqrt{\left(2^n - 1\right)\left(a_n + 1\right) + 2^n} - 1$，③ $a_2 = 3a_1 = 3$，设 $b_n = a_{n+1} - a_n - 2^n$，且 $\{b_n\}$ 为常数列这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答．已知数列 $\{a_n\}$ 满足_________，设数列 $\{na_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，求 T_n．

15．在① $S_n > 0$，$a_2^2 - a_3 = 4$，②数列 $\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 的前3项和为6，③ $a_n > 0$ 且 a_1，a_2，$a_4 + 2$ 成等比数列这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并求解．

已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1 = 1$，__________．

(1) 求 a_n；

(2) 设 $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n^2 \left(a_n + 3\right)^2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

16．设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1 = 1$，且满足__________．给出下列三个条件：① $a_3 = 4$，$2\lg a_n = \lg a_{n-1} + \lg a_{n+1} \left(n \geq 2\right)$；② $S_n = ma_n - 1 \left(m \in \mathrm{R}\right)$；③ $2a_1 + 3a_2 + 4a_3 + \cdots + \left(n+1\right)a_n = kn \cdot 2^n \left(k \in \mathrm{R}\right)$．请从其中任选一个将题目补充完整，并求解以下问题．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n=\dfrac{1}{(n+1)\log_2 a_{n+1}}$，且数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$\dfrac{99}{100}$，求$n$的值.

17. 在① $a_5=b_4+2b_6$，② $a_3+a_5=4(b_1+b_4)$，③ $b_2S_4=5a_2b_3$，三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并解答.

设数列$\{a_n\}$是公比大于0的等比数列，其前n项和为S_n，数列$\{b_n\}$是等差数列，其前n项和为T_n. 已知$a_1=1$，$S_3-S_2=a_2+2a_1$，$a_4=b_3+b_5$，____________.

(1) 请写出你选择条件的序号__________；并求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 求S_n和T_n.

18. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n.

从下面①②③中选择其中一个作为条件解答试题，若选择不同条件分别解答，则按第一个解答计分.

①数列$\{a_n\}$是等比数列，$S_2=6$，且$4a_2$，$2a_3$，a_4成等差数列；

②数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_1a_4=32$，$a_2+a_3=12$；

③ $S_n=2a_n-2$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 已知数列$\{b_n\}$的前n项的和为T_n，且$b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_{2n-1})(\log_2 a_{2n+1})}$. 证明：$T_n<\dfrac{1}{2}$.

19. 设正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，且满足__________. 给出下列三个条件：① $a_3=4$，$2\lg a_n=\lg a_{n-1}+\lg a_{n+1}\ (n\geq 2)$；② $S_n=ma_n-1\ (m\in\mathbf{R})$；③ $2a_1+3a_2+4a_3+\cdots+(n+1)a_n=kn\cdot 2^n\ (k\in\mathbf{R})$. 请从其中任选一个将题目补充完整，并求解以下问题.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若 $b_n=\dfrac{1}{(n+1)\log_2 a_{n+1}}$，$T_n$是数列$\{b_n\}$的前$n$项和，求证：$T_n<1$.

20. 已知正项数列$\{a_n\}$，S_n表示其前n项和，且____，从下面条件中选一个补充在横线上，并解答，① $S_n=n^2+n$；② $S_n=n^2-(a_1-3)n$；③ $4S_n=a_n^2+2a_n$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求 $a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-5}\ (n\geq 2)$.

21. 在① $\dfrac{T_{n+1}}{T_n}=\dfrac{(n+2)a_n}{n}$，② $S_n=\dfrac{n+2}{3}a_n$，③ $na_{n+1}-(n+1)a_n=n(n+1)$这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答下列题目.

设首项为2的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，前n项积为T_n，且____.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 若数列$\{c_n\}$的前n项和为a_n，令$d_n=c_n\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，求数列$\{d_n\}$的前$n$项和$M_n$.

22. 在① $\frac{T_{n+1}}{T_n}=\frac{(n+2)a_n}{n}$，② $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$，③ $na_{n+1}-(n+1)a_n=n(n+1)$ 这三个条件中任选一个补充在下面问题中，并解答下列题目.

设首项为2的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，前 n 项积为 T_n，且__________.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2021}}+\frac{1}{a_{2022}}$ 的值.

23. 已知数列{an}是递增的等差数列，a_3＝7，且 a_4 是 a_1 与 a_{13} 的等比中项.

(1) 求数列{an}的通项公式；

(2) 从下面两个条件中任选一个作答，多答按第一个给分.

①若 $bn=\frac{1}{a_na_{n+1}}$，设数列{bn}的前 n 项和为 Sn，求 Sn 的取值范围；

②若 cn＝an•$2n$，设数列{cn}的前 n 项和为 Tn，求证 Tn＞2.

24. 从① $2a_5-a_3=13$；② $S_4=16$；③ $S_3+a_6=20$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并作答.

设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_2=3$，_____；设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$T_n=2b_n-2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 R_n.

注：作答前请先指明所选条件，如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

25. 从① $\frac{S_{n+3}}{n+3}-\frac{S_n}{n}=3$，② $a_2a_5=27$，③ $S_6=36$，这三个条件中任选一个，补充在下面问题中并作答：已知等差数列 $\{a_n\}$ 公差大于零，且前 n 项和为 $S_n\left(n\in N^*\right)$，$a_4=7$，，$b_n=\frac{1}{a_na_{n+2}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.（注：如果选择多个条件分别解答，那么按照第一个解答计分）

参考答案

1.【答案】$\frac{1}{3n-2}$

【分析】

若选①，两边同时取倒数，得到$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列，计算通项即可；

若选②，通过条件直接计算公差，按照等差数列公式求通项；

若选③，退位相减求出$\frac{1}{a_n}$，检验a_1满足后，得到通项.

【详解】

若选①，由$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$得$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}=\frac{1}{a_n}+3$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是1为首项，3为公差的等差数列，$\frac{1}{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$，$a_n=\frac{1}{3n-2}$；

若选②，$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列，设公差为$d$，$\left(\frac{1}{a_3}+1\right)^2=\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_6}$，

$(2+2d)^2=(1+d)(1+5d)$，又$\frac{1}{a_2}\neq 0$，故$d=3$，$\frac{1}{a_n}=1+3(n-1)=3n-2$，$a_n=\frac{1}{3n-2}$；

若选③，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{3n^2-n}{2}$，$n\geq 2$时，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{3(n-1)^2-(n-1)}{2}$，两式相减，$\frac{1}{a_n}=3n-2$，$a_1$也符合，故$a_n=\frac{1}{3n-2}$.

故答案为：$\frac{1}{3n-2}$.

2.【答案】(1) $a_n=3^{n-1}$；

(2) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

【分析】

(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由于$a_n>0$，则有$q>0$. 若选①：根据前n项和列出关于q的方程，解得q即可；若选②：根据通项公式和前n项和求得q即可；若选③：列出关于q的方程，求出q即可；

(2)根据通项公式，采用裂项相消法求其前n项和.

【详解】

(1)

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由于$a_n>0$，则有$q>0$.

选择条件①，

由 $S_2+S_3=17$ 得 $2a_1+2a_2+a_3=17$ ，又 $a_1=1$ ，$\therefore 2+2q+q^2=17$ ，

∴ $q^2+2q-15=0$，解得 $q=-5$（舍）或 $q=3$，

∴ $a_n=3^{n-1}$.

选择条件②，

由 $a_4-a_2=6S_2$，可知 $q\neq 1$，∴ $q^3-q=6\times\frac{1-q^2}{1-q}$，∴ $q^2-q-6=0$，解得 $q=-2$（舍）或 $q=3$，

∴ $a_n=3^{n-1}$.

选择条件③，

由题，可知 $a_2+a_3=2(a_1+5)$，又 $a_1=1$，则有 $q^2+q-12=0$，

解得 $q=-4$（舍）或 $q=3$，

∴ $a_n=3^{n-1}$.

(2)

由(1)得，$b_n=(n+1)\log_3 3^n=n(n+1)$，

∴ $\frac{2n+1}{b_n^2}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$，

∴ $T_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

3.【答案】(1)答案见解析

(2) $T_n=\frac{n}{2n+1}$

【分析】

（1）首先由 a_1，a_2，a_5 成等比数列，求出 $d=2a_1$，再由①或②或③求出数列的首项和公差，即可求得 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求得 $\{b_n\}$ 的通项公式，结合裂项相消法求得 T_n.

【详解】

(1)

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 a_1，a_2，a_5 成等比数列，可得 ${a_2}^2=a_1a_5$， 即 ${a_1}^2+2a_1d+d^2={a_1}^2+4a_1d$，∵ $d\neq 0$，故 $d=2a_1$，

选①：由 $S_4=16$，可得 $\begin{cases}4a_1+6d=16\\ d=2a_1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$， 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$

选②：由 $a_9=3a_3+2$，可得 $a_1+8d=3a_1+6d+2$，即 $d=a_1+1$， 所以 $\begin{cases}d=2a_1\\ d=a_1+1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$， 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$；

选③：由 $S_5=a_{10}+6$，可得 $5a_1+10d=a_1+9d+6$，即 $d+4a_1=6$， 所以 $\begin{cases}d=2a_1\\ d+4a_1=6\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=1\\ d=2\end{cases}$， 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$；

(2)

由（1）可得$b_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，　所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$.

4.【答案】(1)条件选择见解析，$b_1=3$，$b_2=6$，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$

(2) $S_n=\begin{cases}3\cdot 2^{\frac{n+2}{2}}-6-\frac{3n}{2},n\text{为偶数}\\ 9\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}-\frac{3n+13}{2},n\text{为奇数}\end{cases}$

【分析】

（1）选①，推导出数列$\{b_n\}$为等比数列，确定该数列的首项和公比，可求得b_n，并可求得b_1、b_2；

选②，推导出数列$\{a_{2n-1}+2\}$是等比数列，确定该数列的首项和公比，可求得a_{2n-1}，可求得b_n，由此可得出b_1、b_2；

（2）求得$a_{2n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2$，$a_{2n-1}+a_{2n}=3\cdot 2^n-3$，分$n$为偶数、奇数两种情况讨论，结合并项求和法以及等比数列求和公式可求得S_n.

【详解】

(1)

解：若选①，$b_{n+1}=a_{2n+1}+2=2a_{2n}+2=2\left(a_{2n-1}+1\right)+2=2\left(a_{2n-1}+2\right)=2b_n$，

且$b_1=a_1+2=3$，故数列$\{b_n\}$是首项为3，公比为2的等比数列，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$，

故$b_2=6$；

若选②，$a_{2n+1}=2a_{2n}=2\left(a_{2n-1}+1\right)=2a_{2n-1}+2$，所以，$a_{2n+1}+2=2\left(a_{2n-1}+2\right)$，

且$a_1+2=3$，故数列$\{a_{2n-1}+2\}$是以3为首项，以2为公比的等比数列，

所以，$a_{2n-1}+2=3\cdot 2^{n-1}$，故$a_{2n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2$，

所以，$b_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}=\left(3\cdot 2^n-2\right)-\left(3\cdot 2^{n-1}-2\right)=3\cdot 2^{n-1}$，故$b_1=3$，$b_2=6$.

(2)

解：由（1）可知$a_{2n-1}=3\cdot 2^{n-1}-2$，则$a_{2n}=a_{2n-1}+1=3\cdot 2^{n-1}-1$，

所以，$a_{2n-1}+a_{2n}=3\cdot 2^n-3$.

当n为偶数时，$S_n=\left(a_1+a_2\right)+\left(a_3+a_4\right)+\cdots+\left(a_{n-1}+a_n\right)$

$=\left(3\cdot 2^1+3\cdot 2^2+\cdots+3\cdot 2^{\frac{n}{2}}\right)-3\cdot\frac{n}{2}=\frac{6\left(1-2^{\frac{n}{2}}\right)}{1-2}-3\cdot\frac{n}{2}=3\cdot 2^{\frac{n+2}{2}}-6-\frac{3n}{2}$；

当n为奇数时，

$S_n=\left(a_1+a_2\right)+\left(a_3+a_4\right)+\cdots+\left(a_{n-2}+a_{n-1}\right)+a_n=3\cdot 2^{\frac{n-1+2}{2}}-\frac{3\left(n-1\right)}{2}-6+3\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}-2$

$=9\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}-\frac{3n+13}{2}$.

综上所述，$S_n=\begin{cases}3\cdot 2^{\frac{n+2}{2}}-6-\dfrac{3n}{2},n\text{为偶数}\\ 9\cdot 2^{\frac{n-1}{2}}-\dfrac{3n+13}{2},n\text{为奇数}\end{cases}$.

5.【答案】(1) $a_n=2^n$

(2) $T_n=6-\dfrac{2n+3}{2^{n-1}}$

【分析】

（1）选条件①时，利用数列的递推关系求出数列的通项公式；选条件②时，利用数列的递推关系求出数列的通项公式；选条件③时，利用 a_n 与 S_n 的关系可求出答案；

（2）首先可得 $b_n=\dfrac{4n-2}{2^n}$，然后利用错位相减法算出答案即可.

【详解】

(1)

选条件①时，由于 a_n 是2与 S_n 的等差中项；

所以 $2a_n=2+S_n$，①

当 $n=1$ 时，解得 $a_1=2$；

当 $n\geq 2$ 时，$2a_{n-1}=2+S_{n-1}$②，

①－②得：$2a_n-2a_{n-1}=a_n$，

整理得 $a_n=2a_{n-1}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以2为首项，2为公比的等比数列；

所以 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$（首项符合通项），

所以 $a_n=2^n$；

选条件②时，由于 $a_1=2$，$S_{n+1}=a_1(S_n+1)$；

所以：$S_{n+1}=2S_n+2$，①，

当 $n\geq 2$ 时，$S_n=2S_{n-1}+2$，②，

①－②得：$a_{n+1}=2a_n$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以2为首项，2为公比的等比数列；

故 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$（首项符合通项），

所以 $a_n=2^n$；

选条件③时，因为 $S_n=2^{n+1}-2$，

所以当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^2-2=2$

当 $n\geq 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{n+1}-2-\left(2^n-2\right)=2^n$

因为 $n=1$ 时也满足 $a_n=2^n$，

所以 $a_n=2^n$

(2)

若 $\{a_nb_n\}$ 是以2为首项，4为公差的等差数列，

所以 $a_nb_n=2+(n-1)\times 4=4n-2$，

所以$b_n=\frac{4n-2}{2^n}$，

故$T_n=\frac{2}{2}+\frac{6}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\ldots+\frac{4n-2}{2^n}$①，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{6}{2^3}+\frac{10}{2^4}+\ldots+\frac{4n-2}{2^{n+1}}$②，

①-②得：$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{4}{2^2}+\ldots+\frac{4}{2^n}-\frac{4n-2}{2^{n+1}}=1+\frac{1\times(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{4n-2}{2^{n+1}}$；

整理得$T_n=6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$.

6.【答案】答案见解析.

【分析】

根据等比数列的基本量求得b_n，再根据题意，选择不同的条件，判断$\{c_n\}$是否存在最小值.

【详解】

设数列$\{an\}$的公差为d，$\{bn\}$的公比为$q(q>0)$，

因为$\{bn\}$是公比大于0的等比数列，且$b_1=1$，$b_3=b_2+2$，

所以$q^2=q+2$，解得$q=2$($q=-1$不合题意，舍去).所以$bn=2^{n-1}$.

若存在k，使得对任意的$n\in N^*$，都有$ck\leqslant cn$，则cn存在最小值.

若选①，则由$b_5=a_4+2a_6$，$b_4=a_3+a_5$可得$\begin{cases}3a_1+13d=16\\a_1+6d=8\end{cases}$

解得$d=1$，$a_1=1$，所以$Sn=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，$cn=\frac{b_2}{S_n}=\frac{2}{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2n}}=\frac{4}{n^2+n}$.

因为$n\in N^*$，所以$n^2+n\geqslant2$，所以cn不存在最小值，即不存在满足题意的k.

若选②，由$b_5=a_4+2a_6$，$b_4+b_6=3a_3+3a_5$可得$\begin{cases}3a_1+13d=16\\a_1+18d=40\end{cases}$

解得$d=-1$，$a_1=\frac{29}{3}$，所以$Sn=-\frac{1}{2}n^2+\frac{61}{6}n$，$cn=\frac{b_2}{S_n}=\frac{12}{3n^2+61n}$.

因为当$n\leqslant20$时，$cn>0$，当$n\geqslant21$时，$cn<0$，所以易知cn的最小值为$c_{21}=-\frac{2}{7}$.

即存在$k=21$，使得对任意的$n\in N^*$，都有$ck\leqslant cn$.

若选③，则由$b_5=a_4+2a_6$，$a_2+a_3=b_4$可得$\begin{cases}3a_1+13d=16\\a_1+3d=8\end{cases}$

解得$d=\frac{8}{17}$，$a_1=\frac{56}{17}$，所以$Sn=\frac{4n^2+52n}{17}$，$cn=\frac{b_2}{S_n}=\frac{17}{2n^2+26n}$.

因为$2n^2+26n\geqslant28$，所以cn不存在最小值，即不存在满足题意的k.

7.【答案】(1)$Sn=8-2^{3-n}$

(2)答案见解析

【分析】

（1）设等比数列$\{an\}$的公比为q，求得$a_1=4$，$q=\frac{1}{2}$，结合等比数列的求和公式，即可求解；

（2）设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，根据题意得到选择图②③均满足“存在正整数n，使得$b_n>S_n$”，进而结合图②和图③，即可求解.

【详解】

(1)

解：设等比数列$\{an\}$的公比为q，

由$a_3=1,S_3=3a_2+1$，可得$a_1=2a_2$，故$q=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$，

又因为$a_3=a_1q^2$，所以$a_1=4$，所以$S_n=\frac{4\cdot(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=8\cdot(1-\frac{1}{2^n})=8-2^{3-n}$.

(2)

解：设等差数列$\{b_n\}$的公差为d，

由题图①知：$T_1=b_1=1$，$T_3=-3$，可得$d<0$，故数列$\{b_n\}$是递减数列，

又由$\{S_n\}$是递增数列，且$b_1<S_1$，所以不满足“存在正整数n，使得$b_n<S_n$”.

由题图②知：$T_1=b_1=1$，$T_3=6$，可判断$d>0$，故数列$\{b_n\}$是递增数列.

由题图③知：$T_1=b_1=-3$，$T_3=0$，可判断$d>0$，故数列$\{b_n\}$是递增数列.

所以选择图②③均满足“存在正整数n，使得$b_n>S_n$”.

若选择图②，则$T_1=b_1=1$，$T_3=6$，可得$d=1$，所以$b_n=n$.

当$n=1$，2，3，4，5，6，7时，$b_n>S_n$不成立，

当$n=8$时，$b_8=8$，$S_8=8-2^{3-8}$，即$S_8<b_8$，

所以使得$b_n>S_n$成立的正整数n的最小值为8.

若选择图③，则$T_1=b_1=-3$，$T_3=0$，可得$d=3$，所以$b_n=3n-6$.

当$n=1$，2，3，4时，$b_n>S_n$不成立；

当$b_n>S_n$时，$b_5=9$，$S_5=8-2^{3-5}$，即$S_5<b_5$，

所以使得$b_n>S_n$成立的正整数n的最小值为5.

8.【答案】(1) $an=2n^{-1}$

(2) $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$

【分析】

（1）分别按照①②③条件，列式计算即可；

（2）需要用裂项相消法求和.

【详解】

(1)

选条件①：∵数列$\{Sn+a_1\}$为等比数列，∴（S_2+a_1）^{2}=（S_1+a_1）（S_3+a_1），

即（$2a_1+a_2$）^{2}=$2a_1$（$2a_1+a_2+a_3$），

设等比数列$\{an\}$的公比为q，∴（$2+q$）$^2=2$（$2+q+q^2$），
解得$q=2$或$q=0$（舍），∴$an=a_1qn^{-1}=2n^{-1}$；
选条件②：∵点（Sn，an_{+1}）在直线$y=x+1$，∴$an_{+1}=Sn+1$，
又$an=Sn_{-1}+1$（$n\geqslant2$，$n\in N$），两式相减有：$an_{+1}=2an$，又$a_1=1$，$a_2=S_1+1=2$
，
也适合上式，故数列$\{an\}$是首项为1，公比为2的等比数列.
∴$an=a_1qn^{-1}=2n^{-1}$；
选条件③：∵$2na_1+2n^{-1}a_2+\cdots+2an=nan_{+1}$，
∴$2n^{-1}a_1+2n^{-2}a_2+\cdots+2an_{-1}=$（$n-1$）$an$（$n\geqslant2$），
即$2na_1+2n^{-1}a_2+\cdots+2^2an_{-1}=2$（$n-1$）$an$，（$n\geqslant2$）.
由两式相减可得：$2an=nan_{+1}-2$（$n-1$）an，
即$an_{+1}=2an$，
又$a_1=1$，$a_2=2a_1$，也适合上式，
故数列$\{an\}$是首项为1，公比为2的等比数列，
∴$an=a_1qn^{-1}=2n^{-1}$；
(2)

由（1）可知：$an=2n^{-1}$，$b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_{n+1}\log_2 a_{n+3}}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，

$$T_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

故答案为：$a_n=2^{n-1}$，$T_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

9.【答案】(1) $a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}},n\in N^*$

(2) $T_n=\dfrac{n-n^2}{2}$

【分析】

（1）若选①，由已知得$S_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left(n\in N^*\right)$，$S_{n-1}=2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$，当$n\geq2$时，两式相减有$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，再验证当$n=1$时，是否满足，可得数列的通项；

若选②，由已知得$S_n+2a_{n+1}=2\left(n\in N^*\right)$，$S_{n-1}+2a_n=2$，当$n\geq2$时，两式相减，得$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n\left(n\geq2\right)$，再验证当$n=1$时，是否满足，可得数列的通项；

若选③，由已知得$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=2^n\left(n\in N^*\right)$，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_{a-1}}=2^{n-1}$，

当$n\geq 2$时，两式相减，得$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(n\geq 2\right)$，再验证当$n=1$时，是否满足，可得数列的通项；

（2）由（1）得$b_n=1-n$，由等差数列的定义得数列$\left\{b_n\right\}$是以0为首项，-1为公差的等差数列，根据等差数列的求和公式可求得T_n.

【详解】

(1)

解：若选①，$S_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left(n\in N^*\right)$，则$S_{n-1}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，

当$n\geq 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

当$n=1$时，$a_1=S_1=1$符合上式，

所以$a_n=\frac{1}{2^{n-1}},n\in N^*$；

若选②，$S_n+2a_{n+1}=2\left(n\in N^*\right)$，

当$n\geq 2$时$S_{n-1}+2a_n=2$，

两式相减，得$a_n+2a_{n+1}-2a_n=0$，即$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\left(n\geq 2\right)$，

又$a_1=1$，$S_1+2a_2=2$，所以$a_2=\frac{1}{2}a_1$，所以$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n\left(n\in N^*\right)$，

所以数列$\left\{a_n\right\}$是首项为1，公比为$\frac{1}{2}$等比数列，所以$a_n=\frac{1}{2^{n-1}},n\in N^*$；

若选③，数列$\left\{a_n\right\}$满足$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2^n\left(n\in N^*\right)$，

当$n\geq 2$时，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{a-1}}=2^{n-1}$，

两式相减，可得$\frac{1}{a_n}=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$，所以$a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(n\geq 2\right)$，

当$n=1$时，$a_1=1$符合上式，

所以$a_n=\frac{1}{2^{n-1}},n\in N^*$；

(2)

解：$b_n=\log_2 a_n=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=1-n$，

$b_{n+1}-b_n=1-\left(n+1\right)-\left(1-n\right)=-1$，又$b_1=0$，

所以数列$\left\{b_n\right\}$是以0为首项，-1为公差的等差数列，

所以$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{\left(0+1-n\right)\cdot n}{2}=\frac{n-n^2}{2}$.

10.【答案】(1) $a_n=4n-2$

（2）$\frac{n}{2n+1}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/377101052022010005